Fonctions circulaires

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Avril 2024

Sommaire I

Dans les chapitres précédents, nous avons déjà (re)défini les fonctions dites de référence ainsi que l'exponentielle. Si ces fonctions sont importantes, il en manque et c'est le thème de ce chapitre qui aborde la trigonométrie et les fonctions dite circulaires ainsi que leur réciproque.

La définition (1) , tout en étant correcte, est insuffisante par bien des aspects. Une autre approche eût été de voir ce chapitre comme un hommage à la fonction exponentielle, complexe s'entend. Fonction exponentielle dont la définition analytique comme la somme d'une série entière normalement convergente nous échappe encore :

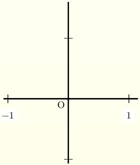
$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ \ \mathrm{e}^{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Ainsi dotés, nous aurions pu voir :

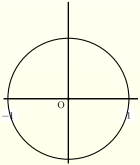
- La fonction *logarithme* comme sa bijection réciproque et ...réciproquement. Déjà fait !
- Les fonctions *hyperboliques* comme ses parties paire et impaire. Aussi !
- les fonctions *circulaires* comme ses parties réelle et imaginaire. Bientôt mais pas encore !

I. Le cercle trigonométrique

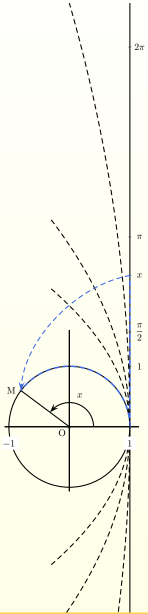
Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.



Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$. Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens direct.

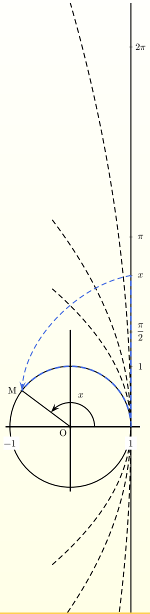


En « enroulant » l'axe des réels autour du cercle trigonométrique, on constate qu'à tout réel x est associé un et un seul point M du cercle trigonométrique.



Réciproquement, tout point du cercle trigonométrique est associé à une infinité de réels.

Plus précisément, si le point M du cercle trigonométrique est associé à un certain réel x_0, alors les réels associés au point M sont les réels de la forme $x_1 = x_0 + 2k\pi$ où k est un entier relatif.



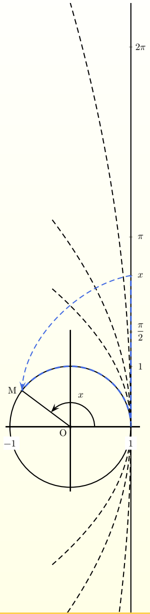
Réciproquement, tout point du cercle trigonométrique est associé à une infinité de réels.

Plus précisément, si le point M du cercle trigonométrique est associé à un certain réel x_0, alors les réels associés au point M sont les réels de la forme $x_1 = x_0 + 2k\pi$ où k est un entier relatif.

On dit alors que « *x_0 et x_1 sont égaux modulo 2π* » et on note :

$$x_0 \equiv x_1 \ [2\pi] \,.$$

La relation d'égalité modulo 2π est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

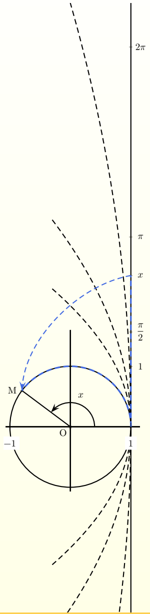


Si M est un point du cercle trigonométrique, tout réel x associé à M par ce procédé est, par définition, une mesure en radian de l'angle orienté $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$.

L'ensemble des mesures en radian de l'angle orienté $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ est donc l'ensemble des réels de la forme $x_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, l'ensemble des réels égaux à x_0 modulo 2π.

On parlera plutôt de *classe d'équivalence* de $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ dont x_0 est un *représentant*.

Lorsque $x_0 \in \,]-\pi\,;\pi]$, on parlera alors de *mesure principale* de l'angle.



Exemples 1 :

- 1 radian correspond à l'angle donné par le point du cercle formant un arc de longueur 1.
- Par définition, 2π radian correspond donc à l'angle donné par le point du cercle formant un arc de longueur 2π : le périmètre du cercle !
- La mesure d'un angle orienté en radians est proportionnelle à sa mesure en degrés :

degrés	0	30	45	60	90	180	$x = \dfrac{180}{\pi} \times y$
radians	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$y = \dfrac{\pi}{180} \times x$

- $1\,\text{rad} \simeq 57,3^\circ$ et $1^\circ \simeq 0,0175\,\text{rad}$.

Exercice 1 :

Donner la mesure qui appartient à l'intervalle $[0\,;2\pi[$ puis la mesure principale de l'angle dont une mesure vaut :

1. $-\dfrac{9\pi}{10}$
2. $\dfrac{95\pi}{7}$
3. $\dfrac{148\pi}{3}$
4. $3,15$

I. Le cercle trigonométrique

1. Enroulement de l'axe réel sur le cercle trigonométrique

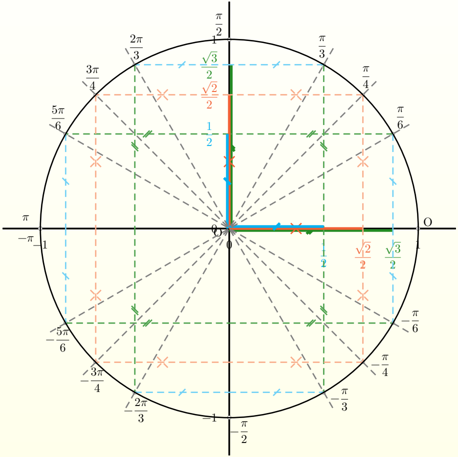


Figure 1 – Angles remarquables.

On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ et on note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique, c'est à dire le cercle de centre O et de rayon 1.

Définition 1 :

Pour tout nombre réel x, il existe un unique point M du cercle trigonométrique tel que l'angle orienté $\left(\vec{i}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ ait pour mesure x radians.

- On appelle *cosinus de* x, noté $\cos(x)$, l'abscisse de M.
- On appelle *sinus de* x, noté $\sin(x)$, l'ordonnée de M.

L'abscisse de M est notée $\cos(x)$ et son ordonnée $\sin(x)$, on les appelle le cosinus et le sinus du nombre réel x.

