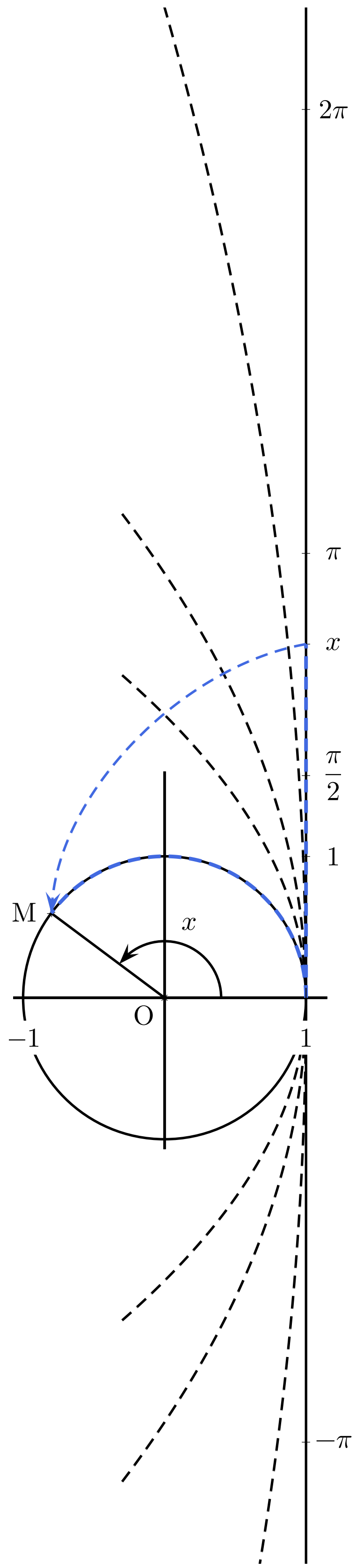
VII

Fonctions circulaires

Contenu

I Le cercle trigonométrique

I.1 Enroulement de l'axe réel sur le cercle trigonométrique



Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\right)$. Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens direct.

En « enroulant » l'axe des réels autour du cercle trigonométrique, on constate qu'à tout réel x est associé un et un seul point M du cercle trigonométrique.

Réciproquement, tout point du cercle trigonométrique est associé à une infinité de réels. Plus précisément, si le point M du cercle trigonométrique est associé à un certain réel x_0, alors les réels associés au point M sont les réels de la forme $x_1 = x_0 + 2k\pi$ où k est un entier relatif.

On dit alors que « *x_0 et x_1 sont égaux modulo 2π* » et on note :

$$x_0 \equiv x_1 \ [2\pi]\,.$$

La relation d'égalité modulo 2π est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

Si M est un point du cercle trigonométrique, tout réel x associé à M par ce procédé est, par définition, une mesure en radian de l'angle orienté $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$.

L'ensemble des mesures en radian de l'angle orienté $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ est donc l'ensemble des réels de la forme $x_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, l'ensemble des réels égaux à x_0 modulo 2π.

On parlera plutôt de *classe d'équivalence* de $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ dont x_0 est un *représentant*.

Lorsque $x_0 \in \left]-\pi\,;\pi\right]$, on parlera alors de *mesure principale* de l'angle.

Exemples 1 :

- 1 radian correspond à l'angle donné par le point du cercle formant un arc de longueur 1.
- Par définition, 2π radian correspond donc à l'angle donné par le point du cercle formant un arc de longueur 2π : le périmètre du cercle !
- La mesure d'un angle orienté en radians est proportionnelle à sa mesure en degrés :

degrés	0	30	45	60	90	180	$x = \dfrac{180}{\pi} \times y$
radians	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$y = \dfrac{\pi}{180} \times x$

- $1\,\text{rad} \simeq 57,3°$ et $1° \simeq 0,0175\,\text{rad}$.

Exercice 1 : Donner la mesure qui appartient à l'intervalle $[0\,;2\pi[$ puis la mesure principale de l'angle dont une mesure vaut :

1. $-\dfrac{9\pi}{10}$
2. $\dfrac{95\pi}{7}$
3. $\dfrac{148\pi}{3}$
4. $3,15$

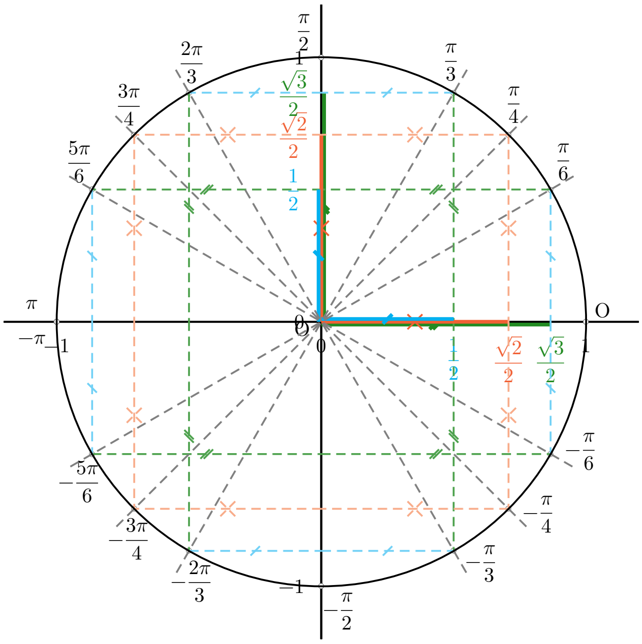


Figure VII.1 – Angles remarquables.

