Une fonction remarquable

Commentaires : *Certains auront remarqué qu'il s'agissait de la fonction* th *. Celle-ci n'étant pas au programme, il fallait bien que l'on trouve un prétexte pour que vous l'étudiez mais vous ne pouviez en aucun cas vous servir de résultats que vous auriez pu trouver dans une quelconque bibliographie.*

1. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} \neq 0$ donc $\boxed{\mathrm{I} = \mathbb{R}}$.

   Commentaires : *Sur des questions simples comme celle-là soyez bref mais clair.*

2. D'après la question précédente, f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est bien centré en 0.

   De plus,
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}} = -\frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}} = -f(x).$$

   $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est donc impaire.}}$ **Commentaires :** *C'est la fonction f qui est impaire et non une de ses valeurs $f(x)$.*

   On restreindra notre étude à $\mathbb{R}_+$ et on complètera à $\mathbb{R}$ tout entier, chaque fois que nécessaire, par symétrie de centre l'origine du repère.

   Commentaires : *N'oubliez jamais de préciser un commentaire ou une remarque si il ou elle vous vient comme ici où il est impératif de donner une conséquence graphique, la symétrie de la courbe, et/ou calculatoire, la réduction du domaine d'étude.*

3. On commence par observer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}}\,\frac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}} \underset{\mathrm{e}^{x}\neq 0}{=} \frac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}}.$$

   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \mathrm{e}^{-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \mathrm{e}^{-2x} = 1$, d'après les théorèmes sur les limites de quotient
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.}$$

   Commentaires : *N'oubliez pas que toute simplification ne peut se faire que si le terme à simplifier est non nul. Ici, e^{x}.* Par parité, on en déduit que :
$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1.}$$

   Commentaires : *Absolument inutile de calculer les deux limites après avoir prouvé l'imparité de la fonction. Pire, cela montre que vous n'avez rien compris.*

   La courbe de f admet donc deux asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$ d'équation respectives $y = 1$ et $y = -1$.

   Commentaires : *Encore une fois, on donne les conséquences graphiques.*

4. Pour tout x réel, $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} \neq 0$. La fonction f, quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ y est dérivable et on a :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)^2 - \left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right)^2}{\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)^2} = \frac{4}{\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)^2} > 0.$$

   Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit son tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	-1	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	1

Comme toute fonction continue et impaire, la courbe de f passe par l'origine du repère. Avec $f'(0) = \dfrac{4}{2^2} = 1$, l'équation de la tangente à la courbe en 0 est :

$$\boxed{(\Delta_0) : \; y = x.}$$

5 D'après les questions précédentes, f est continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable) et strictement monotone. Elle établit donc une bijection de $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ sur son image $\mathrm{J} = f(\mathrm{I}) =]-1\,;1[$.

Commentaires :

- *N'oubliez pas de préciser que $]-1\,;1[$ est $f(\mathrm{I})$.*
- *Il est inutile et globalement faux de préciser séparément injectivité et surjectivité. Si vous le faites bien pour l'injectivité, ce n'est pas le cas pour la surjectivité qui est, certes, lié à la continuité mais pas que. Des résultats plus fins que nous verrons plus tard se cachent dans le théorème de la bijection.*

  En un mot, justifiez simplement que f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, le théorème de la bijection vous assure alors que f est une bijection de I sur $f(\mathrm{J})$. Sa réciproque sera, en outre, continue et de même stricte monotonie sur $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$ à valeurs dans I.

6 g^{-1} est la réciproque d'une fonction strictement croissante de I sur J. Elle est donc elle-même $\boxed{\text{strictement croissante de J sur I}}$.

