Fichiers Fonctions-InjSurBij a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$. Que pensez-vous des affirmations suivantes ?

1. $\forall\ x \in \mathrm{E} \quad \forall\ y \in \mathrm{F} \quad f(x) = y$.
2. $\forall\ x \in \mathrm{E} \quad \exists\ y \in \mathrm{F}$ tel que $\quad f(x) = y$.
3. $\exists\ x \in \mathrm{E}$ tel que $\quad \forall\ y \in \mathrm{F} \quad f(x) = y$.

Exercice 2 : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$. Que pensez-vous des affirmations suivantes ?

1. $\exists\ x \in \mathrm{E}$ tel que $\quad \exists\ y \in \mathrm{F}$ tel que $\quad f(x) = y$.
2. $\forall\ y \in \mathrm{F} \quad \forall\ x \in \mathrm{E} \quad f(x) = y$.
3. $\forall\ y \in \mathrm{F} \quad \exists\ x \in \mathrm{E}$ tel que $\quad f(x) = y$.

Exercice 3 : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$. Que pensez-vous des affirmations suivantes ?

1. $\exists y \in \mathrm{F}$ tel que $\quad \forall x \in \mathrm{E}, \quad f(x) = y$.
2. $\exists y \in \mathrm{F}$ tel que $\quad \exists x \in \mathrm{E}$ tel que $\quad f(x) = y$.

Exercice 4 : Montrer que la fonction $x \longmapsto x - \dfrac{1}{x}$ est injective sur $\mathbb{R}_+^*$. Et sur $\mathbb{R}^*$?

Exercice 5 : On considère l'application $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \dfrac{1}{1+|x|} \end{array}$. Est-elle injectives ? surjectives ? bijectives ?

Exercice 6 : Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{E})$.
Montrer que $f \circ f = \mathrm{Id}_\mathrm{E} \iff (f$ est bijective et $f^{-1} = f)$.

Correction :

$\Longrightarrow$ Comme Id_E est surjective, alors $f \circ f$ est surjective, et donc f est surjective.

Comme Id_E est injective, alors $f \circ f$ est injective, et donc f est injective.

f est donc bijective, et alors $f^{-1} \circ f \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_\mathrm{E}$, soit $f = f^{-1}$.

$\Leftarrow$ AQT

Exercice 7 : Montrer que toute application involutive $(f \circ f = \mathrm{I}_d)$ est bijective.

Correction : Comme Id_E est surjective, alors $f \circ f$ est surjective, et donc f est surjective.

Comme Id_E est injective, alors $f \circ f$ est injective, et donc f est injective.

f est donc bijective, et alors $f^{-1} \circ f \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_\mathrm{E}$, soit $f = f^{-1}$.

Exercice 8 :

1. Sur quels intervalles les plus grands possible, la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$ est-elle injective ?
2. Déterminer $f(]-2, 4])$.

Exercice 9 : Étudier l'injectivité et la surjectivité de $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longmapsto & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & & (x-3y, -2x+6y) \end{array}$.

Correction : f n'est pas injective car $f(0,-1) = f(3,0)$.

f n'est pas surjective car $(0,1)$ n'a pas d'antécédent par f. Sinon, on aurait $\begin{cases} x-3y=0 \\ -2x+6y=1 \end{cases}$. Or $-2x+6y = -2(x-3y)$ d'où $1 = -2\times 0$!

Exercice 10 : Étudier l'injectivité et la surjectivité de $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longmapsto & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & & (2x-y, x+2y) \end{array}$.

Correction : Posons $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$f(x,y) = (a,b) \iff \begin{cases} 2x-y=a \\ x+2y=b \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{2a+b}{5} \\ y = \dfrac{-a+2b}{5} \end{cases}$$

On constate qu'on a trouvé un antécédent, et un seul, pour tout couple de $\mathbb{R}^2$. Donc f est bijective.

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{E},\mathrm{E})$ telle que $f\circ f = f$.

Montrer que si f est injective ou surjective, alors $f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.

Correction :

- Supposons f injective.

