Hyperboles à la puissance

A. *Une fonction auxiliaire.*

1. Par croissances comparées, on a $u^2 \ln u \xrightarrow[u\to 0^+]{} 0$, donc par somme $\boxed{\varphi(u) \xrightarrow[u\to 0^+]{} -1.}$

   Par produit, on a $u^2 \ln u \xrightarrow[u\to +\infty]{} +\infty$, donc par somme $\boxed{\varphi(u) \xrightarrow[u\to +\infty]{} +\infty.}$

2. La fonction $u \longmapsto u^2 \ln u$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (produit d'un polynôme par la fonction ln), donc par somme avec le polynôme $u \longmapsto u^2 - 1$, on en déduit que $\boxed{\varphi \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*.}$
   Sa dérivée est :

$$\boxed{\forall\ u \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(u)} = 2u\ln(u) + u^2 \times \frac{1}{u} + 2u \ \boxed{= u(2\ln(u)+3).}$$

3. Soit $u > 0$; le signe de $\varphi'(u)$ est celui de $2\ln(u)+3$. Ainsi,

   $\varphi'(u) > 0 \iff 2\ln(u)+3 > 0 \iff u > \mathrm{e}^{-3/2}$ et de même $\varphi'(u) < 0 \iff u < \mathrm{e}^{-3/2}$.

   De plus, $\varphi'(u) = 0 \iff u = \mathrm{e}^{-3/2}$. On obtient le tableau suivant :

u	0		$\mathrm{e}^{-3/2}$		$+\infty$
$\varphi'(u)$	‖	$-$	0	$+$	
φ	‖ -1	↘	$\varphi(\mathrm{e}^{-3/2})$	↗	$+\infty$

4. Comme φ est décroissante sur $]0; \mathrm{e}^{-3/2}]$ avec $\lim\limits_{0^+} \varphi = -1 < 0$, on en déduit que $\varphi < 0$ sur $]0; \mathrm{e}^{-3/2}]$.

   Ensuite, on vérifie facilement que $\varphi(1) = 0$. Donc, φ étant **strictement croissante** sur $]\,\mathrm{e}^{-3/2}; 1[$ avec $\varphi(1) = 0$, on en déduit que $\varphi < 0$ sur $]\,\mathrm{e}^{-3/2}; 1[$.

   Finalement, on obtient $\boxed{\varphi < 0 \text{ sur }]0; \mathrm{e}^{-3/2}] \cup]\,\mathrm{e}^{-3/2}; 1[=]0; 1[.}$

   De même, φ est **strictement croissante** sur $]1; +\infty[$ avec $\varphi(1) = 0$, donc $\boxed{\varphi > 0 \text{ sur }]1; +\infty[.}$

   Commentaires : *Pour le raisonnement sur $]0; \mathrm{e}^{-3/2}]$, on n'avait pas besoin d'invoquer la stricte décroissance, car la limite en 0^+ était déjà < 0. Mais, sur $]\,\mathrm{e}^{-3/2}; +\infty[$ la* ***stricte*** *monotonie est cruciale car $\varphi(1) = 0$ (donc φ ne doit s'annuler nulle part ailleurs !).*

B. *Étude des variations de f.*

1. En réécrivant f sous forme exponentielle, on a $f\colon x \longmapsto \mathrm{ch}\,(x)^{\mathrm{sh}\,(x)} = \mathrm{e}^{\mathrm{sh}\,(x)\ln(\mathrm{ch}\,x)}$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, ch est à valeurs strictement positives donc $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}.}$

2. La fonction ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et **à valeurs strictement positives**, donc par composition avec la fonction ln (qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$), on en déduit que la fonction $x \longmapsto \ln(\mathrm{ch}\,x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Ensuite, par produit avec sh (qui est dérivable sur $\mathbb{R}$), la fonction $x \longmapsto \mathrm{sh}\,(x)\ln(\mathrm{ch}\,x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Finalement, par composition avec exp (qui est dérivable sur $\mathbb{R}$), on a bien $\boxed{f \text{ qui est dérivable sur } \mathbb{R}.}$

Calculons sa dérivée ; on peut remarquer que $f = \mathrm{e}^u$ avec $u\colon x \longmapsto \operatorname{sh}(x)\ln(\operatorname{ch} x)$. Commençons par calculer u' :

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in \mathbb{R},\quad u'(x) &= \operatorname{ch}(x)\ln(\operatorname{ch} x) + \operatorname{sh}(x)\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} && \text{(dérivée d'un produit et de } \ln(v)\text{)}\\
&= \frac{\operatorname{ch}^2(x)\ln(\operatorname{ch} x) + \operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}(x)} && \text{(mise au même dénominateur)}\\
&= \frac{\operatorname{ch}^2(x)\ln(\operatorname{ch} x) + \operatorname{ch}^2(x) - 1}{\operatorname{ch}(x)} && \text{(relation fondamentale } \operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1\text{)}\\
&= \frac{\varphi(\operatorname{ch}(x))}{\operatorname{ch}(x)},
\end{aligned}$$

où φ a été définie en partie **A**. Terminons par f' :

$$\begin{aligned}
\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\quad f'(x)} &= u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}\\
&= \frac{\varphi(\operatorname{ch}(x))}{\operatorname{ch}(x)}\,\mathrm{e}^{\operatorname{sh}(x)\ln(\operatorname{ch} x)}\\
&= \boxed{\frac{\varphi(\operatorname{ch}(x))}{\operatorname{ch}(x)} f(x).}
\end{aligned}$$