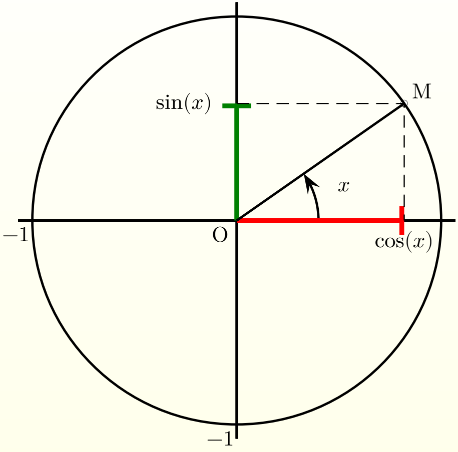
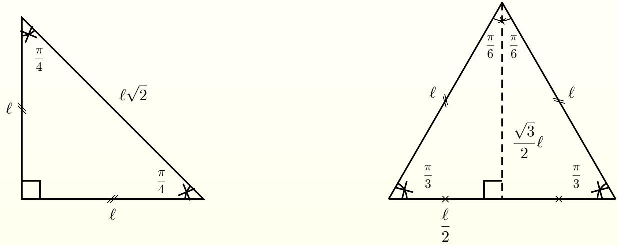


Figure 2 – Pour tout nombre réel x, il existe un unique point M du cercle trigonométrique tel que l'angle orienté $\left(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ ait pour mesure x radians.



Triangle rectangle isocèle **Triangle équilatéral**

Figure 3 – Relations entre angles et longueurs dans des triangles particuliers.

Radian	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π
cos	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0	-1
sin	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Remarque : La ligne des sinus s'écrit $\dfrac{\sqrt{0}}{2}, \dfrac{\sqrt{1}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\sqrt{4}}{2}$.

Figure 4 – Cosinus et sinus d'angles remarquables.

Exercice 2 :

Calculer :

1. $\cos(3\pi)$
2. $\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)$
3. $\cos\left(\dfrac{64\pi}{2}\right)$

Théorème 1 :

Soit x un réel.

- $$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$
- $$-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \iff |\cos(x)| \leqslant 1.$$
  $$-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \iff |\sin(x)| \leqslant 1.$$
- Pour tout $x \in [0\,;2\pi]$,
  - $\cos(x) \geqslant 0 \iff -\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.
  - $\sin(x) \geqslant 0 \iff 0 \leqslant x \leqslant \pi$.
- $$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$

Théorème 1 :

Soit x un réel.

- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$
- $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \iff |\cos(x)| \leqslant 1.$
  $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \iff |\sin(x)| \leqslant 1.$
- Pour tout $x \in [0\,;2\pi]$,
  - $\cos(x) \geqslant 0 \iff -\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}.$
  - $\sin(x) \geqslant 0 \iff 0 \leqslant x \leqslant \pi.$
- $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x).$

Exercice 3 :

À quelle condition peut-on écrire $\sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}$?

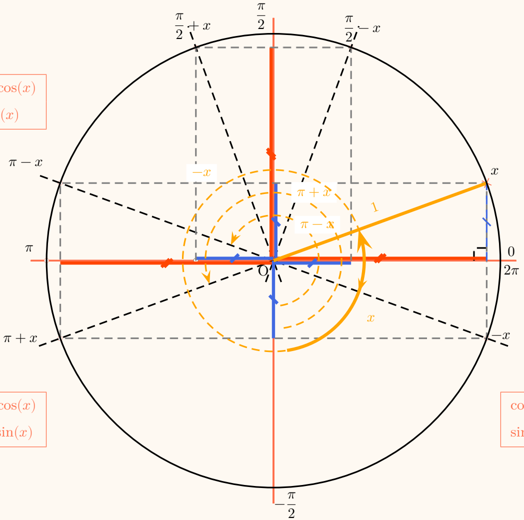
Proposition 2 (Trigonométrie et Transformations du plan) :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x)$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$
$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$



$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

Corollaire 2.1 :

Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$:

$$\cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin(x).$$

En particulier, $\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad \cos(k\pi) = (-1)^k \quad$ et $\quad \sin(k\pi) = 0$.

Exercice 4 :

Simplifier

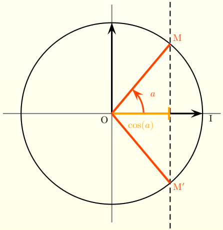
$$-\cos(\pi - x) + 2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 7\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\sin(x + 3\pi) + 3\sin(-x).$$

Théorème 3 (Résolution d'équations trigonométriques élémentaires) :

Soient a et b deux réels.

$$\cos(a) = \cos(b) \iff a \equiv b \ [2\pi] \quad \text{ou} \quad a \equiv -b \ [2\pi]$$
$$\sin(a) = \sin(b) \iff a \equiv b \ [2\pi] \quad \text{ou} \quad a \equiv \pi - b \ [2\pi]$$

$$\big(\cos(a) = \cos(b) \text{ et } \sin(a) = \sin(b)\big) \iff a \equiv b \ [2\pi].$$



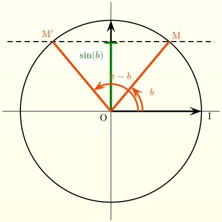


Figure 5 – Équations trigonométriques.

Exercice 5 :

Sur un cercle trigonométrique, représenter les ensembles suivants :

1. $\cos(x) \quad \text{sur} \left[\dfrac{\pi}{6}\ ;\ \dfrac{2\pi}{3}\right]$
2. $\sin(x) \quad \text{sur} \left[\dfrac{2\pi}{3}\ ;\ \dfrac{7\pi}{3}\right]$

Exercice 5 :

Sur un cercle trigonométrique, représenter les ensembles suivants :

1. $\cos(x)$ sur $\left[\dfrac{\pi}{6}\ ;\ \dfrac{2\pi}{3}\right]$
2. $\sin(x)$ sur $\left[\dfrac{2\pi}{3}\ ;\ \dfrac{7\pi}{3}\right]$

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et placer les solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\sin(3x) = \cos(2x)$
3. $\sin(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

II. Trigonométrie

II. Trigonométrie

Littéralement, « trigonométrie » signifie « mesure des trois angles », donc se rapporte aux propriétés des angles d'un triangle. On fait donc ainsi référence aux interprétations géométriques usuelles des fonctions trigonométriques.

$$\sin(x) = \frac{\text{Opposé}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{\text{HM}}{\text{OM}}.$$

$$\cos(x) = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{\text{OH}}{\text{OM}}.$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}} = \frac{\text{HM}}{\text{OH}}.$$

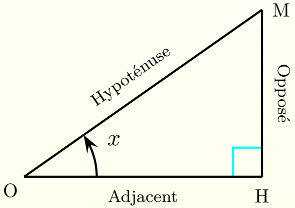


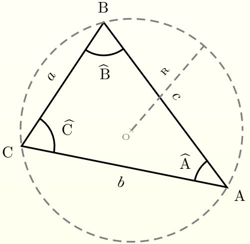
Figure 6 – Trigonométrie dans un triangle.