  Soit $x \in \mathrm{E}$. Par hypothèse $f\circ f(x) = f(x)$, i.e. $f(f(x)) = f(x)$. f étant injective, on en déduit $f(x) = x$.

  Et donc $f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.
- Supposons f surjective.

  Soit $x \in \mathrm{E}$. Par hypothèse, il existe $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $f(x_0) = x$.

  Par conséquent $f\circ f(x_0) = f(x_0)$, i.e. $f(x) = x$.

  Et donc $f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.

Exercice 2 : Démontrer les implications suivantes, où f et g désignent deux fonctions :

1. Si $g\circ f$ est surjective alors g est surjective.
2. La composée de deux fonctions surjectives est surjective.

Exercice 3 : Démontrer les implications suivantes, où f et g désignent deux fonctions :

1. Si $g\circ f$ est injective alors f est injective.
2. La composée de deux fonctions injectives est injective.

Exercice 4 : On considère deux segments I et J de $\mathbb{R}$ non réduits à un point.

Montrer qu'il existe une bijection de l'un sur l'autre.

Correction : Posons $\mathrm{I} = [a, b]$ et $\mathrm{J} = [c, d]$.

Alors $\phi : \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longmapsto & \mathrm{J} \\ x & & \dfrac{d-c}{b-a}x + \dfrac{bc-ad}{b-a} \end{array}$ est une bijection.

Exercice 5 : Soit E un ensemble et $\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$.

On définit $\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathrm{E}) & \longmapsto & \mathcal{P}(\mathrm{E}) \\ \mathrm{X} & & \mathrm{X} \cap \mathrm{A} \end{array}$ et $\psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathrm{E}) & \longmapsto & \mathcal{P}(\mathrm{E}) \\ \mathrm{X} & & \mathrm{X} \cup \mathrm{A} \end{array}$.

Montrer que :

- ϕ est injective $\iff$ ϕ est surjective $\iff$ $\mathrm{A} = \mathrm{E}$.
- ψ est surjective $\iff$ ψ est injective $\iff$ $\mathrm{A} = \emptyset$.

Correction :

- Si $\mathrm{A} = \mathrm{E}$, alors $\phi = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(\mathrm{E})}$ donc ϕ est injective et surjective.

  Réciproquement, si $\mathrm{A} \neq \mathrm{E}$, considérons $x \in \mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$ et $\mathrm{X} = \{x\}$.

  $\phi(\mathrm{X}) = \mathrm{X} \cap \mathrm{A} = \emptyset = \phi(\emptyset)$. Donc ϕ est non injective.

  De même, ϕ est non surjective : par exemple, X n'a pas d'antécédent.

  S'il en avait un, disons X_0, on aurait $\mathrm{X}_0 \cap \mathrm{A} = \mathrm{X}$ donc $\mathrm{X} \subset \mathrm{A}$: Absurde !
- Si $\mathrm{A} = \emptyset$, alors $\psi = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(\mathrm{E})}$ donc ψ est injective et surjective.

  Réciproquement, si $\mathrm{A} \neq \emptyset$, considérons $x \in \mathrm{A}$ et $\mathrm{X} = \{x\}$.

  $\psi(\mathrm{X}) = \mathrm{X} \cup \mathrm{A} = \mathrm{A} = \psi(\emptyset)$. Donc ψ est non injective.

  De même, ψ est non surjective : par exemple, $\emptyset$ n'a pas d'antécédent.

  S'il en avait un, disons X_0, on aurait $\mathrm{X}_0 \cup \mathrm{A} = \emptyset$ donc $\mathrm{A} \subset \emptyset$: Absurde !

Exercice 6 : Étudier l'injectivité et la surjectivité de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* & \longmapsto & \mathbb{Q} \\ (p, q) & & \dfrac{p}{q} \end{array}$.

Correction : Par définition de $\mathbb{Q}$, f est surjective.

$f(5, 1) = f(10, 2)$ donc f n'est pas injective.

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Soit $p : \mathrm{E} \implies \mathrm{E}$ une application idempotente (i.e. $p \circ p = p$).