Comme f est dérivable sur I (ouvert) et dont la dérivée ne s'y annule pas, d'après le théorème de la bijection, sa réciproque g est donc $\boxed{\text{dérivable sur J}}$ et on a :

$$\boxed{\forall\, y \in \mathrm{J}, \quad g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{\frac{4}{\left(\mathrm{e}^{g(y)}+\mathrm{e}^{-g(y)}\right)^2}} = \frac{\left(\mathrm{e}^{g(y)} + \mathrm{e}^{-g(y)}\right)^2}{4}.}$$

Commentaires : *Précisez bien sur quel intervalle on est à chaque fois : I pour f et $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$ pour g.*

7 Soit $(\mathrm{X}, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathrm{J}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{X} - \frac{1}{\mathrm{X}}}{\mathrm{X} + \frac{1}{\mathrm{X}}} = y &\iff \frac{\mathrm{X}^2 - 1}{\mathrm{X}^2 + 1} = y && \text{car } \mathrm{X} > 0 \\
&\iff \mathrm{X}^2 - 1 = y\,(\mathrm{X}^2 + 1) && \text{car } \mathrm{X}^2 + 1 \neq 0 \\
&\iff \mathrm{X}^2(1 - y) = y + 1 && \\
&\iff \mathrm{X}^2 = \frac{1+y}{1-y} && \text{car } 1 - y \neq 0 \text{ pour tout } y \in \mathrm{J} =]-1\,;1[\,.
\end{aligned}$$

De plus, pour tout $y \in \mathrm{J} =]-1\,;1[\,$, $\dfrac{1+y}{1-y} > 0$. Ainsi,

$$\iff \mathrm{X} = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \quad \text{ou} \quad \mathrm{X} = -\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$$

Comme $\mathrm{X} > 0$, on obtient finalement :

$$\iff \mathrm{X} = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}.$$

En bref,

$$\boxed{\frac{\mathrm{X} - \frac{1}{\mathrm{X}}}{\mathrm{X} + \frac{1}{\mathrm{X}}} = y \iff \mathrm{X} = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}.}$$

Commentaires : *Chaque fois que vous écrivez une équivalence, pensez bien à vérifier que c'en est bien une.*

8 Soit $(x, y) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}$. On a les équivalences suivantes :

$$x = g(y) \iff y = f(x) \iff y = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}.$$

Posons $\mathrm{X} = \mathrm{e}^x$, alors $\mathrm{X} \in \mathbb{R}_+^*$ et

$$\begin{aligned} x = g(y) &\iff y = \frac{\mathrm{X} - \frac{1}{\mathrm{X}}}{\mathrm{X} + \frac{1}{\mathrm{X}}} \\ &\iff \mathrm{X} = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \iff \mathrm{e}^x = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \\ &\iff x = \ln\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right) \qquad \text{car } \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} = \mathrm{e}^x > 0. \end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{\forall\, y \in \mathrm{J}, \quad g(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).}$

9 **Méthode 1 :** On a déjà prouvé que g était dérivable sur J. On a alors :

$$\forall\, y \in \mathrm{J}, \quad g'(y) = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{2}{(1-y)^2}}{\frac{1+y}{1-y}} = \frac{1}{(1-y)(1+y)} = \frac{1}{1-y^2}.$$

Méthode 2 : On sait par la question 6. que

$$\forall\, y \in \mathrm{J}, \quad g'(y) = \frac{\left(\mathrm{e}^{g(y)} + \mathrm{e}^{-g(y)}\right)^2}{4},$$

et d'après 8

$$\forall\, y \in \mathrm{J}, \quad g(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

Ainsi, avec $\dfrac{1+y}{1-y} > 0$ sur J,

$$\begin{aligned}
\forall\, y \in \mathrm{J}, \quad g'(y) &= \frac{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)}\right)^2}{4} = \frac{\left(\mathrm{e}^{\ln\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right)} + \mathrm{e}^{\ln\left(\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\right)}\right)^2}{4} \\
&= \frac{\left(\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}} + \sqrt{\dfrac{1-y}{1+y}}\right)^2}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1+y}{1-y} + 2 + \frac{1-y}{1+y}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{(1+y)^2 + 2(1-y^2) + (1-y)^2}{(1-y)(1+y)}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1+2y+y^2+1-2y+y^2+2-2y^2}{1-y^2}\right) = \frac{1}{4}\frac{4}{1-y^2} \\
&= \frac{1}{1-y^2}.
\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall\, y \in \mathrm{J}, \quad g'(y) = \frac{1}{1-y^2}.}$$