II. Trigonométrie

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{\mathrm{C}}.$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{\mathrm{B}}.$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{\mathrm{A}}.$$



$$\frac{\sin\widehat{\mathrm{A}}}{a} = \frac{\sin\widehat{\mathrm{B}}}{b} = \frac{\sin\widehat{\mathrm{C}}}{c} = \frac{1}{2\mathrm{R}} = \frac{2\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}}}{abc}.$$

Avec $p = \dfrac{1}{2}(a+b+c)$, on a $\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Figure 7 – Théorème d'Al-Kashi, relation des sinus et formule de Héron d'Alexandrie.

Proposition 4 (Formule d'addition) :

Pour tous réels a et b, on a :

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

II. Trigonométrie

1. Formules de duplication

Proposition 4 (Formule d'addition) :

Pour tous réels a et b, on a :

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$.

Proposition 4 (Formule d'addition) :

Pour tous réels a et b, on a :

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$.

En prenant $a = b$ dans les expressions de la proposition (4) , on obtient aussi :

Proposition 5 (Formule de duplication) :

Pour tout réel a, on a :

- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.
- $$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a)\\ &= 2\cos^2(a) - 1\\ &= 1 - 2\sin^2(a).\end{aligned}$$

Exercice 7 :

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ |\sin(nx)| \leqslant n\,|\sin(x)|$.

La deuxième assertions de la proposition (5) permet d'obtenir une première linéarisation pour les expressions de degré 2 :

Proposition 6 (Formule de linéarisation dite de Carnot) :

Soit $a \in \mathbb{R}$:

- $\cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$
- $\sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$.

Proposition 6 (Formule de linéarisation dite de Carnot) :

Soit $a \in \mathbb{R}$:

- $\cos^2(a) = \dfrac{1 + \cos(2a)}{2}$
- $\sin^2(a) = \dfrac{1 - \cos(2a)}{2}$.

En retournant les formules de la proposition (4) , on obtient des formules de développement de produit du premier ordre :

Proposition 7 :

Soient a et b deux réels :

- $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\big[\cos(a-b) + \cos(a+b)\big]$.
- $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}\big[\cos(a-b) - \cos(a+b)\big]$.
- $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\big[\sin(a+b) + \sin(a-b)\big]$.

Exercice 8 :

1. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
2. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.
3. Montrer que $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$.

Pour chaque réel x, on peut calculer les réels $\cos(x)$ et $\sin(x)$. On définit ainsi sur $\mathbb{R}$ deux nouvelles fonctions.

Définition 2 :

La fonction *cosinus* (resp. *sinus*) est la fonction qui à tout réel associe son cosinus (resp. son sinus).

$$\cos : x \longmapsto \cos(x) \qquad \sin : x \longmapsto \sin(x).$$

Pour chaque réel x, on peut calculer les réels $\cos(x)$ et $\sin(x)$. On définit ainsi sur $\mathbb{R}$ deux nouvelles fonctions.

Définition 2 :

La fonction *cosinus* (resp. *sinus*) est la fonction qui à tout réel associe son cosinus (resp. son sinus).

$$\cos\ : x \longmapsto \cos(x) \qquad\qquad \sin\ : x \longmapsto \sin(x).$$

Remarque : Les fonctions cos et sin portent le nom de « circulaires » car on peut paramétrer le cercle unité d'équation $x^2 + y^2 = 1$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \cos(t) \\ y & = & \sin(t) \end{array}\right. ,\ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Proposition 8 (Cosinus et Sinus) :

- Les fonctions *cos* et sin sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1\,;1]$.
- La fonction cos est *paire*. La fonction sin est *impaire*.

Définition 3 (Fonction périodique) :

On dit d'une fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ qu'elle est *périodique de période* T ou T-*périodique* s'il existe un réel $\mathrm{T} > 0$ tel que :

$$\forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ x + \mathrm{T} \in \mathcal{D}_f, \quad \text{et} \quad f(x+\mathrm{T}) = f(x). \tag{1}$$

Corollaire 8.1 :

Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π.

Remarque : Un élève attentif aura remarqué que l'on a simplement montré que les fonctions circulaires admettaient 2π comme période et non que celle-ci était la plus petite des périodes.

C'est le cas mais la démonstration de cette propriétés nous échappe encore et nécessite une définition plus rigoureuse du nombre π lui-même.

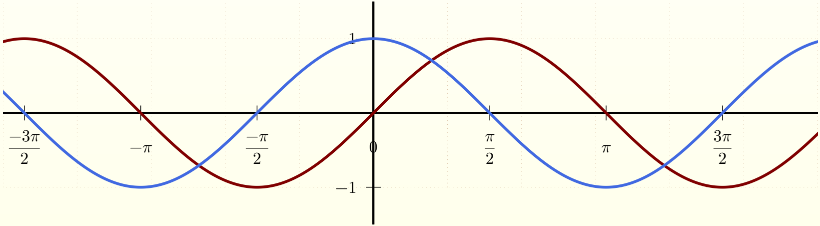


Figure 8 – $x \longmapsto \cos(x)$ et $x \longmapsto \sin(x)$ sont 2π-périodiques.

Exercice 9 :

Vérifier que la fonction $f : x \longmapsto \sin(6x-3)$ est $\dfrac{\pi}{3}$-périodique.

Exercice 10 :

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$ vérifiant $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 3$ et $f(x+1) = \dfrac{f(x)-5}{f(x)-3}$.

Montrer que f est périodique de période 4.

Proposition 9 (Interprétation graphique) :

Une fonction f est T-périodique si, et seulement si sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est invariante par translation de vecteur $\mathrm{T}\vec{\imath}$.

Méthode 1 :

[Restriction du domaine d'étude] Si la fonction est T-périodique, on restreint son étude à un segment de longueur T et on complète la courbe par translations de vecteur $T\vec{\imath}$.

