Nom : ....   **Prénom :** ....

Sommes et Produits finis

1 Complétez sans le symbole Σ. On ne demande pas de calculer :

(a) $\displaystyle\sum_{p=2}^{2n} \sqrt{p} =$ ....

(b) $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \sqrt{2p} =$ ....

2 Calculer les sommes et les produits suivants :

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \frac{}{......................} =$ ....

(b) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k}\right) = \frac{}{.............} = \frac{}{..}$.

3 Soit $(a_i)_{m \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'éléments de E et soit $\ell \in \mathbb{Z}$.

Translation d'indice : $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{.......}^{....} a_{j-\ell}$.

Inversion de compteur : $\displaystyle\prod_{....}^{.} a_i = \prod_{j=m}^{n} a_{n+m-j}$.

4 Simplifier :

(a) $\displaystyle\sum_{k=6}^{95} \frac{1}{6^k} = \frac{}{...............} = \frac{}{..................}$.

(b) $\displaystyle\sum_{p=n}^{2n} p = \frac{}{...........} = \frac{}{........................} = \frac{}{...........}$.

5 Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, alors :

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \frac{}{.............................}.$$

6 Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q, alors :

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , & \text{si} \quad q = 1. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , & \text{si} \quad q \neq 1. \end{cases}$$

7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, a et b deux éléments d'un ensemble E commutatif.

$$a^n - b^n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .$$

8 Factoriser :

(a) $x^5 - 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .$

(b) $x^3 + 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .$

9 Soient $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une suite de nombres réels **strictement positifs** et $n \in \mathbb{N}$.

$$\ln\left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{et} \quad \exp\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) = \ldots\ldots\ldots .$$

10 Soients $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

On appelle (coefficient binomial) k parmi n, noté $\ldots\ldots\ldots$, le nombre :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots , \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots . \end{cases}$$

11 Soit $(k\,;n) \in \mathbb{N}^2$

(a) **Symétrie :** $\underset{\dots\dots\dots}{} = \dbinom{n}{n-k}$.

(b) **Formule du capitaine :** Pour $k \neq 0$ et $n \geqslant 1$, $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n}{k}\underset{\dots\dots\dots\dots\dots}{}$.

(c) **Formule de Pascal :** $\dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1} = \underset{\dots\dots\dots\dots\dots}{}$.

(d) **Intégralité :** $\dbinom{n}{k} \in \dots$.

12 Soient a et b deux éléments d'un anneau commutatif et n un entier naturel.

$$(a+b)^n = \underset{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{}$$

$$(a-b)^n = \underset{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{}$$

13 Développer :

(a) $(x+\sqrt{2})^4 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

(b) $(x-1)^5 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

14 Soient m, n, p, q des entiers et $(a_{i,j})_{(i;j)\in \mathrm{I}\times\mathrm{J}}$ une famille d'éléments de E indexée par le rectangle $[\![m\,;n]\!] \times [\![p\,;q]\!]$ ou par le triangle $\{\,(i\,;j) \in \mathrm{I}\times\mathrm{J} \,/\, m \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$.

$$\prod_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}} a_{ij} = \underset{\dots\dots\dots\dots\dots}{} = \underset{\dots\dots\dots\dots\dots}{} .$$

$$\sum_{m\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \underset{\dots\dots\dots\dots\dots}{} = \underset{\dots\dots\dots\dots\dots}{} .$$

$$\sum_{m\leqslant i< j\leqslant n} a_{ij} = \underset{\dots\dots\dots\dots\dots}{} = \underset{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{}$$

15 Soit $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille d'éléments de E.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

16 Simplifier au maximum :

a $\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

b $\dfrac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} = \ldots\ldots\ldots$

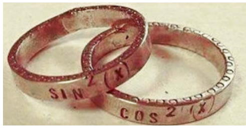
c $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

d $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,\, j\leqslant n} i^j = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$



Alliances pour matheux