1. Si p est injective ou surjective, alors $p = \mathrm{Id}$.
2. Donner un exemple d'application idempotente qui ne soit pas l'identité.
3. Montrer que p idempotente équivaut à $\forall\, x \in p(\mathrm{E})$, alors $p(x) = x$.

Correction :

1. Si p est injective, alors $p \circ p(x) = p(x)$, donc $p(x) = x$. Si p est surjective, alors $\forall\, y \in \mathrm{E}, \exists\, x \in \mathrm{E}$, tel que $p(x) = y$ et donc $p \circ p(x) = p(y)$ et comme $p \circ p(x) = p(x)$, alors $p(x) = p(y) = y$.

2 $p : \{a, b\} \Longrightarrow \{a, b\}$ avec $p(a) = b$ et $p(b) = a$.

3 $\Leftarrow$ Trivial. $\Rightarrow$ Soit $x \in p(\mathrm{E}), \exists\, y \in \mathrm{E}$ tel que $p(y) = x$. Donc $p \circ p(y) = x = p(x)$.

Exercice 2 : Soit E un ensemble et soit A une partie de E. On définit $f : \mathcal{P}(\mathrm{E}) \Longrightarrow \mathcal{P}(\mathrm{E})$
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective.

Correction : Il faut et il suffit que $\mathrm{A} = \varnothing$.

La condition suffisante est évidente et pour la condition nécessaire, on prend $f(\mathrm{A}) = f(\varnothing)$.

Exercice 3 : Soit E un ensemble, et A, B deux parties fixées de E. Soit

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathcal{P}(\mathrm{E}) & \Longrightarrow & \mathcal{P}(\mathrm{A}) \times \mathcal{P}(\mathrm{B}) \\ & \mathrm{X} & \longmapsto & (\mathrm{X} \cap \mathrm{A}, \mathrm{X} \cap \mathrm{B}). \end{array}$$

1 Qu'est-ce que $\phi(\varnothing)$? $\phi(\mathrm{E} \backslash (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}))$?

2 À quelle condition sur A et B, ϕ est-elle injective ?

3 Est-ce que le couple $(\varnothing, \mathrm{B})$ possède un antécédent par ϕ ?

4 À quelle condition sur A et B, ϕ est-elle surjective ?

Exercice 4 : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$. On considère l'application :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{P}(\mathrm{E}) & \longmapsto & \mathcal{P}(\mathrm{F}) \\ & \mathrm{A} & & f(\mathrm{A}) \end{array}$$

Montrer que :

$$f \text{ est injective} \iff \Phi \text{ est injective} \iff \Psi \text{ est surjective.}$$

Exercice 5 : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$. On considère l'application :

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathcal{P}(\mathrm{F}) & \longmapsto & \mathcal{P}(\mathrm{E}) \\ & \mathrm{B} & & f^{-1}(\mathrm{B}) \end{array}$$

Montrer que :

$$f \text{ est surjective} \iff \Phi \text{ est surjective} \iff \Psi \text{ est injective.}$$

Exercice 6 :

1 Soit $f : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{E}$ et $g : \mathrm{G} \longmapsto \mathrm{E}$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $h : \mathrm{G} \longmapsto \mathrm{F}$ telle que $g = f \circ h$ si et seulement si : $g(\mathrm{G}) \subset f(\mathrm{F})$. A quelle condition h est-elle unique ?

2 Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{G}$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $h : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{G}$ telle que $g = h \circ f$ si et seulement si : $\forall\, x, y \in \mathrm{E}, (f(x) = f(y) \Rightarrow g(x) = g(y))$. A quelle condition h est-elle unique ?

Exercice 7 : Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui même définie par $f(x, y) = \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{2xy}{x+y}\right)$

1 f est-elle injective ?

2 On note g la restriction de f à $\mathrm{U} = \{(x, y) / x \leqslant y\}$. g est-elle injective ?

3 Déterminer l'image de g.

4 Si g définit une bijection de U sur $g(\mathrm{U})$, définir g^{-1}.

Exercice 8 : Soient E, F deux ensembles non vides, et $f \in \mathcal{F}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

On pose $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathrm{E}) & \longmapsto & \mathcal{P}(\mathrm{F}) \\ \mathrm{A} & & f(\mathrm{A}) \end{array}$ et $\Psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathrm{F}) & \longmapsto & \mathcal{P}(\mathrm{E}) \\ \mathrm{B} & & f^{-1}(\mathrm{B}) \end{array}$.