Exercice 11 :

Proposer un domaine d'étude minimal pour $f : x \longmapsto \left(\sin\left(\frac{1}{3}x\right) - \sin\left(\frac{1}{5}x\right)\right)^2$.

Proposition 10 (Opérations sur les fonctions périodiques) :

Soient $\mathrm{T} \in \mathbb{R}_+^*$, $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions T-périodiques.

- Les fonctions $f+g$, $f \times g$ sont aussi T-périodiques, ainsi que $\dfrac{f}{g}$ si g ne s'annule pas.
- Pour tout $a > 0$, $\forall\, b \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto f(ax+b)$ est $\dfrac{\mathrm{T}}{a}$-périodique.

Exemple 2 :

La fonction $x \longmapsto \cos(5x)$ est $\dfrac{2\pi}{5}$-périodique et un domaine d'étude sera $\left[0\,;\dfrac{\pi}{5}\right]$ par périodicité et parité.

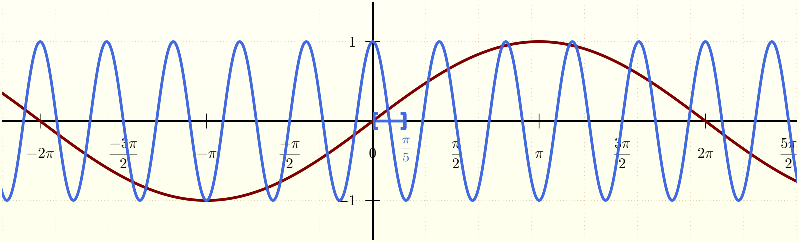


Figure 9 – $x \longmapsto \cos 5x$ et $x \longmapsto \sin \frac{x}{2}$.
En physique, on parle de dilatation temporelle.

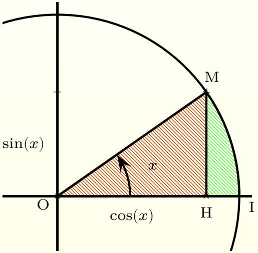
Théorème ll (Continuité) :

Les fonctions cosinus et sinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

Théorème II (Continuité) :

Les fonctions cosinus et sinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

Preuve :



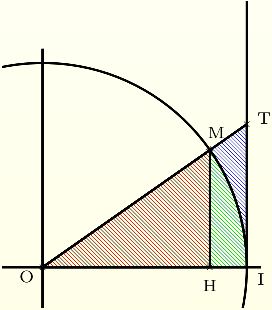
Théorème 12 (Nombres dérivés en 0) :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=0.$$

Théorème 12 (Nombres dérivés en 0) :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0.$$

Preuve :



Théorème 12 (Nombres dérivés en 0) :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0.$$

Les physiciens ont l'habitude d'utiliser le résultat $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ sous la forme :

« pour les petites valeurs de x, $\sin(x) \simeq x$ ».

C'est en particulier ce qu'ils font quand ils analysent le mouvement du pendule simple.

Le théorème (12) permet surtout d'affirmer que les fonctions sin et cos sont dérivables en 0.

En effet, les taux d'accroissement en 0 de ces fonctions s'écrivent :

$$\frac{\sin(0+x)-\sin(0)}{x} = \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{et} \quad \frac{\cos(0+x)-\cos(0)}{x} = \frac{\cos(x)-1}{x}.$$

D'où, $\boxed{(\sin)'(0) = 1}$ et $\boxed{(\cos)'(0) = 0}$.

Exercice 12 :

1. Montrer que $\dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ puis $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{x}$.

Théorème 13 (Dérivabilité) :

Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$\cos'(x) = -\sin(x) \qquad \text{et} \qquad \sin'(x) = \cos(x).$$

Théorème 13 (Dérivabilité) :

Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$\cos'(x) = -\sin(x) \qquad \text{et} \qquad \sin'(x) = \cos(x).$$

Corollaire 13.1 (Fonctions composées) :

Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Alors, les fonctions $\cos u$ et $\sin u$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\Big(\cos\left(u(x)\right)\Big)' = -u'(x) \times \sin\left(u(x)\right) \quad \text{et} \quad \Big(\sin\left(u(x)\right)\Big)' = u'(x) \times \cos\left(u(x)\right).$$

Exercice 13 :

Déterminer le domaine de dérivabilité $\mathcal{D}_f$ et calculer la fonction dérivée de $f : x \longmapsto \dfrac{\cos(x)+2}{\sin^2(x)+2}$.

Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques donc il suffit de les étudier sur un intervalle de longueur 2π et de compléter la courbe par translation de vecteur $2\pi\vec{\imath}$.

On considère alors l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

De plus, ces mêmes fonctions sont, respectivement, paire et impaire. L'étude sur la moitié de l'intervalle précédent suffit donc à connaître la courbe que l'on complètera alors par symétrie axiale ou centrale, respectivement.

On va donc étudier donc les fonctions cosinus et sinus sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.

Théorème 14 :

- La fonction cosinus est décroissante sur $[0\,;\pi]$.
- La fonction sinus est croissante sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ puis décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.

Théorème 14 :

- La fonction cosinus est décroissante sur $[0\,;\pi]$.
- La fonction sinus est croissante sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ puis décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$-\sin(x)$		$+$	0	$-$	
$\cos$	-1	0	1	0	-1

x	$-\dfrac{\pi}{2}$	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$
$\cos(x)$		$+$	0	$-$	
$\sin$	-1	0	1	0	-1

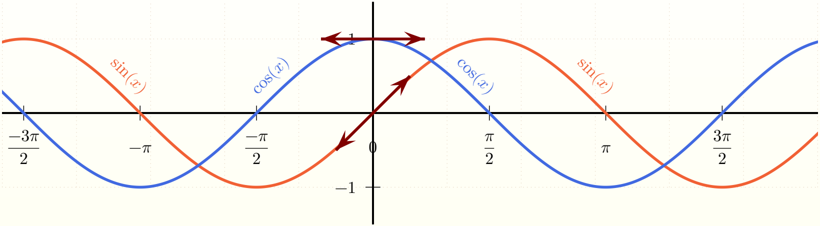


Figure 10 – Courbes représentatives des fonctions $x \longmapsto \cos(x)$ et $x \longmapsto \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$

En remarquant que $\sin(x) = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$, la courbe de sin est obtenue à partir de celle de cos par une translation de vecteur $\dfrac{\pi}{2}\vec{\imath}$.

En physique, on dira que sin est déphasée de $\dfrac{\pi}{2}$ par rapport à cos.

