Fonctions circulaires

Exercice 1 : Calculer :

1. $\sin(8\pi)$
2. $\cos\left(\frac{7\pi}{2}\right)$
3. $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
4. $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$
5. $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$
6. $\sin\left(\frac{121\pi}{6}\right)$

Exercice 2 : Soit $a \in [\pi\,;2\pi]$ la mesure d'un angle tel que $\cos(a) = \frac{1}{5}$. Calculer $\sin(a)$.

Exercice 3 : Simplifier les expressions suivantes :

$A = \sin(3\pi + x)$

$B = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$C = \cos(x - \pi)$

$D = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$E = \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$

$F = \sin(-x) + \sin(\pi - x)$

$G = \cos(-x) + \cos(\pi + x)$

$H = \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$I = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \cos(3\pi - x)$

$J = \cos\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) + \sin\left(x - \frac{7\pi}{2}\right)$

$K = 2\sin(\pi - x) + 4\sin(x - \pi) - 3\sin(\pi + x)$

$L = -\cos(\pi - x) + 2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 7\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\sin(x + 3\pi) + 3\sin(-x)$

Exercice 4 : Résoudre dans $[0\,;2\pi]$ puis $]-\pi\,;\pi]$ les équations suivantes :

1. $\cos(x) = -\frac{1}{2}$
2. $\sin(x) = \frac{1}{2}$
3. $\sin(3x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
4. $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
5. $2\cos(2x) = 1$
6. $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$
7. $\sin(x) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
8. $\cos(x) = -\sin(x)$
9. $\sin(x) = \cos(2x)$
10. $\sin(3x) = \cos(x)$
11. $\cos(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
12. $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Exercice 5 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et placer les solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
2. $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin(x)$
4. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(x)$
5. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
6. $\cos\left(\frac{3\pi}{5} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5} - 3x\right)$
7. $\sin^2(x) - 5\sin(x) + 6 = 0$
8. $\cos(x) + \sin(x) = 1$
9. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$
10. $\sin(2x) = \cos(x)$
11. $\sin(3x) = \cos(2x)$
12. $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
13. $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$
14. $\sin(2x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
15. $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)$
16. $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{4}$
17. $4\cos^2(x) - 1 = 0$
18. $\sqrt{1 - \sin^2(x)} + \sin(x) = \sqrt{2}$
19. $\cos^2(x) + 2\cos(x) - 3 = 0$
20. $\sqrt{2}\sin(x) - \sqrt{6}\cos(x) = 2$
21. $\cos^2(x) + \sqrt{3}\cos(x) - 3 = 0$

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et placer les solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $\sin(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\cos(x) \geqslant -\dfrac{1}{2}$
3. $\cos(x) < 0$
4. $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
5. $\sin(4x) \geqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
6. $2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 \geqslant 0$
7. $2\sin^2(x) + 5\sin(x) + 2 < 0$
8. $\cos^2(x) - \left(3 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cos(x) + \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \leqslant 0$
9. $\sin(x) \geqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
10. $2\sin^2(x) - 5\sin(x) - 3 \geqslant 0$
11. $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) + \sqrt{3} > 0$
12. $4\sin^2(x) - 3 \leqslant 0$
13. $\sqrt{1 + 2\cos(x)} \leqslant \sin(x)$
14. $\sin(2x) > \cos(x)$
15. $\sin(2x) + \cos(2x) > 0$
16. $\sin(x) - \sqrt{3}\cos(x) = 2\cos(3x)$

Exercice 7 :

1. En remarquant que $\dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}$, montrer que $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ puis calculer $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
2. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(\sqrt{3}+1)\cos(x) + (\sqrt{3}-1)\sin(x) + \sqrt{3} - 1 = 0$.

Exercice 8 : Calculer la valeur exacte de $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}$.

Exercice 9 : Sans se préoccuper des domaines de définition, simplifier les expressions suivantes :

1. $\cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)$.
2. $\sin(3x)\cos(2x) - \sin(2x)\cos(3x)$.
3. $\cos\left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right)$.
4. $\sin^6(x) + \cos^6(x) - 2\sin^4(x)$
5. $(\cos(x) + \sin(x))^2$
6. $\dfrac{\sin(3x)}{\sin(x)} + \dfrac{\cos(3x)}{\cos(x)}$
7. $\sin(x) + \sin\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \dfrac{4\pi}{3}\right)$
8. $\sin^4(x) - \cos^4(x) + \cos^2(x) - \sin^2(x)$
9. $\sin^4(x)\left(3 - 2\sin^2(x)\right) + \cos^4(x)\left(3 - 2\cos^2(x)\right)$
10. $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\dfrac{27\pi}{2} - x\right) + \sin(3\pi + x) - \cos(7\pi + x)$
11. $\sin^6(x) + \cos^6(x)$ et résoudre $\sin^6(x) + \cos^6(x) = \dfrac{3}{8}$

