Sommes et Produits

Exercice 1 : Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Exercice 2 : Montrer, par récurrence, que $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

Exercice 3 : Écrire les nombres suivants en utilisant la factorielle :

1. $5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$
2. $n(n-1)(n-2)$
3. $\dfrac{9 \times 10 \times 11 \times 12}{5 \times 6 \times 7}$
4. $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)$
5. $\dfrac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10}$

Correction :

1. $\dfrac{9!}{4!}$
2. $\dfrac{n!}{(n-3)!}$
3. $\dfrac{12!4!}{7!8!}$
4. $2^n n!$
5. $\dfrac{11!}{(2\times 4\times 6\times 8\times 10)^2} = \dfrac{11!}{(2^5 \times 5!)^2} = \dfrac{11!}{2^{10}(5!)^2}$

Exercice 4 : Simplifier au maximum :

1. $\dfrac{n!}{(n+1)!}$
2. $\dfrac{n!}{p!}, \quad p < n$
3. $\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$
4. $\dfrac{1}{(n-1)!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$

Exercice 5 : Montrer, sans récurrence, que pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^{n-1}.$$

Exercice 6 : Retrouver la relation $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m$ par un changement d'indices.

Correction :

$$\sum_{k=m}^{n} (u_{k+1} - u_k) \underset{\substack{\text{linéarité}\\ \text{de la somme}}}{=} \sum_{k=m}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=m}^{n} u_k \underset{j=k+1}{=} \sum_{j=m+1}^{n+1} u_j - \sum_{k=m}^{n} u_k$$
$$= \left(u_{n+1} + \cancel{\sum_{j=m+1}^{n} u_j}\right) - \left(\cancel{\sum_{k=m+1}^{n} u_k} + u_m\right) = u_{n+1} - u_m.$$

Exercice 7 :

1. Trouver des réels a, b et c tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}. \tag{V.1}$$

2. En déduire le calcul de $\mathrm{K}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Correction :

1 Considérons l'équation, $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$ en admettant qu'une telle écriture existe.

En multipliant les deux membres par $k \in \mathbb{N}^*$, on obtient $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = a + \left(\dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}\right) \times k$.

Enfin pour $k = 0$, $a = \dfrac{1}{2}$.

Multipliant successivement l'équation (V.1) par $k+1$ et évaluant en $k = -1$ puis par $k+2$, évaluant en $k = -2$, on trouve : $b = -1$ et $c = \dfrac{1}{2}$.

Donc, $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2k} - \dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{2(k+2)}$.

2 Par un petit miracle, on peut écrire, $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k+2}\right)$.

On conclut alors par linéarité et télescopage :

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).
\end{aligned}$$

Exercice 8 : Calculer (sans calculatrice !)

1 $\dbinom{8}{3}$ 2 $\dbinom{5}{3}\dbinom{5}{4}\dbinom{5}{5}$ 3 $\dfrac{\binom{10}{7}}{\binom{10}{4}}$ 4 $\dfrac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}}$.

Exercice 9 : Résoudre les équations suivantes ($n \in \mathbb{N}$)

1 $\dbinom{n}{2} = 36$

2 $\dbinom{n}{2} = \dbinom{n}{4}$

3 $9\dbinom{n}{3} = 14\dbinom{n}{2}$

4 $2\dbinom{n}{3} = 21n$

5 $\dbinom{n}{n-2} = 780$

Exercice 10 : Calculer les sommes et les produits suivants :

1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)(k+2)$.

2 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1)$.

3 $\displaystyle\sum_{p=-n}^{n} (p+1)$.

4 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (n-i)$.

5 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

6 $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

7 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$.

8 $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$.

9 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$.

10 $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \min(k\,;n)$

11 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^{n+k}$.

12 Pour $p < n$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} 3^k$.

13 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3}{10^k}$.

14 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \left(2^i + \frac{1}{2^i}\right)$.

15 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 2^{2i+1}$.

16 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \left((-2)^i + i\right)$.

17 $\displaystyle\sum_{k=3}^{2n} 2^{3k+1}\frac{3^{k+1}}{4^k}$.