Définition 4 :

Les représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus sont appelées *sinusoïdes.*

Exercice 14 :

Étudier la fonction $f : x \longmapsto \sin^2(x) + \cos(x)$ et préciser les intersections de sa courbe représentatif avec l'axe des abscisses.

IV. Fonctions circulaires réciproques

Cosinus : La fonction $\cos : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ n'est pas bijective.
Par contre, la restriction de la fonction cos à $[0\,;\pi]$ corestreinte à $[-1\,;1]$ est continue et strictement croissante donc bijective.

$$\cos_{|[0;\pi]}^{|[-1;1]} : \begin{array}{ccc} [0\,;\pi] & \longmapsto & [-1\,;1] \\ x & & \cos(x) \end{array}$$

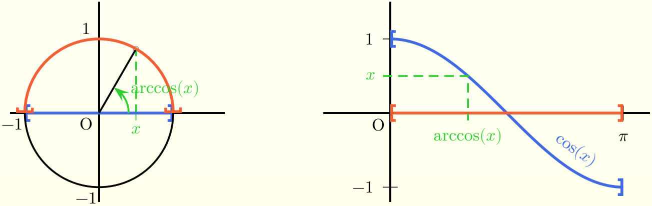


Figure 11 – La fonction cos est continue strictement décroissante de $[0\,;\pi]$ sur $[-1\,;1]$. Elle y réalise donc une bijection.

Sinus : La fonction $\sin : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ n'est pas non plus bijective.
Par contre, la restriction de la fonction sin à $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ corestreinte à $[-1\,;1]$ est continue et strictement croissante donc bijective.

$$\sin_{|\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}^{|[-1;1]} : \quad \begin{array}{ccc} \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right] & \longmapsto & [-1\,;1] \\ x & & \sin(x) \end{array}$$

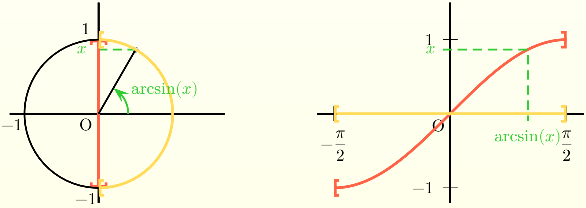


Figure 12 – La fonction sin est continue strictement croissante de $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[-$
réalise donc une bijection.

Définition 5 (Arccosinus et Arcsinus) :

On appelle :

- fonction *arccosinus*, notée arccos, la bijection réciproque de la fonction $\cos_{|[0;\pi]}$ corestreinte à $[-1\,;1]$.
- fonction *arcsinus*, notée arcsin, la bijection réciproque de la fonction $\sin_{|[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]}$ corestreinte à $[-1\,;1]$.

Pour x dans $[-1\,;1]$, $\arccos(x)$ est l'angle de $[0\,;\pi]$ dont le cosinus vaut x. Même chose pour $\arcsin(x)$ avec le sinus dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Corollaire 14.1 (Formule de réciprocité) :

Les fonctions arccos et arcsin sont définies sur $[-1\,;1]$ et on a :

- $\forall\, x \in [-1\,;1]$, $\cos\big(\arccos(x)\big) = x$.
- $\forall\, x \in [0\,;\pi]$, $\arccos\big(\cos(x)\big) = x$.
- $\forall\, x \in [-1\,;1]$, $\sin\big(\arcsin(x)\big) = x$.
- $\forall\, x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin\big(\sin(x)\big) = x$.

Exemples 3 (Arccosinus) :

- $\arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}$.
- $\cos\left(\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
- $\arccos\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right) = \arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$.

Mais **ATTENTION** $\arccos\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right) = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6} \neq -\dfrac{\pi}{6}$.

Exemples 4 (Arcsinus) :

- $\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ et $\arcsin(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$.
- $\sin\left(\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
- $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right) = \arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$.

Mais **ATTENTION** $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right) = \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4} \neq \dfrac{3\pi}{4}$.

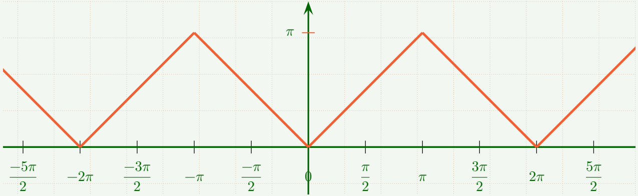
Exercice 15 :

Étudier la parité et la périodicité puis tracer la courbe de la fonction $x \longmapsto \arccos(\cos(x))$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15 :

Étudier la parité et la périodicité puis tracer la courbe de la fonction $x \longmapsto \arccos(\cos(x))$ sur $\mathbb{R}$.

Correction :



Proposition 15 :

- Les fonctions arccos et arcsin sont continues sur $[-1\,;1]$ et dérivables sur $]-1\,;1[$ et on a :

$$\forall\, x \in\,]-1\,;1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos'(x).$$

  En particulier,
  - la fonction arccos est strictement décroissante sur $[-1\,;1]$.
  - la fonction arcsin est strictement croissante sur $[-1\,;1]$.

- La fonction arcsin est impaire.

Remarques :

- La courbe de $\arcsin$ est donc symétrique par rapport à l'origine et on pourrait montrer, si c'était au programme, que le courbe de $\arccos$ admet le point $\left(0\,;\dfrac{\pi}{2}\right)$ comme centre de symétrie.

Remarques :

- La courbe de arcsin est donc symétrique par rapport à l'origine et on pourrait montrer, si c'était au programme, que le courbe de arccos admet le point $\left(0\,;\dfrac{\pi}{2}\right)$ comme centre de symétrie.
- En particulier, les courbes représentatives des fonctions arccos et arcsin admettent, respectivement, comme tangentes à l'origine les droites d'équation :

$$(\mathrm{T}_{\arccos}) : \; y = \frac{\pi}{2} - x \quad \text{et} \quad (\mathrm{T}_{\arcsin}) : \; y = x.$$

Remarques :

- La courbe de $\arcsin$ est donc symétrique par rapport à l'origine et on pourrait montrer, si c'était au programme, que le courbe de $\arccos$ admet le point $\left(0\,;\dfrac{\pi}{2}\right)$ comme centre de symétrie.
- En particulier, les courbes représentatives des fonctions $\arccos$ et $\arcsin$ admettent, respectivement, comme tangentes à l'origine les droites d'équation :

$$(\mathrm{T}_{\arccos}) :\ y = \frac{\pi}{2} - x \quad \text{et} \quad (\mathrm{T}_{\arcsin}) :\ y = x.$$

- Les fonctions $\arccos$ et $\arcsin$ ne sont pas donc pas dérivables en 1 et -1 mais leur courbe représentative y admet deux demi-tangentes verticales.