Exercice 10 : Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ l'équation :

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right).$$

Exercice 11 : Discuter, suivant les valeurs de m, l'existence de solutions à l'équation

$$(2m-1)\cos(x) - (2m+1)\sin(x) = 3m.$$

Exercice 12 : Étudier la parité des fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \sin(2x) \qquad j : x \longmapsto x\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$
$$g : x \longmapsto \sin(x) - \cos(x) \qquad k : x \longmapsto \left(\sin\left(\frac{1}{3}x\right) - \sin\left(\frac{1}{5}x\right)\right)^2.$$
$$h : x \longmapsto \sin^2(x) - \sin(2x)\sin(3x)$$
$$i : x \longmapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad l : x \longmapsto \frac{\cos(2x)}{\cos^2(x)+1}$$

Exercice 13 : Vérifier que la fonction f est T-périodique.

$$f_1(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ avec } \mathrm{T} = \pi \qquad f_5(x) = \sin\left(\frac{10x-1}{3}\right) \text{ avec } \mathrm{T} = \frac{3\pi}{5}$$
$$f_2(x) = \cos^2 x - \sin^2 x \text{ avec } \mathrm{T} = \pi \qquad f_6(x) = \frac{2}{5}\cos(3\pi x) \text{ avec } \mathrm{T} = \frac{2}{3}$$
$$f_3(x) = \sin(10\pi x) \text{ avec } \mathrm{T} = 0,2.$$
$$f_4(x) = \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) \text{ avec } \mathrm{T} = \frac{\pi}{2} \qquad f_7(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \text{ avec } \mathrm{T} = \frac{2\pi}{3}$$

Exercice 14 : Sans se préoccuper des domaines de définition, proposer un domaine d'étude minimal pour les fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \sin(2x) \qquad h : x \longmapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad j : x \longmapsto \left(\sin\left(\frac{1}{3}x\right) - \sin\left(\frac{1}{5}x\right)\right)^2.$$
$$g : x \longmapsto \sin(x) - \cos(x) \qquad i : x \longmapsto \frac{x\sin(x)}{\cos(x)} \qquad k : x \longmapsto \frac{\cos(2x)}{\cos^2 x + 1}$$

Exercice 15 : Sans se préoccuper du domaine de dérivabilité, déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \cos(x)\sin(x) \qquad f_6(x) = \frac{3}{2\cos(x)} \qquad f_{10}(x) = (5x-3)^3\cos(x)$$
$$f_2(x) = \sin(x^2) \qquad f_7(x) = \frac{\cos(x)}{x+\sin(x)} \qquad f_{11}(x) = (3x^2-2)\sin^2(x)$$
$$f_3(x) = x^2 + \cos(x) \qquad f_8(x) = \frac{\cos(x)+2}{\sin^2(x)+2} \qquad f_{12}(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$f_4(x) = \cos^2(x) \qquad f_9(x) = \frac{2\cos(x)+3}{2\cos(x)-3} \qquad f_{13}(x) = \frac{2\cos(2x)}{3-\sin(1-x)}$$
$$f_5(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Exercice 16 : Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, montrer successivement que :

1. (a) $\sin(x) \leqslant x$.
   (b) $1 - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos(x)$.
   (c) $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x)$.
   (d) $\cos(x) \leqslant 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!}$.
2. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Correction : L'exercice est un peu répétitif mais s'enchaîne bien, résultat classique des propriétés des séries alternées que nous devons, pour l'instant, redémontrer à la main.

1. (a) Posons $\mu : x \longmapsto \mu(x) = \sin(x) - x$.

   La fonction μ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a :
   $$\mu'(x) = \cos(x) - 1 \leqslant 0.$$
   La fonction μ est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $\mu(0) = 0$ donc
   $$\forall x \in [0\,;+\infty[,\ \mu(x) \leqslant 0 \iff \boxed{\sin(x) \leqslant x.}$$

ⓑ Posons $\theta : x \longmapsto \theta(x) = \cos(x) - 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

La fonction θ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$\theta'(x) = -\sin(x) + x \geqslant 0.$$

La fonction θ est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $\theta(0) = 0$ donc

$$\forall\, x \in [0\,;+\infty[,\ \theta(x) \geqslant 0 \iff \boxed{\cos(x) \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}.}$$

ⓒ Posons $\varphi : x \longmapsto \varphi(x) = \sin(x) - x + \dfrac{x^3}{6}$.