10 Dans un repère orthonormé, on trace, dans l'ordre :

- a) les deux asymptotes à $\mathcal{C}_f$,
- b) la tangente (Δ_0),
- c) l'allure de $\mathscr{C}_f$ sur $\mathbb{R}_+$ que l'on complète par symétrie centrale,
- d) les symétriques des asymptotes par rapport à la première bissectrice $y = x$,
- e) la courbe $\mathscr{C}_g$ symétrique de $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette même droite.

On vérifiera que les courbes de f et g sont tangentes à l'origine.

Commentaires :

- *L'étymologie grecque du mot « asymptote » construit à l'aide du préfixe privatif « a » et de « symptôsis » (rencontre) laisse imaginer que deux courbes asymptotes ne se rencontrent pas. Faites donc en sorte de donner cette impression sur vos dessins.*
- *Dans la même idée, Tangente vient du latin « tangere », toucher. En géométrie, la tangente à une courbe en un de ses points est une droite qui « touche » la courbe au plus près au voisinage de ce point. Faites donc en sorte de donner cette idée.*

  Vous ne le savez pas encore mais la différence entre la courbe de th *et sa tangente au voisinage de* 0 *est de l'ordre de* $\dfrac{x^3}{3}$ i.e. *en grand désaccord avec certaines courbes pointues que j'ai vues.*

Commentaires : *Peut-être l'avez vous reconnue, la fonction f était en fait la fonction appelée* tangente hyperbolique, *notée* th :

$$\begin{array}{rccl}
\mathrm{th}: & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1\,;1[\\
& x & & \mathrm{th}\,(x) = \dfrac{\mathrm{sh}\,(x)}{\mathrm{ch}\,(x)} = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}.
\end{array}$$

- *La fonction* th *est impaire.*
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{th}\,(x) = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{th}\,(x) = -1$.
- *La fonction* th *est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et on a :*

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}\,'(x) = 1 - \mathrm{th}^{\,2}(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^{\,2}(x)}.$$

- *La fonction* th *est donc strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

  Comme pour la fonction tangente, on pourrait montrer que la fonction tangente hyperbolique possède un point d'inflexion en l'origine.