Remarques :

- La courbe de arcsin est donc symétrique par rapport à l'origine et on pourrait montrer, si c'était au programme, que le courbe de arccos admet le point $\left(0\,;\dfrac{\pi}{2}\right)$ comme centre de symétrie.
- En particulier, les courbes représentatives des fonctions arccos et arcsin admettent, respectivement, comme tangentes à l'origine les droites d'équation :

$$(\mathrm{T}_{\text{arccos}}) : \; y = \frac{\pi}{2} - x \quad \text{et} \quad (\mathrm{T}_{\text{arcsin}}) : \; y = x.$$

- Les fonctions arccos et arcsin ne sont pas donc pas dérivables en 1 et -1 mais leur courbe représentative y admet deux demi-tangentes verticales.
- Dans la pratique, on préfère arcsin qui est impaire, nulle en 0, ... à arccos. Par exemple, on dira souvent qu'une primitive de $x \longmapsto \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ est $x \longmapsto -\arcsin(x) + \mathrm{K}$ où $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$.

Exercice 16 :

Montrer que, $\forall\, x \in [-1\,;1]$, $\arcsin(x) + \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

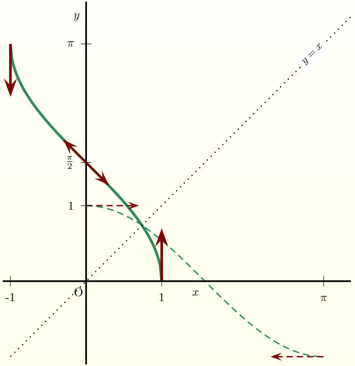
Corollaire 15.1 :

Pour toute fonction u dérivable sur un intervalle I à valeurs dans $]-1\,;1[$, $\arccos(u)$ et $\arcsin(u)$ sont dérivables sur I et on a :

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad \Big(\arcsin(u)\Big)'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} = -\Big(\arccos(u)\Big)'(x).$$

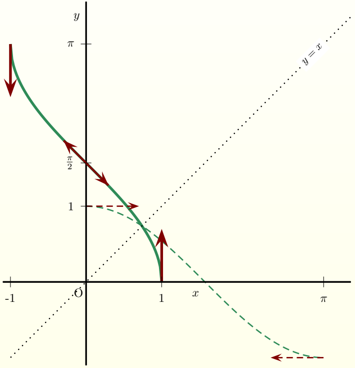
x	-1	0	1
arccos	π	$\frac{\pi}{2}$	0

x	-1	0	1
arccos	π	$\frac{\pi}{2}$	0



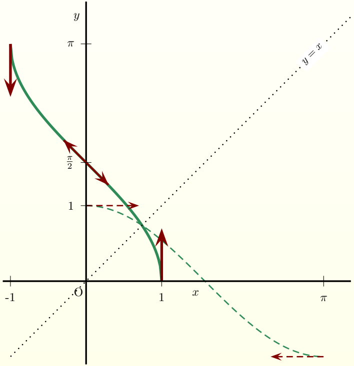
x	-1	0	1
arccos	π	$\frac{\pi}{2}$	0

x	-1	0	1
arcsin	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$



x	-1	0	1
arccos	π	$\frac{\pi}{2}$	0

x	-1	0	1
arcsin	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$



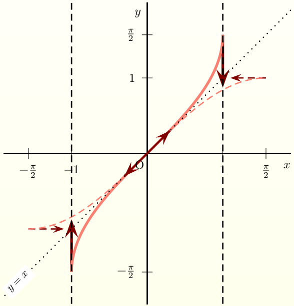
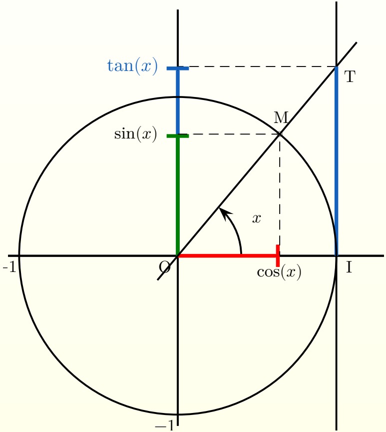


Figure 13 – Tableaux de variation et courbes représentatives de $x \longmapsto \arccos(x)$ et $x \longmapsto \arcsin(x)$ sur $[-1\,;1]$. En dash, les courbes de cos et sin.

V. Fonctions tangentes et réciproques



Lorsque $x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$, on note T l'intersection de (OM) avec la tangente au cercle en $\mathrm{I}(1,0)$.

L'ordonnée de T est appelée **tangente de** x, notée $\tan(x)$.

En considérant des longueurs algébriques, d'après le théorème de Thalès appliqué au triangle OIT, on a :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Figure 14 – $\tan(x)$ pour $x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

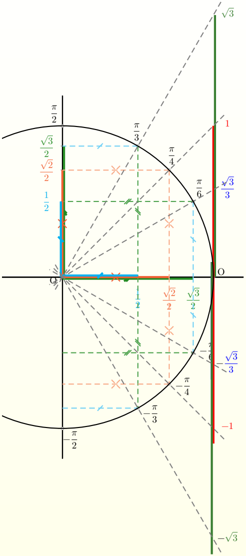
Pour tout x réel, $\cos(x) \neq 0 \iff x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Pour tout x réel, $\cos(x) \neq 0 \iff x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Définition 6 (Tangente) :

On appelle fonction *tangente*, notée tan, la fonction définie par :

$$\forall\, x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\frac{\pi}{2} + k\pi\right[,\ \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$



Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0

Figure 15 – Tangente d'angles remarquables.

Proposition 16 (Domaine d'étude) :

- La fonction tan est impaire.
- La fonction tan est π-périodique.
- La fonction tan est continue et dérivable sur tout intervalle de la forme $\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ où $k\in\mathbb{Z}$ et on a :

$$\forall\, x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[,\ \tan'(x) = 1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

En particulier, la fonction tan est strictement croissante sur tout intervalle de la forme $\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$, $k\in\mathbb{Z}$.

