

Une fonction remarquable

On considère la fonction

$$f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

- 1 Déterminer I le domaine de définition de f .
- 2 Déterminer la parité de f .
- 3 Déterminer les limites de f aux bornes de I.
- 4 Déterminer le tableau de variations complet de f et donner l'équation de la tangente à la courbe en 0.
- 5 Montrer que f définit une bijection de I sur J, où J est un intervalle que l'on déterminera.

On note $g = f^{-1}$ sa réciproque.

- 6 Justifier que g est strictement monotone et dérivable sur J.
Pour tout $y \in J$, exprimer $g'(y)$ en fonction de $e^{g(y)}$ et $e^{-g(y)}$.
- 7 Soit $(X, y) \in \mathbb{R}_+^* \times J$.

Montrer que :

$$\frac{X - \frac{1}{X}}{X + \frac{1}{X}} = y \iff X = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}.$$

- 8 En déduire $g(y)$ pour tout $y \in J$.
- 9 Déterminer g' par deux méthodes.
- 10 Sur un même repère, tracer l'allure des courbes représentatives de f et g sans oublier les tangentes et asymptotes remarquables.