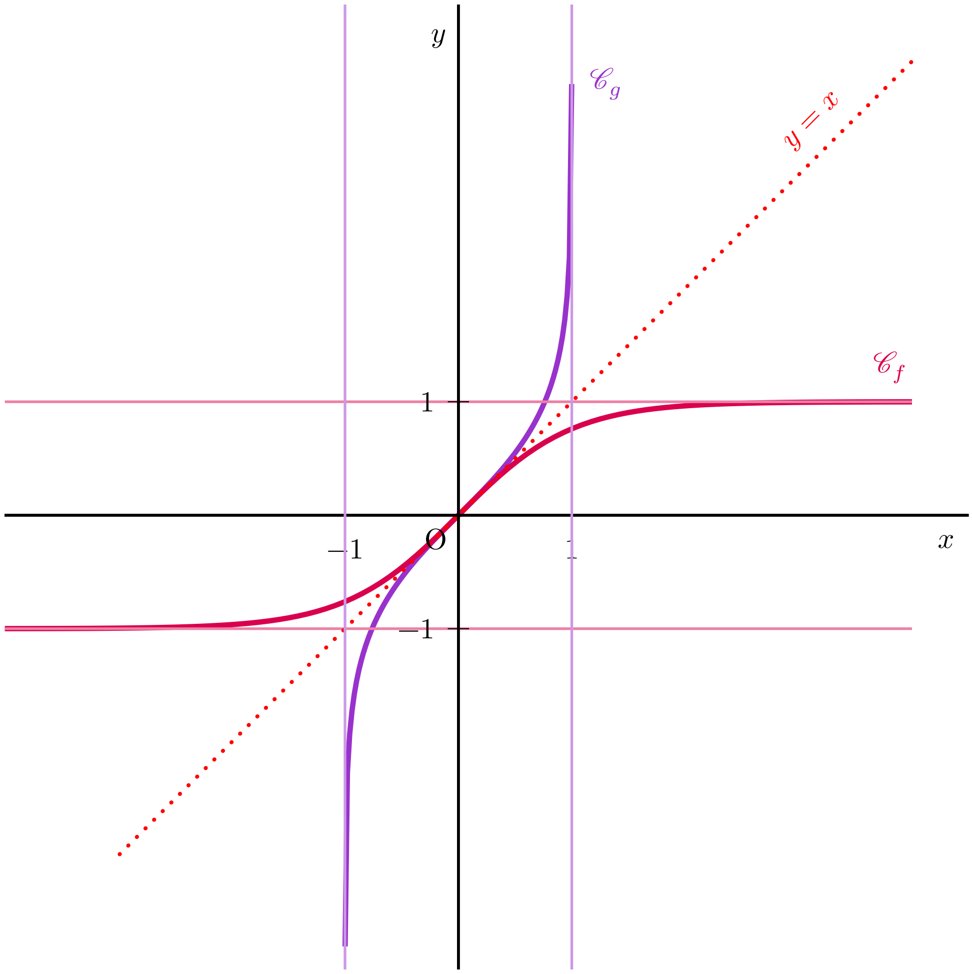

Figure IV.1 – Courbe représentative de f sur $\mathbb{R}$ et g sur $]-1\,;1[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\mathrm{th}\,'(x)$		$+$	
th	-1	0	1

Figure IV.2 – Tableau de variation $x \longmapsto \mathrm{th}\,x$ sur $\mathbb{R}$.

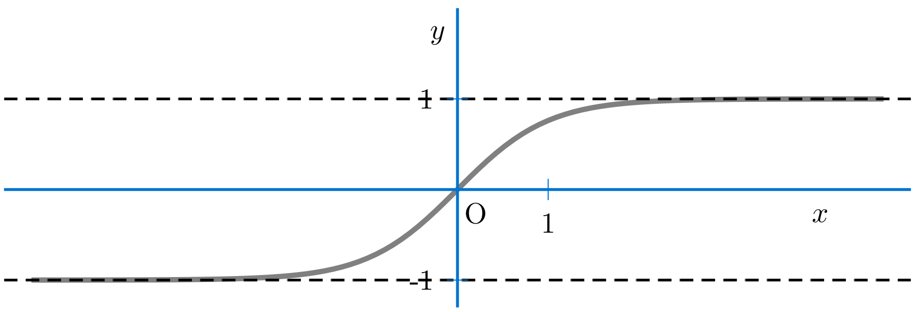

Figure IV.3 – Courbe représentative de $x \longmapsto \mathrm{th}\,(x)$ sur $\mathbb{R}$.

— *La fonction* th *est continue et strictement monotone de* $\mathbb{R}$ *sur* $]-1\,;1[$, *elle y est bijective et permet de définir sa fonction réciproque appelée fonction* argument tangente hyperbolique, *notée* argth , *et définie par :*

$$\mathrm{argth}\ :\ \begin{array}{rcl}]-1\,;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{argth}\,(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right). \end{array}$$

— *La fonction* argth *est continue et dérivable sur* $]-1\,;1[$ *et on a :*

$$\forall\, x \in\,]-1\,;1[\,,\ \operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

En particulier, argth *est strictement croissante sur* $]-1\,;1[$.

— *La fonction* argth *est impaire.*

x	-1		0		1
$\operatorname{argth}'(x)$			$+$		
argth	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Figure IV.4 – Tableau de variation $x \longmapsto \operatorname{th}(x)$ sur $\mathbb{R}$.