Proposition 16 (Domaine d'étude) :

- La fonction tan est impaire.
- La fonction tan est π-périodique.
- La fonction tan est continue et dérivable sur tout intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ où $k\in\mathbb{Z}$ et on a :

$$\forall\, x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[,\ \tan'(x)=1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}.$$

En particulier, la fonction tan est strictement croissante sur tout intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$, $k\in\mathbb{Z}$.

On étudiera donc la fonction tan sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et on complètera la courbe représentative par symétrie centrale puis translations de vecteur $\pi\vec{\imath}$.

Comme $\tan'(0) = 0$, la courbe représentative de tan admet comme tangente à l'origine la droite d'équation :

$$(\mathrm{T}_{\tan}) : \ y = x.$$

Posons φ définie sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $\varphi(x) = \tan(x) - x$.

Comme somme de fonctions dérivables, φ est dérivable sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et on a :

$$\varphi'(x) = \tan^2(x) \geqslant 0.$$

La fonction φ est donc strictement croissante sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$. Comme $\varphi(0) = 0$, elle y est donc positive.

On en déduit que la courbe représentative de tan est au-dessus de sa tangente sur l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Remarques : Par symétrie de centre O, on en déduit aussi que la courbe traverse sa tangente en 0 *i.e.* la courbe admet un *point d'inflexion* en 0.

Proposition 17 (Trigonométrie et Transformations du plan) :

Soit $x \in \mathcal{D}_{tan}$.

Suivant les conditions d'existence, on a :

$$\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[,\ \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

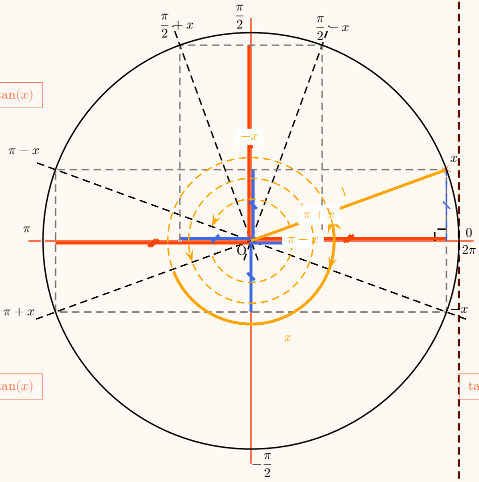
Proposition 17 (Trigonométrie et Transformations du plan) :

Soit $x \in \mathcal{D}_{tan}$.

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\frac{1}{\tan(x)}$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$

$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$



$\tan(\pi + x) = \tan(x)$

$\tan(-x) = -\tan(x)$

Exercice 17 :

À quelle condition peut-on écrire $\cos(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$.

Proposition 18 (Limite et croissance comparée) :

- $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty.$
- $\displaystyle\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty.$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1.$

Proposition 18 (Limite et croissance comparée) :

- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$.
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1$.

La courbe représentative admet donc une asymptote d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$ puis, par symétrie et translation, des asymptotes d'équation $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

x	$-\frac{\pi}{2}$			0		$\frac{\pi}{2}$
$\tan'(x)$	$\|\|$		$+$	1	$+$	$\|\|$
$\tan$	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$

Figure 16 – Tableau de variation $x \longmapsto \tan(x)$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

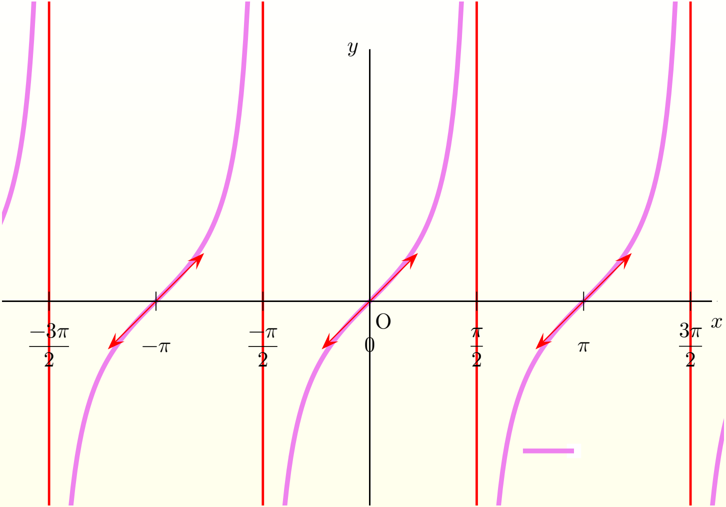


Figure 17 – Courbe représentative de $x \longmapsto \tan(x)$ sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$.

Proposition 19 (Équations trigonométriques) :

$$\tan(x) = \tan(y) \iff x \equiv y \; [\pi] \, .$$

Proposition 20 :

Formule d'addition : Pour tout $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\tan(a)$, $\tan(b)$, $\tan(a+b)$ ou $\tan(a-b)$ soient définis.

- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$.
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$.

Proposition 20 :

Formule de duplication : Pour tout $(a\,;\in)\,\mathbb{R}$ tel que $\tan(a)$, $\tan 2a$ soient définis.

$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}.$$

Proposition 20 :

Formule de factorisation par l'angle moitié Soient p et q deux réels tels que $\tan(p)$ et $\tan(q)$ soient définis :

- $\tan(p) + \tan(q) = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos(p)\cos(q)}$.
- $\tan(p) - \tan(q) = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos(p)\cos(q)}$.

Proposition 20 :

Formule de l'angle moitié : Pour tout x réel tel que $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ soit défini.

- $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$.
- $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.
- $\tan(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

Exercice 18 :

Sans s'occuper du domaine de définition, exprimer $\dfrac{\cos(x)}{1+\sin(x)}$ en fonction de $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

La fonction tan : $\mathcal{D}_{\tan} \longmapsto \mathbb{R}$ n'est pas bijective. Elle n'admet donc pas de réciproque (sur $\mathbb{R}$ s'entend).

