Sommes et Produits finis

1 Complétez sans le symbole Σ. On ne demande pas de calculer :

ⓐ $\displaystyle\sum_{p=2}^{2n} \sqrt{p} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \ldots + \sqrt{2n-1} + \sqrt{2n}.$

ⓑ $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \sqrt{2p} = \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{6} + \ldots + \sqrt{2n-2} + \sqrt{2n}.$

2 Calculer les sommes et les produits suivants :

ⓐ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sum_{k=0}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) = \sqrt{n+1}.$

ⓑ $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\right) = \frac{1}{n}.$

3 Soit $(a_i)_{m\leqslant i\leqslant n}$ une famille d'éléments de E et soit $\ell \in \mathbb{Z}$.

Translation d'indice : $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m+\ell}^{n+\ell} a_{j-\ell}.$

Inversion de compteur : $\displaystyle\prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{j=m}^{n} a_{n+m-j}.$

4 Simplifier :

ⓐ $\displaystyle\sum_{k=6}^{95} \frac{1}{6^k} = \frac{1}{6^6}\,\frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^{90}}{1-\frac{1}{6}} = \frac{5}{6^5}\left(1-\left(\frac{1}{6}\right)^{90}\right).$

ⓑ $\displaystyle\sum_{p=n}^{2n} p = \sum_{p=0}^{n}(p+n) = \frac{n(n+1)}{2} + n(n+1) = \frac{3}{2}n(n+1).$

5 Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, alors :

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \overbrace{\frac{u_m+u_n}{2}}^{\text{Moyenne des extrêmes}} \times \overbrace{(n-m+1)}^{\text{Nombre de termes}}.$$

6 Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q, alors :

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \begin{cases} \underbrace{u_m}_{\text{Premier terme}} \times \overbrace{(n-m+1)}^{\text{Nombre de termes}}, & \text{si} \quad q=1. \\ \underbrace{u_m}_{\text{Premier terme}} \times \dfrac{1-q^{\overbrace{n-m+1}^{\text{Nombre de termes}}}}{1-q}, & \text{si} \quad q\neq 1. \end{cases}$$

7 Soit $n\in\mathbb{N}^*$, a et b deux éléments d'un ensemble E commutatif.

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k.$$

8 Factoriser :

(a) $x^5 - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$.

(b) $x^3 + 1 = (x+1)(x^2-x+1)$.

9 Soient $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une suite de nombres réels **strictement positifs** et $n\in\mathbb{N}$.

$$\ln\left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \ln(a_k) \quad \text{et} \quad \exp\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) = \prod_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{a_k}.$$

10 Soient $n\in\mathbb{N}$ et $k\in\mathbb{Z}$.

On appelle (coefficient binomial) k parmi n, noté $\binom{n}{k}$, le nombre :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si} \quad 0\leqslant k\leqslant n, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

11 Soit $(k\,;n) \in \mathbb{N}^2$

(a) **Symétrie :** $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$.

(b) **Formule du capitaine :** Pour $k \neq 0$ et $n \geqslant 1$, $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n}{k}\dbinom{n-1}{k-1}$.

(c) **Formule de Pascal :** $\dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1} = \dbinom{n+1}{k+1}$.

(d) **Intégralité :** $\dbinom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

12 Soient a et b deux éléments d'un anneau commutatif et n un entier naturel.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, a^k\, b^{n-k}$$
$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, (-1)^{n-k} a^k\, b^{n-k}.$$

13 Développer :

(a) $(x+\sqrt{2})^4 = x^4 + 4x^3\sqrt{2} + 12x^2 + 8x\sqrt{2} + 4$.

(b) $(x-1)^5 = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$.

14 Soient m, n, p, q des entiers et $(a_{i,j})_{(i;j)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}}$ une famille d'éléments de E indexée par le rectangle $[\![m\,;n]\!] \times [\![p\,;q]\!]$ ou par le triangle $\{\,(i\,;j) \in \mathrm{I}\times\mathrm{J} \,/\, m \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$.

$$\prod_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}} a_{ij} = \prod_{i=m}^{n}\prod_{j=p}^{q} a_{ij} = \prod_{j=p}^{q}\prod_{i=m}^{n} a_{ij}.$$
$$\sum_{m\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=m}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=m}^{n}\sum_{i=m}^{j} a_{ij}.$$
$$\sum_{m\leqslant i< j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=m}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=m+1}^{n}\sum_{i=m}^{j-1} a_{ij}.$$

15 Soit $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille d'éléments de E.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j.$$

16 Simplifier au maximum :

(a) $\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!} = 2n(2n+1).$

(b) $\dfrac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} = \dfrac{3\times 8}{7\times 13}.$

(c)
$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij &= \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} ij\right) = \sum_{j=2}^{n}\left(j\sum_{i=1}^{j-1} i\right) = \sum_{j=2}^{n} j\times\frac{j(j-1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}(j^3-j^2)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j^3-j^2) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\
&= \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}.
\end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned}
\prod_{1\leqslant i,\, j\leqslant n} i^j &= \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} i^j = \prod_{i=1}^{n} i^{\frac{n(n+1)}{2}}\\
&= \left(\prod_{i=1}^{n} i\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = (n!)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\sqrt{n!}\right)^{n(n+1)}.
\end{aligned}$$

Alliances pour matheux