1 Montrer que :

(a) f est injective $\iff$ Φ est injective
(b) f est surjective $\iff$ Φ est surjective

2 Montrer que :

(a) f est injective $\iff$ Ψ est surjective
(b) f est surjective $\iff$ Ψ est injective

Correction :

1 (a) ($\Rightarrow$) Supposons que f soit injective. Soient A,A' deux parties de E telles que $f(\mathrm{A}) = f(\mathrm{A}')$.

Soit $a \in \mathrm{A}$. On a donc $f(a) \in f(\mathrm{A})$, d'où par hypothèse, $f(a) \in f(\mathrm{A}')$. On en déduit que $f(a)$ admet un antécédent a' dans A' : $f(a) = f(a')$. On en déduit que $a = a'$ et donc $a \in \mathrm{A}'$. On a démontré que $\mathrm{A} \subset \mathrm{A}'$. Et de même, $\mathrm{A} \subset \mathrm{A}'$. Donc $\mathrm{A} = \mathrm{A}'$: l'application Φ est injective.

($\Leftarrow$) Supposons que Φ soit injective. Soient $a, a' \in \mathrm{E}$ tels que $f(a) = f(a')$.

Si on pose $\mathrm{A} = \{a\}$ et $\mathrm{A}' = \{a'\}$, on a $f(\mathrm{A}) = \{f(a)\} = \{f(a')\} = f(\mathrm{A}')$, i.e. $\Phi(\mathrm{A}) = \Phi(\mathrm{A}')$. L'application Ψ étant injective, on a donc $\mathrm{A} = \mathrm{A}'$ et par suite $a = a'$: l'application f est injective.

(b) ($\Rightarrow$) Supposons que f soit surjective. On considère $\mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathrm{F})$. Tous les éléments de B ont un antécédent par f. Si on pose A l'ensemble des antécédents des éléments de B, on a $f(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$, i.e. $\Phi(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$: l'application Φ est surjective.

($\Leftarrow$) Supposons que Φ soit surjective. Soient $b \in \mathrm{F}$. On pose $\mathrm{B} = \{b\}$. On a $\mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathrm{F})$, donc il existe $\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$ tel que $\Phi(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$. Si $\mathrm{A} = \emptyset$, on a $\mathrm{B} = \emptyset$: c'est absurde ! Prenons donc $a \in \mathrm{A}$. Par définition, $f(a) \in \mathrm{B}$, i.e. $f(a) = b$: l'application f est surjective.

2 (a) ($\Rightarrow$) Supposons que f soit injective. Montrons que Ψ est surjective. Soit A une partie de E.

On considère $\mathrm{B} = f(\mathrm{A})$. Montrons que $\Psi(\mathrm{B}) = \mathrm{A}$, i.e. $f^{-1}(\mathrm{B}) = \mathrm{A}$.

$\boxed{f^{-1}(\mathrm{B}) \supset \mathrm{A}}$ Soit $a \in \mathrm{A}$. On a $f(a) \in \mathrm{B}$. Donc $a \in f^{-1}(\mathrm{B})$.

$\boxed{f^{-1}(\mathrm{B}) \subset \mathrm{A}}$ Soit $a \in f^{-1}(\mathrm{B})$. On a donc $f(a) \in \mathrm{B} = f(\mathrm{A})$. On en déduit qu'il existe $a' \in \mathrm{A}$ tel que $f(a) = f(a')$. Or f étant injective, $a = a' \in \mathrm{A}$.

($\Leftarrow$) Supposons que Ψ soit surjective. Soient $a, a' \in \mathrm{E}$ tels que $f(a) = f(a')$.

Posons $\mathrm{A} = \{a\}$. On sait que A a un antécédent par Ψ. Posons $\Psi(\mathrm{B}) = \mathrm{A}$, i.e. $f^{-1}(\mathrm{B}) = \mathrm{A}$.