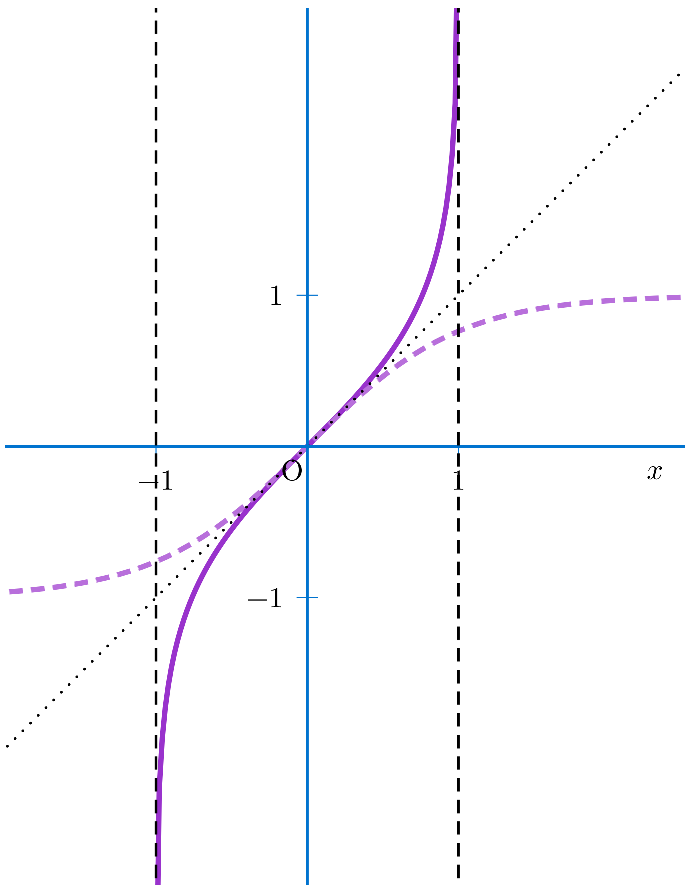

Figure IV.5 – Tableau de variation et courbe représentative de $x \longmapsto \operatorname{argth}(x)$ sur $]-1\,;1[$.
En pointillés, la courbe de th.

Remarque : *Les courbes de* th *et* argth *sont tangentes à l'origine.*

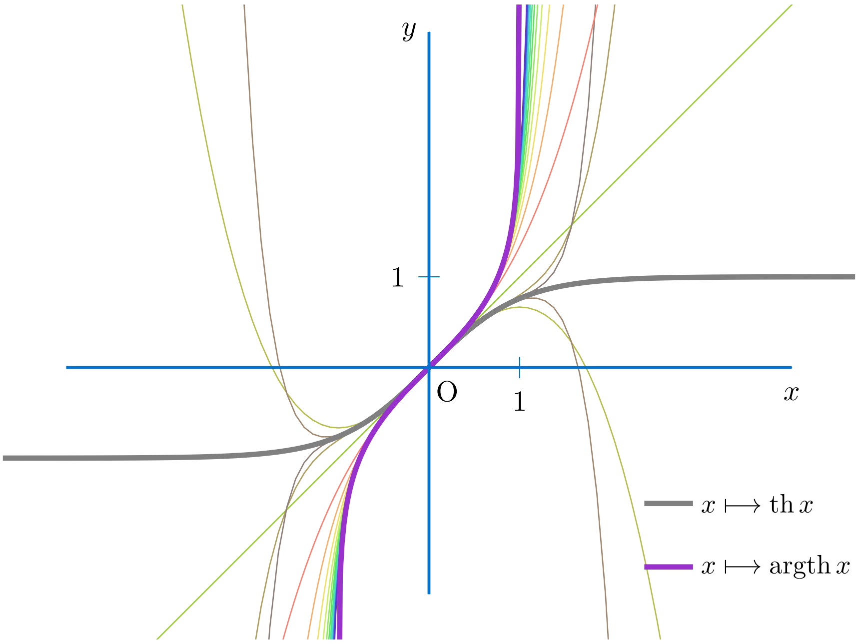

Figure IV.6 – Courbes représentatives de $x \longmapsto \operatorname{th}(x)$ et $x \longmapsto \operatorname{argth}(x)$ ainsi que leur série de Taylor respectivement sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et $]-1\,;1[$.