18 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{3^{2i-1}}$.

19 $\displaystyle\sum_{k=6}^{n+2} \mathrm{e}^{-3k}$, pour $n \geqslant 4$.

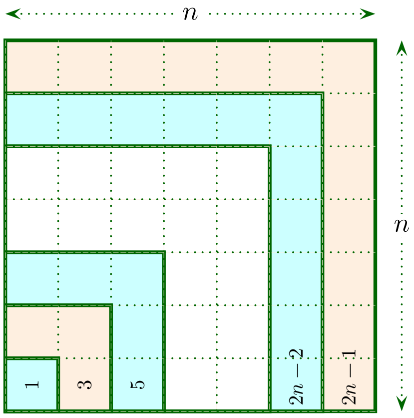
20 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p^{2k}$, en fonction de $p \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Correction :

1. Il suffit simplement de développer et d'utiliser les sommes classiques :

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + 2\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3\frac{n(n+1)}{2} + 2n$$
$$= \frac{n}{3}(n^2+6n+11).$$

2. Plusieurs méthodes dont l'une est d'écrire $2k+1 = (k+1)^2 - k^2$.



Un peu d'histoire : *Cette formule et son interprétation géométrique étaient déjà connue des grecs antiques comme Euclide.*

Figure V.1 – $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

7. $(k+1)! - k! = k \times k!$ d'où $\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$.

8. On va rajouter (et enlever) les nombres pairs qui manquent à $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$ pour former $(2n+1)!$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2\times 4\times \ldots \times (2n-2)\times(2n)} = \frac{(2n+1)!}{2^n(1\times 2\times \ldots \times (n-1)\times n)} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

Exercice 11 : Calculer :

1. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$
2. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k 5^{n-k}$
3. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$
4. $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$
5. $\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}$
6. $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

Exercice 12 : Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{S}_p = \sum_{k=1}^{n} k^p$.

1. Calculer S_1.
2. Exprimer $\mathrm{A}(n) = \sum_{k=1}^{n}(k+1)^3$ en fonction de $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2$ et S_3.
3. Par changement d'indice dans $\mathrm{A}(n)$, exprimer $\mathrm{A}(n)$ uniquement en fonction de S_3.
4. En déduire une formule pour S_2.
5. Calculer S_3 par une méthode analogue.

Exercice 13 : On considère x, un nombre réel, et n un entier naturel.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=1$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=nx$.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=n(n-1)x^2$.
4. Déduire des questions précédentes que

$$\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n}.$$

Correction : Soient $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$.

1. Dans $\mathbb{R}$ le produit est commutatif. D'après le **binôme de Newton**, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=[x+(1-x)]^n=1^n=1.$$

2. D'après la formule du capitaine, on a : $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}&=\sum_{k=0}^{n}n\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{(n-1)-(k-1)}\\&=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{(n-1)-(k-1)}\\&=nx\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{(n-1)-(k-1)}\\&=nx\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}x^{\ell}(1-x)^{(n-1)-\ell}\\&=nx[x+(1-x)]^{n-1}\\&=nx.\end{aligned}$$

3. De même, $k(k-1)\binom{n}{k}=n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$ qui entraîne :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}&=\sum_{k=0}^{n}n(n-1)\binom{n-2}{k-2}x^k(1-x)^{(n-1)-(k-1)}\\&=\sum_{k=2}^{n}n\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{(n-1)-(k-1)}\\&=n(n-1)x^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}x^{k-2}(1-x)^{(n-2)-(k-2)}\\&=n(n-1)x^2\sum_{\ell=0}^{n-2}\binom{n-2}{\ell}x^{\ell}(1-x)^{(n-2)-\ell}\\&=n(n-1)x^2[x+(1-x)]^{n-2}\\&=n(n-1)x^2.\end{aligned}$$

4
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n}\left(x^2-\frac{2k}{n}x+\frac{k^2}{n^2}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&= x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}-\frac{2x}{n}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&\qquad+\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&= x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}-\frac{2x}{n}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&\qquad+\frac{1}{n^2}\left[\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right]\\
&= x^2\times 1-\frac{2x}{n}\times nx+\frac{1}{n^2}[n(n-1)x^2+nx]\\
&= x^2-2x^2+\left(1-\frac{1}{n}x^2\right)+\frac{1}{n}x\\
&= \frac{x-x^2}{n}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n}.}$$

Exercice 14 : Montrer que pour tout couple d'entiers $(n\,;p)$ avec $p\geqslant \mathrm{N}$, on a :

$$\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}.$$

Exercice 15 : Soit x un réel tel que $x+\dfrac{1}{x}$ soit un entier relatif.