La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$\varphi'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} \geqslant 0.$$

La fonction φ est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $\varphi(0) = 0$ donc

$$\forall\, x \in [0\,;+\infty[,\ \varphi(x) \geqslant 0 \iff \boxed{\sin(x) \geqslant x - \frac{x^3}{6}.}$$

ⓓ Posons $\Psi : x \longmapsto \Psi(x) = \cos(x) - 1 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{4!}$.

La fonction Ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$\Psi'(x) = -\sin(x) + x - \frac{x^3}{6} \leqslant 0.$$

La fonction Ψ est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $\Psi(0) = 0$ donc

$$\forall\, x \in [0\,;+\infty[,\ \Psi(x) \leqslant 0 \iff \boxed{\cos(x) \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}.}$$

2 En regroupant les résultats des questions précédentes, on obtient, $\forall\, x \in \mathbb{R}$:

- $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x.$
- $1 - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!}.$

On obtient alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4!} \leqslant \frac{1-\cos(x)}{x^2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

D'après le théorème de comparaison :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Un petit argument de parité permettra alors de passer de la limite à droite à la limite tout court.

Exercice 17 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sin(3x) - 5\cos(3x)$.
Établir une relation entre les fonctions f et f''.

Exercice 18 : Étudier la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) - \cos(x).$$

(Domaine de définition, périodicité, parité, domaine d'étude, variation, ...)

Exercice 19 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier la parité et la périodicité éventuelle de f et en déduire un domaine d'étude.
3. Déterminer les limites aux bornes du domaine d'étude.
4. Calculer $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}\right[$.

Exercice 20 : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Montrer que f est périodique de période π.
3. Montrer que $A\left(\frac{\pi}{4}\,;\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.
   En déduire un domaine d'étude minimal de I.
4. Étudier les variations de f sur I.
5. Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A.
6. Étudier la fonction f. Préciser les intersections de $\mathscr{C}_f$ avec (Ox).
7. Montrer que 5 admet un unique antécédent par f sur $\left]-\frac{\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{4}\right[$.
   En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

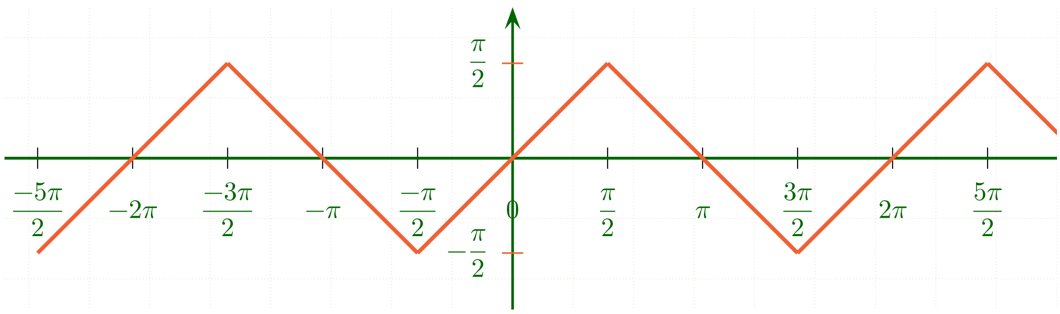
Exercice 21 : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x) + x$.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé.

1. Montrer que f est impaire.
2. Montrer que $\mathscr{C}_f$ est invariante par translation de vecteur $\vec{u}\,(2\pi\,;2\pi)$.
3. Étudier les variations de f sur $[0\,;\pi]$.
4. Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.
5. En se servant des questions précédentes, représenter $\mathscr{C}_f$ sur $[-\pi\,;5\pi]$.

Exercice 22 : Étudier la parité et la périodicité puis tracer la courbe de la fonction $x \longmapsto \arcsin(\sin(x))$.

Correction :



Exercice 23 :

1. Résoudre l'équation : $\cos(4x) = -\sin(x)$.

2. Soit $x_0 = \arcsin\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$. Calculer $\cos(4x_0)$.
3. En déduire x_0.

Exercice 24 : Déterminer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)$.