La restriction de la fonction tan à $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ est bijective. On la note $\tan_{|]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[}$.

$$\begin{array}{rccl} \tan_{|]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[} : & \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[& \longmapsto & \mathbb{R} \\ & x & & \tan(x) \end{array}$$

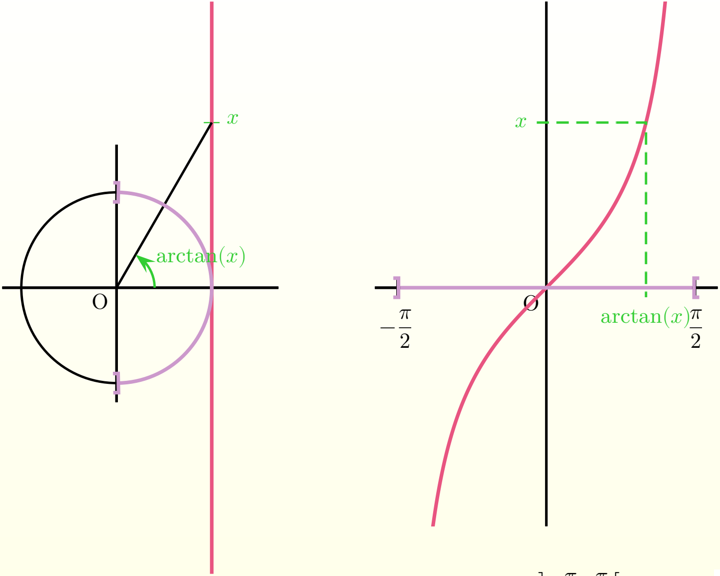


Figure 18 – La fonction tan est continue et strictement monotone de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Elle y réalise donc une bijection.

Définition 7 (Arctangente) :

On appelle fonction *arctangente*, notée arctan, la bijection réciproque de la fonction $\tan_{|]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 7 (Arctangente) :

On appelle fonction *arctangente*, notée arctan, la bijection réciproque de la fonction $\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Corollaire 20.2 (Formule de réciprocité) :

La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$ et on a :

- $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \tan\big(\arctan(x)\big) = x.$
- $\forall\, x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[,\ \arctan\big(\tan(x)\big) = x.$

Exemples 5 :

- $\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.
- $\tan\left(\arctan\left(\sqrt{3}\right)\right) = \sqrt{3}$.
- $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

Mais **ATTENTION** $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right) = \arctan\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\dfrac{\pi}{6} \neq \dfrac{5\pi}{6}$.

Exercice 19 :

Montrer que :

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4} \qquad \text{(Hutton, 1776)}$$

Exercice 19 :

Montrer que :

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4} \qquad \text{(Hutton, 1776)}$$

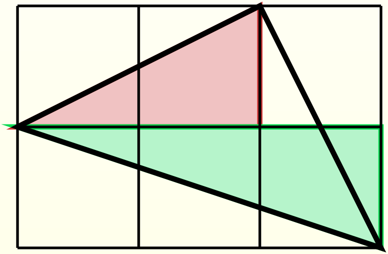


Figure 19 – $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Proposition 21 :

- La fonction arctan est continue sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

- La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

  En particulier, arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- La fonction arctan est impaire.

Proposition 21 :

- La fonction arctan est continue sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

- La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

  En particulier, arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- La fonction arctan est impaire.

En particulier, la courbe représentative de tan admet deux asymptotes en l'infini d'équation $y = \pm\dfrac{\pi}{2}$ et la première bissectrice comme tangente à l'origine.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
arctan	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$

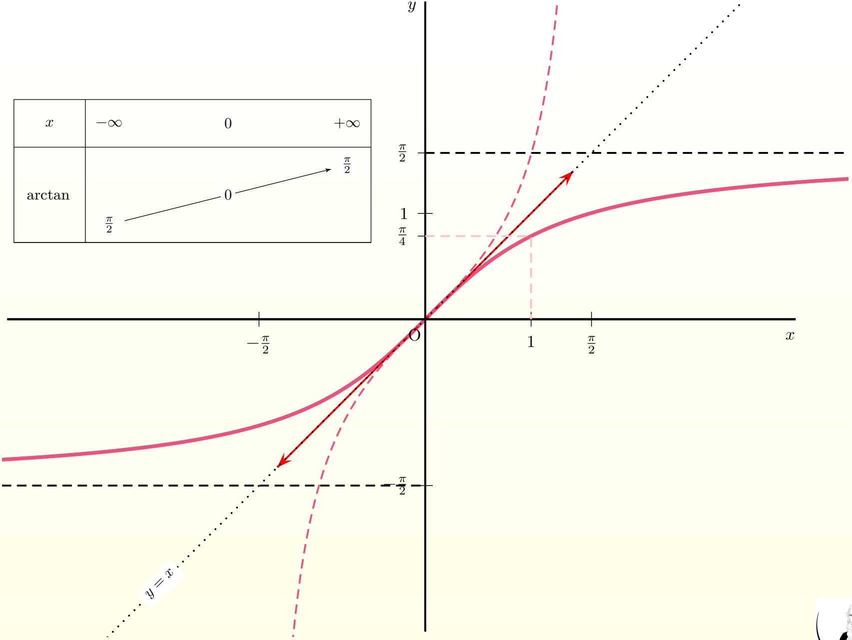


Figure 20 – Tableau de variation et courbe représentative de $x \longmapsto \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$. En dash, la courbe de tan.

Exercice 20 :

Étudier les asymptotes de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = (x+1)\arctan x.$$

Corollaire 2.11 :

Pour toute fonction u dérivable sur un intervalle I, $\arctan(u)$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ \Big(\arctan(u)\Big)'(x) = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}.$$

Corollaire 21.2 :

Pour toute fonction u dérivable sur un intervalle I, $\arctan(u)$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ \Big(\arctan(u)\Big)'(x) = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}.$$

Exercice 21 :

Étude et représentation graphique de $f : x \longmapsto \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}\right)$.

Proposition 22 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = signe(x) \times \frac{\pi}{2}.$$

VI. Tableau récapitulatif

VI. Tableau récapitulatif

<table>
<tr><th>$f(x)$</th><th>Domaine de définition</th><th>Domaine de dérivabilité</th><th>$f'(x)$</th></tr>
<tr><td>$\cos(x)$</td><td colspan="2" rowspan="2">$\mathbb{R}$</td><td>$-\sin(x)$</td></tr>
<tr><td>$\sin(x)$</td><td>$\cos(x)$</td></tr>
<tr><td>$\tan(x)$</td><td colspan="2">$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi,\, n \in \mathbb{Z} \right\}$</td><td>$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$</td></tr>
<tr><td>$\arccos(x)$</td><td rowspan="2">$[-1\,;1]$</td><td rowspan="2">$]-1\,;1[$</td><td>$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$</td></tr>
<tr><td>$\arcsin(x)$</td><td>$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$</td></tr>
<tr><td>$\arctan(x)$</td><td colspan="2">$\mathbb{R}$</td><td>$\frac{1}{1+x^2}$</td></tr>
</table>