Montrer que $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ est aussi un entier relatif.

Exercice 16 : Montrer que, pour tous a, $b\in\mathbb{R}_+^*$et $n\in\mathbb{N}$:

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n\geqslant 2^{n+1}.$$

Quand y a-t-il égalité ?

Exercice 17 : Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{E}=\{0;\,1\;2;\,\dots;\,2n-1\}$.

En écrivant E sous la forme d'une union disjointe de ses éléments pairs et de ses éléments impairs, calculer :

$$\sum_{j=0}^{2n-1}\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor,\ \text{où } \lfloor x\rfloor \text{ représente la partie entière de } x.$$

Correction : On a $\mathrm{E}=\{2p+1,\ p\in[\![0\,;n-1]\!]\}\sqcup\{2p,\ p\in[\![0\,;n-1]\!]\}=\mathrm{E}_i\sqcup\mathrm{E}_p$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{2n-1}\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor=\sum_{j\in\mathrm{E}}\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor$.

Or,
$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathrm{E}}\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor &= \sum_{j\in\mathrm{E}_i\sqcup\mathrm{E}_p}\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor=\sum_{j\in\mathrm{E}_i}\left\lfloor\frac{2j+1}{2}\right\rfloor+\sum_{j\in\mathrm{E}_p}\left\lfloor\frac{2j}{2}\right\rfloor\\
&= \sum_{j\in\mathrm{E}_i}j+\sum_{j\in\mathrm{E}_p}j=\sum_{j=0}^{n-1}j+\sum_{j=0}^{n-1}j=2\sum_{j=0}^{n-1}j=(n-1)n.\end{aligned}$$

Exercice 18 (Transformation d'Abel) : Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

1 Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) b_k = (a_n b_n - a_0 b_0) - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}(b_{k+1} - b_k). \tag{V.2}$$

Application : Soient $x \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

En calculant $(x-1)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} kx^k$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} kx^k = \frac{nx^n}{x-1} - \frac{x^{n+1}-x}{(x-1)^2}$.

2 On pose, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{B}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k$.

Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n \mathrm{B}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{B}_k (a_{k+1} - a_k)$.

Exercice 19 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier. La réciproque est-elle vraie ?

Correction : Supposons que n n'est pas premier.

On peut écrire $n = pq$ avec $1 < p < n$.

$$2^n - 1 = 2^{pq} - 1 = (2^p)^q - 1^q = (2^p - 1)\sum_{k=0}^{q-1} (2^p)^k$$

Donc, $2^p - 1 | 2^n - 1$.

Or, $1 < 2^p - 1 < 2^n - 1$ donc $2^n - 1$ admet un diviseur autre que 1 et lui-même. Il n'est pas premier.

Par contraposition, si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.

La réciproque est fausse. En effet, 11 est premier et $2^{11} - 1 = 23 \times 89$ ne l'est pas.

Remarque : $\mathrm{M}_n = 2^n - 1$ est le $n^{\text{ème}}$ nombre de Mersenne.

Exercice 20 (Critère de divisibilité par 3, 9 et 11) : On considère un entier naturel n dont l'écriture décimale est $n = a_p \cdots a_1 a_0$ de sorte que :

$$n = a_p 10^p + \ldots + a_1 10^1 + a_0 10^0.$$

1 Montrer que n est multiple de 3 si, et seulement si $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k$ est multiple de 3.

2 Montrer que n est multiple de 9 si, et seulement si $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k$ est multiple de 9.

3 Montrer que n est multiple de 11 si, et seulement si $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k a_k$ est multiple de 11.