Exercice 25 : Vérifier que $\arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) = \arcsin\left(\frac{56}{65}\right)$

Exercice 26 : Résoudre les équations suivantes :

1. $\arcsin(x) = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right)$.
2. $\arcsin(x) = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{5}{13}\right)$.
3. $\arcsin(x) + \arccos(x)\sqrt{2} = \frac{\pi}{4}$.
4. $\arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$
5. $\arccos(x) + \arcsin(x^2 - x + 1) = \frac{\pi}{2}$.
6. $\arcsin(2x) - \arcsin(x)\sqrt{3} = \arcsin(x)$.

Exercice 27 : Simplifier :

1. $\arccos\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
2. $\arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
3. $\arccos\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right)$
4. $\arccos(\cos(4\pi))$
5. $\sin(\arcsin(x)+\arcsin(y))$
6. $\sin(2\arcsin(x))$
7. $\cos(2\arccos(x))$
8. $\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

Exercice 28 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \cos(n\arccos(x))$.

1. Donner l'expression de f_0, f_1 et f_2 en fonction de x.
2. Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction polynomiale.

Exercice 29 : Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition, l'ensemble des points où elle est dérivable et calculer la dérivée.

$f_1 : x \longmapsto \arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{2})$.

$f_2 : x \longmapsto \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

$f_3 : x \longmapsto \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ $(x > 0)$.

$f_4 : x \longmapsto x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$

$f_5 : x \longmapsto \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

Correction :

1. $f_1'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-2x^2}}$.
2. $f_2'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
3. $f_3'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Exercice 30 : Étudier les fonctions suivantes :

$f_1 : x \longmapsto \arcsin(\cos(x)) + \arccos(\sin(x))$.

$f_2 : x \longmapsto \arccos(\cos(x)) + \frac{1}{2}\arccos(\cos(2x))$.

$f_3 : x \longmapsto \arcsin\left(\sqrt{\frac{1+\sin(2x)}{2}}\right)$.

Exercice 31 :

1. Simplifier l'expression $\frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}$.

2. Montrer que $\tan\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$;

Correction :

1. $\forall x \not\equiv \dfrac{\pi}{4}\ \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $x \in \mathcal{D}_{\tan}$

$$\frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)} = \frac{\cos(x)+\sin(x)}{\cos(x)-\sin(x)} = \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

2. $7 = 4+3$...

Exercice 32 : Exprimer $\cos^2(x) - \cos(x)\sin(x)$ en fonction de $\tan(x)$.

Exercice 33 : Résoudre : $\tan(x)\tan(4x) = -1$

Exercice 34 : Étudier les fonctions $f : x \longmapsto x - \tan(x)$ et $g : x \longmapsto \sqrt{\tan(2x)}$.

Exercice 35 : Sachant que $\tan(x) = \sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, calculer $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Exercice 36 : Montrer que le sinus et le cosinus d'angle α sont des nombres rationnels si, et seulement si $\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ n'est pas défini ou est aussi rationnel.

Exercice 37 : Simplifier $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$

Exercice 38 : Montrer que :

1. $\arccos\left(\dfrac{5}{13}\right) = 2\arctan\left(\dfrac{2}{3}\right)$
2. $\arctan\left(\dfrac{-\frac{1}{2}}{2}\right) + 2\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$
3. $\arctan\left(2\sqrt{2}\right) + 2\arctan\left(\sqrt{2}\right) = \pi$
4. $\arctan\left(\dfrac{2013 - \frac{1}{2013}}{2}\right) + 2\arctan\left(\dfrac{1}{2013}\right) = \dfrac{\pi}{2}$
5. $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ [Hutton, 1776]
6. $4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{239}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ [Machin [1], 1706]

Correction : *Tout repose sur la formule, dans ses conditions de validité,* $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$.

6. *De même,* $\tan\left(2\arctan\dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \dfrac{5}{12}$ *puis*

$$\tan\left(4\arctan\frac{1}{5}\right) = \tan\left(2\times 2\arctan\frac{1}{5}\right) = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{120}{119}.$$

Enfin, $\tan\left(4\arctan\dfrac{1}{5} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}\times 1} = \dfrac{1}{239}.$

On en déduit que :

$$4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

[1]. La formule de Machin fut découverte en 1706 par John Machin et relie le nombre π à la fonction trigonométrique arctangente :

$$\pi = 16\arctan\frac{1}{5} - 4\arctan\frac{1}{239}.$$

Cette formule permet de calculer une approximation du nombre π grâce au développement en série entière de la fonction arctangente. John Machin l'utilisa pour obtenir les cent premières décimales de π.