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $f(x) \neq 0$ (c'est une exponentielle), on a :

$$\boxed{f'(x) = 0} \iff \varphi(\operatorname{ch}(x)) = 0 \underset{\text{voir } \mathbf{A}4}{\iff} \operatorname{ch}(x) = 1 \;\boxed{\iff x = 0.}$$

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $f(x) > 0$ et $\operatorname{ch}(x) > 0$, alors $f'(x)$ est du signe de $\varphi(\operatorname{ch} x)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) > 0 &\iff \varphi(\operatorname{ch} x) > 0\\
&\iff \operatorname{ch} x > 1 && \text{(d'après la question } \mathbf{A}4 \text{ sur le signe de } \varphi\text{)}\\
&\iff x \neq 0 && \text{(propriété de la fonction ch).}
\end{aligned}$$

   Ainsi, $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\quad f'(x) > 0.}$

4. *Limite en* $-\infty$. Comme $\operatorname{ch} x \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$, alors par composition avec ln on a $\ln(\operatorname{ch} x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$. Puis, comme $\operatorname{sh} x \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$, alors par produit on a $\operatorname{sh}(x)\ln(\operatorname{ch} x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$.

   Enfin, par composition avec exp, on obtient $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0.}$

   Limite en $+\infty$. Comme précédemment, on obtient $\operatorname{sh}(x)\ln(\operatorname{ch} x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, donc par composition avec exp, $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.}$

5. Grâce aux questions précédentes, nous avons :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

C. *Étude des éventuelles branches infinies.*

1. Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} f = 0$, la courbe $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ admet une asymptote horizontale d'équation } y = 0}$ (axe des abscisses).

2. (a) Soit $x > 0$:

$$\begin{aligned}
\boxed{\ln(\operatorname{ch} x)} &= \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-2x})}{2}\right) && \text{(factorisation par le terme prépondérant } \mathrm{e}^x) \\
&= \ln(\mathrm{e}^x) + \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-2x}}{2}\right) && \text{(propriété fondamentale de ln)} \\
&= x + \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-2x}}{2}\right) \\
&\boxed{= x\left(1 + \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-2x}}{2}\right)\right)} && \text{(factorisation par } x).
\end{aligned}$$

(b) Soit $x > 0$; grâce à ce qui précède, on a :

$$\frac{\ln(x)}{\operatorname{sh}(x)\ln(\operatorname{ch}(x))} = \frac{\ln(x)}{\operatorname{sh}(x)x\left(1+\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-2x}}{2}\right)\right)} = \frac{\ln x}{x}\times\frac{1}{\operatorname{sh}(x)}\times\frac{1}{1+\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-2x}}{2}\right)}.$$

Examinons les limites de chacun de ces trois facteurs.

- Par croissances comparées, on a $\dfrac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
- Par inverse, on a $\dfrac{1}{\operatorname{sh}(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
- Comme $\dfrac{1+\mathrm{e}^{-2x}}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$, alors par composition avec ln puis par produit avec $\dfrac{1}{x}$ (qui tend vers 0 en $+\infty$), on a $\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^{-2x}}{2}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

  D'où, par somme avec 1 puis par inverse, $\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-2x}}{2}\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

Conclusion : par produit de limites finies, on a $\boxed{\dfrac{\ln(x)}{\operatorname{sh}(x)\ln(\operatorname{ch}(x))} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.}$

(c) Soit $x > 0$; en mettant tout sous forme exponentielle, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} &= \frac{\mathrm{e}^{\operatorname{sh}(x)\ln(\operatorname{ch} x)}}{\mathrm{e}^{\ln x}} \\
&= \mathrm{e}^{\operatorname{sh}(x)\ln(\operatorname{ch} x) - \ln x} \\
&= \mathrm{e}^{\operatorname{sh}(x)\ln(\operatorname{ch} x)\left(1 - \frac{\ln x}{\operatorname{sh}(x)\ln(\operatorname{ch} x)}\right)} && \text{(factorisation par le terme prépondérant).}
\end{aligned}$$

D'après la question précédente, la parenthèse ci-dessus tend vers 1 lorsque $x \to +\infty$. Or, on a déjà vu que $\operatorname{sh}(x)\ln(\operatorname{ch} x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, donc par produit puis par composition avec exp, on obtient finalement :

$$\boxed{\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.}$$

La courbe $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ admet donc une branche parabolique de direction } (\mathrm{O}y).}$

3.