

Fonctions de référence, sommes et produits finis, fonctions circulaires (trigo)

1 Fonctions usuelles

- Les fonctions exponentielle et logarithme en base a : dérivation, propriétés algébriques, graphes.
- Les fonctions puissances : dérivation, propriétés algébriques, limites aux bornes, prolongement par continuité en 0, monotonie, graphes, croissances comparées.

- Les fonctions hyperboliques : définition, parité, $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$, limites aux bornes, variations, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)}{2} = \frac{e^x}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{x}$.

2 Sommes et Produits

- Notations $\sum$ et $\prod$ et manipulations.
- Formule de changement d'indice du type glissement $\tilde{k} = k + r$ ou inversion $\tilde{k} = n - k$.
- Somme et produit télescopique. Sommation par paquets, somme des pairs/impairs.
- Sommes usuelles : d'une constante, $\sum_{k=1}^n k, \sum_{k=1}^n k^2, \sum_{k=1}^n k^3$.
- Rappels sur les suites arithmétiques et les suites géométriques. Sommes des termes.
- Factorisation de $a^n - b^n$ (formule de Bernoulli).
- Définition de $n!$ et du coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

- Formule $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, formule de Pascal, formule du binôme de Newton et intégrité des coefficients binomiaux.

- Sommes doubles : indexées par un rectangle, par un triangle. Cas des variables séparées.
- Produit de sommes, carré d'une somme.

3 Trigonométrie

- Définition géométrique du radian, du cosinus et du sinus.
- Valeurs particulières des fonctions trigonométriques. Les étudiants doivent être capables d'étendre les valeurs du premier quart de cercle au reste du cercle et de connaître (ou retrouver rapidement) les formules associées.
- Formulaire : $\cos(a \pm b), \sin(a \pm b), \tan(a + b)$, formules de linéarisation $\cos(a)\cos(b), \sin(a)\sin(b), \cos(a)\sin(b)$, cas où $a = b$, formules de factorisation $\cos(p) \pm \cos(q), \sin(p) \pm \sin(q)$.

Questions de cours possibles [1] :

- 1 Croissances comparées : formules et démonstration.
- 2 Limites remarquables des fonctions hyperboliques : formules et démonstration (de une ou plusieurs des limites)
- 3 Valeur de $\sum_{k=1}^n k^2$ et démonstration par calcul direct, sans récurrence.
- 4 Formule du binôme de Newton
- 5 Somme des termes d'une suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de raison $q \neq 1$:

$$\sum_{k=n}^n u_k = \dots$$

- 6 Formule de Bernoulli : $a^n - b^n = \dots$
- 7 Calcul des valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.
- 8 Démonstration de $\cos(a+b) = \dots$ et $\sin(a+b) = \dots$

[1]. La liste des questions de cours possibles n'est donnée qu'à titre indicatif. L'examineur est libre de vous demander tout éclaircissement ou démonstration que réclamera votre prestation en accord avec le programme.