Correction :

1 Comme $10 = 9 + 1$, d'après le binôme de Newton pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$10^k = (9+1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} 9^k = 3q_k + 1.$$

Ainsi :

$$n = \sum_{k=0}^{p} a_k 10^k = 3\left(\sum_{k=0}^{p} a_k q_k\right) + \sum_{k=0}^{p} a_k.$$

L'entier n est donc multiple de 3 si, et seulement si $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k$ est multiple de 3.

2. Le raisonnement est identique à partir de $10^k = (9+1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} 9^k = 9q_k + 1$.

3. Une nouvelle fois, on utilise le binôme de Newton avec $10 = 11 - 1$:

$$10^k = (11-1)^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} 11^{k-i} = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} 11^{k-i} + \binom{k}{k} (-1)^k = 11q_k + (-1)^k.$$

D'où,

$$n = \sum_{k=0}^{p} a_k 10^k = 11 \left(\sum_{k=0}^{p} a_k q_k \right) + \sum_{k=0}^{p} (-1)^k a_k.$$

L'entier n est donc multiple de 11 si, et seulement si $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k a_k$ est multiple de 11.

Exercice 21 : Calculer :

1. $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} x^{i+j}$.
2. $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)$.
3. $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)^2$.
4. $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2 / i+j=n} ij$.
5. $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij$.
6. $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min(i,j)$.

Correction :

1. On suppose $x \neq 1$ pour éviter le cas trivial égal à $(n+1)^2$.

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} x^{i+j} = \sum_{i=0}^{n} \left(x^i \sum_{j=0}^{n} x^j \right) = \sum_{i=0}^{n} \left(x^i \times \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \sum_{i=0}^{n} x^i = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right)^2.$$

2. $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j) = n^2(n+1)$.

3. $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)^2 = \dfrac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}$.

4.

5.
$$\begin{aligned}\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij &= \sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j-1} ij \right) = \sum_{j=2}^{n} \left(j \sum_{i=1}^{j-1} j \right) = \sum_{j=2}^{n} j \times \frac{j(j-1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{n} (j^3 - j^2) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (j^3 - j^2) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\ &= \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}.\end{aligned}$$

6. $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min(i,j) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 22 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer :

1. $\prod_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} x^{i+j}$.
2. $\prod_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} ij$.
3. $\prod_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} i^j$.
4. $\prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} 2^{\frac{i}{j}}$.
5. $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{i}{j}$.

Correction :

1. $$\prod_{1\leqslant i,\, j\leqslant n} x^{i+j} = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(x^i \times x^j) = \prod_{i=1}^{n}\left((x^i)^n \prod_{j=1}^{n} x^j\right) = \prod_{i=1}^{n}\left((x^i)^n \times x^{\sum_{j=1}^{n} j}\right)$$
$$= \prod_{i=1}^{n}\left((x^i)^n \times x^{\frac{n(n+1)}{2}}\right) = \left(x^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)^n \left(\prod_{i=1}^{n} x^i\right)^n = x^{\frac{n^2(n+1)}{2}} \times x^{\frac{n^2(n+1)}{2}}$$
$$= x^{n^2(n+1)}.$$

2. $$\prod_{1\leqslant i,\, j\leqslant n} ij = (n!)^{2n}.$$

3. $$\prod_{1\leqslant i,\, j\leqslant n} i^j = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} i^j = \prod_{i=1}^{n} i^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\prod_{i=1}^{n} i\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = (n!)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\sqrt{n!}\right)^{n(n+1)}.$$

4. $$\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^{\frac{i}{j}} = \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{j} 2^{\frac{i}{j}} = \prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{j} 2^i\right)^{\frac{1}{j}} = \prod_{j=1}^{n}\left(2^{\frac{j(j+1)}{2}}\right)^{\frac{1}{j}} = \prod_{j=1}^{n} 2^{\frac{(j+1)}{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^n \prod_{j=1}^{n} (\sqrt{2})^j$$
$$= (\sqrt{2})^{\frac{n(n+3)}{2}}$$

5. $$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{i}{j} = \frac{n(n-1)}{4}.$$