Exercice 39 : Résoudre, sur $\mathbb{R}$, les équations :

1. $\arctan(2x) + \arctan(3x) = \dfrac{\pi}{4}$.
2. $\arctan(3-x) + \arctan\left(4 - \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$.
3. $\arctan \dfrac{x}{2(1-x^2)} = \arcsin(x)$
4. $\arctan(x) + \arctan(2x) = \dfrac{\pi}{4}$.

Correction :

1. $$\begin{aligned}\arctan(2x) + \arctan(3x) = \frac{\pi}{4} &\iff \tan\Big(\arctan(2x) + \arctan(3x)\Big) = 1 \\ &\quad \text{ et } \arctan(2x) + \arctan(3x) \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\\ &\iff \frac{5x}{1-6x^2} = 1 \text{ et } \arctan(2x) + \arctan(3x) \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\\ &\iff x = -1 \text{ ou } x = \frac{1}{6} \text{ et } \arctan(2x) + \arctan(3x) \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\end{aligned}$$

   Or, -1 ne convient pas car $\arctan(-1) + \arctan(-3) < 0 \neq \dfrac{\pi}{4}$.

   Mais, $0 = 0 + 0 < \arctan\left(\dfrac{2}{6}\right) + \arctan\left(\dfrac{3}{6}\right) < \arctan(1) + \arctan(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

   Donc l'unique solution est $\dfrac{1}{6}$.

Exercice 40 :

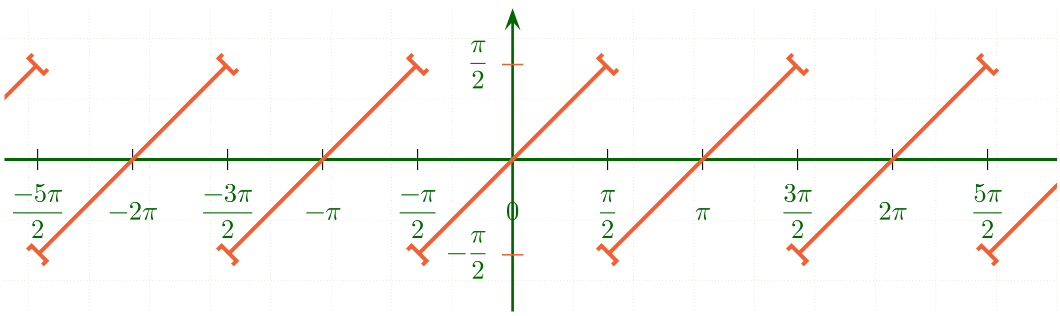
1. Calculer $\operatorname{Arctan} 2 + \arctan 5 + \arctan 8$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\arctan x + \arctan(x+3) + \arctan(x-3) = \dfrac{5\pi}{4}$.

Exercice 41 : Simplifier au maximum les expressions suivantes :

1. $\tan(2\arctan x)$.
2. $\cos(2\arccos x)$.
3. $\tan(2\arcsin x)$.
4. $\cos(\arcsin(x))$. En déduire $\tan(\arcsin(x))$.
5. $\sin(\arccos(x))$. En déduire $\tan(\arccos(x))$.
6. $\cos(\arctan(x))$. En déduire $\sin(\arctan(x))$.

Exercice 42 : Tracer la courbe de la fonction $x \longmapsto \arctan(\tan(x))$ sur $\mathbb{R}$.

Correction :



Exercice 43 :

1. Exprimer $\tan(x-y)$ en fonction de $\tan(x)$ et $\tan y$.
2. En déduire que pour tous réels $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, $\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\dfrac{a-b}{1+ab}\right)$.
3. Vérifier l'égalité $\dfrac{2}{k^2} = \dfrac{(k+1)-(k-1)}{1+(k-1)(k+1)}$.

4. Déduire des résultats précédents la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{2}{k^2}\right).$$

Exercice 44 : Sans s'occuper du domaine de dérivabilité, calculer et simplifier les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \cos^2\left(\frac{1}{2}\arctan(x)\right)$
2. $f(x) = \arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1)$

Correction :

1. $f'(x) = \pm\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
2. $f'(x) = \frac{8+6x^2+3x^4}{(4+x^4)(1+x^2)}$

Exercice 45 : Montrer que $\forall\, a \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan(a) > \frac{a}{1+a^2}$

Exercice 46 : Donner le domaine de définition, l'ensemble des points où elle est dérivable et calculer la dérivée de la fonction f définie par :

$$2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \arcsin(x).$$