On a donc $a \in f^{-1}(\mathrm{B})$, i.e. $f(a) \in \mathrm{B}$.

Or $f(a') = f(a) \in \mathrm{B}$ donc $a' \in f^{-1}(\mathrm{B}) = \mathrm{A}$, i.e. $a' = a$. : l'application f est injective.

(b) ($\Rightarrow$) Supposons que f soit surjective.

Soient $\mathrm{B},\mathrm{B}' \in \mathcal{P}(\mathrm{F})$ tels que $\Psi(\mathrm{B}) = \Psi(\mathrm{B}')$, i.e. $f^{-1}(\mathrm{B}) = f^{-1}(\mathrm{B}')$.

On considère un élément $b \in \mathrm{B}$. On a $b \in \mathrm{F}$, et f étant surjective, il existe $a \in \mathrm{E}$ tel que $b = f(a)$. On a $a \in f^{-1}(\mathrm{B}) = f^{-1}(\mathrm{B}')$. Par conséquent, $f(a) \in \mathrm{B}'$, i.e. $b \in \mathrm{B}'$. On a prouvé que $\mathrm{B} \subset \mathrm{B}'$.

De même $\mathrm{B}' \subset \mathrm{B}$. Finalement, $\mathrm{B} = \mathrm{B}'$ Conclusion, l'application Φ est injective.

($\Leftarrow$) Supposons que Φ soit injective. Montrons que f est surjective. Soit $b \in \mathrm{F}$.

On pose $\mathrm{B} = \{b\} \in \mathcal{P}(\mathrm{F})$, et on considère $\mathrm{A} = \Psi(\mathrm{B})$.

Si on avait $\mathrm{A} = \emptyset$, on aurait $\Psi(\mathrm{B}) = \Psi(\emptyset)$ et, Ψ étant injective, on conclurait $\mathrm{B} = \emptyset$: c'est absurde ! On en déduit que $\mathrm{A} \neq \emptyset$. Soit alors $a \in \mathrm{A}$. On a $a \in f^{-1}(\mathrm{B})$ donc $f(a) \in \mathrm{B}$, i.e. $f(a) = b$.

Conclusion, l'application f est surjective.

Exercice 9 : Soient $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{H}$ quatre ensembles, $f \in \mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, $g \in \mathcal{F}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$.

On considère l'application $\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathrm{F}, \mathrm{G}) & \longmapsto & \mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{H}) \\ u & & g \circ u \circ f \end{array}$.

Monter que si f est injective et g surjective, alors ϕ est surjective.

Correction : Soit $v \in \mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{H})$.

Considérons $x \in \mathrm{F}$.

- Si $x \notin \operatorname{Im} f$, on choisit un élément au hasard a de G et on pose $u(x) = a$.
- Si $x \in \operatorname{Im} f$, x admet un -et un seul- antécédent $x_0 \in \mathrm{E}$ par f. On a alors $v(x_0) \in \mathrm{H}$, et par surjectivité de g, il existe $y_0 \in \mathrm{G}$ tel que $g(y_0) = v(x_0)$. On pose alors $u(x) = y_0$.

  $x_0 \in \mathrm{E} \quad \underset{f}{\mapsto} \quad x \in \mathrm{F} \quad \underset{u}{\mapsto} \quad y_0 \in \mathrm{G} \quad \underset{g}{\mapsto} \quad v(x_0) \in \mathrm{H}.$

Posons maintenant $\alpha \in \mathrm{E}$. Montrons que $g \circ u \circ f(\alpha) = v(\alpha)$.

On peut poser $x = f(\alpha) \in \mathrm{G}$. Comme f est injective, x a un unique antécédent par f, et c'est α. Par définition de u, $u(x)$ est égal à un antécédent de $v(\alpha)$ par g.

D'où $g \circ u(x) = v(\alpha)$ et donc $g \circ u \circ f(\alpha) = v(\alpha)$.

On a bien $g \circ u \circ f = v$, d'où $\phi(u) = v$.

L'application ϕ est surjective.