Hyperboles à la puissance

Ce problème vise à étudier la fonction $f\colon x \longmapsto \mathrm{ch}\,(x)^{\mathrm{sh}\,(x)}$
et à esquisser le tracé de sa courbe $\mathscr{C}_f$.

A. *Une fonction auxiliaire.*

Dans cette partie, on considère la fonction $\varphi\colon u \longmapsto u^2 \ln u + u^2 - 1$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Déterminer les limites de φ en 0^+ et en $+\infty$.
2. Justifier que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ puis exprimer sa dérivée.
3. Établir le tableau de variations complet de φ en justifiant.
4. Démontrer que $\varphi < 0$ sur $]0;1[$ et $\varphi > 0$ sur $]1;+\infty[$.

B. *Étude des variations de f.*

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
2. Justifier soigneusement que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ puis établir que :

$$\forall\ x \in \mathcal{D}_f, \quad f'(x) = \frac{\varphi(\mathrm{ch}\,(x))}{\mathrm{ch}\,(x)} f(x).$$

3. *Dans cette question, on pourra utiliser les résultats établis en* **A**4 *même s'ils n'ont pas été démontrés.*
   (a) Résoudre l'équation $f'(x) = 0$ sur $\mathcal{D}_f$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_f$.
4. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
5. Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathcal{D}_f$.

C. *Étude des éventuelles branches infinies.*

1. Quelle est la nature de la branche infinie de $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$?
2. (a) Montrer que $\forall\ x > 0,\ \ln(\mathrm{ch}\,(x)) = x\left(1 + \dfrac{1}{x} \ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^{-2x}}{2}\right)\right)$.
   (b) En déduire la limite de $\dfrac{\ln(x)}{\mathrm{sh}\,(x)\ln(\mathrm{ch}\,(x))}$ lorsque $x \to +\infty$. Justifier.
   (c) Conclure quant à la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque $x \to +\infty$. Quelle est la nature de la branche infinie de $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$?
3. Tracer, sur papier millimétré et le plus soigneusement possible, l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé. *On prendra 2 cm pour 1 unité.*