I.2 Autour du cercle trigonométrique

On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ et on note $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique, c'est à dire le cercle de centre O et de rayon 1.

Définition 1 : Pour tout nombre réel x, il existe un unique point M du cercle trigonométrique tel que l'angle orienté $\left(\vec{i}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ ait pour mesure x radians.

- On appelle *cosinus de x*, noté $\cos(x)$, l'abscisse de M.
- On appelle *sinus de x*, noté $\sin(x)$, l'ordonnée de M.

L'abscisse de M est notée $\cos(x)$ et son ordonnée $\sin(x)$, on les appelle le cosinus et le sinus du nombre réel x.

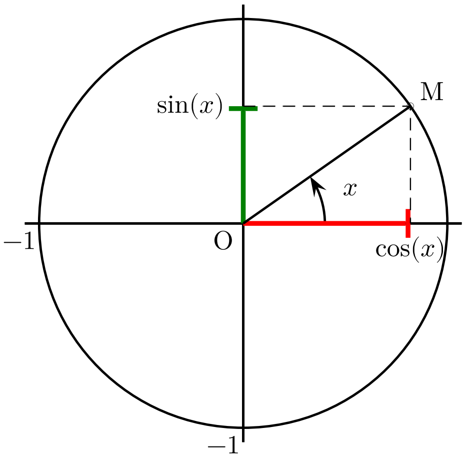


Figure VII.2 – Pour tout nombre réel x, il existe un unique point M du cercle trigonométrique tel que l'angle orienté $\left(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ ait pour mesure x radians.

Triangle rectangle isocèle **Triangle équilatéral**

Figure VII.3 – Relations entre angles et longueurs dans des triangles particuliers.

Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Remarque : La ligne des sinus s'écrit $\frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}$.

Figure VII.4 – Cosinus et sinus d'angles remarquables.

Exercice 2 : Calculer :

1. $\cos(3\pi)$
2. $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$
3. $\cos\left(\frac{64\pi}{2}\right)$

Théorème 1 : Soit x un réel.

- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
- $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \iff |\cos(x)| \leqslant 1$.

  $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \iff |\sin(x)| \leqslant 1$.
- Pour tout $x \in [0\,;2\pi]$,
  - $\cos(x) \geqslant 0 \iff -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.
  - $\sin(x) \geqslant 0 \iff 0 \leqslant x \leqslant \pi$.

- $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$.

Exercice 3 : À quelle condition peut-on écrire $\sin(x) = \sqrt{1-\cos^2 x}$?

Proposition 2 (Trigonométrie et Transformations du plan) : Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin(x)$

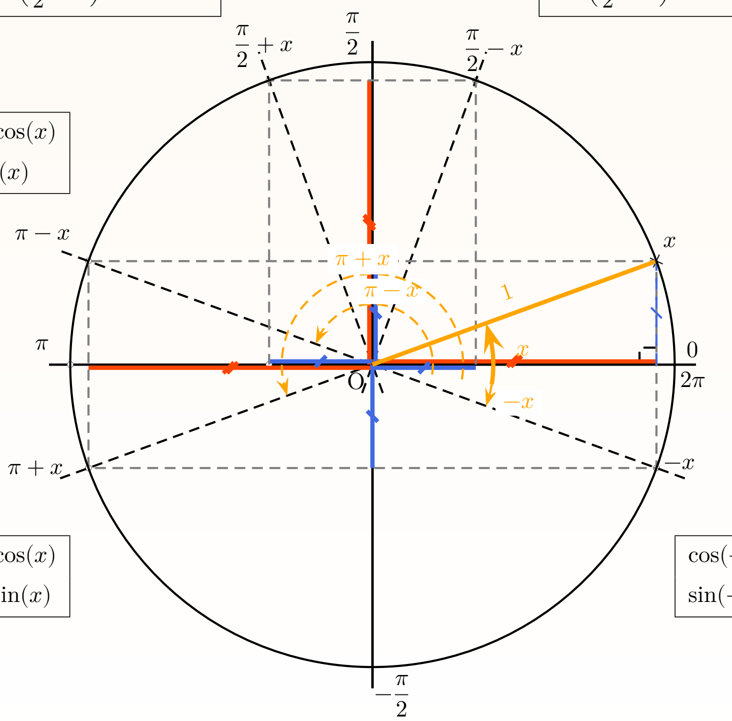
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos(x)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x)$

$\cos(\pi-x) = -\cos(x)$

$\sin(\pi-x) = \sin(x)$



$\cos(\pi+x) = -\cos(x)$

$\sin(\pi+x) = -\sin(x)$

$\cos(-x) = \cos(x)$

$\sin(-x) = -\sin(x)$

Corollaire 2.1 : Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$:

$$\cos(x+k\pi) = (-1)^k\cos(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(x+k\pi) = (-1)^k\sin(x).$$

En particulier, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, $\cos(k\pi) = (-1)^k$ et $\sin(k\pi) = 0$.

Exercice 4 : Simplifier $-\cos(\pi-x)+2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-7\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2\sin(x+3\pi)+3\sin(-x)$.

I.3 Équations trigonométriques

Théorème 3 (Résolution d'équations trigonométriques élémentaires) : Soient a et b deux réels.

$$\begin{array}{rcl} \cos(a)=\cos(b) \iff a \equiv b\ [2\pi] & \text{ou} & a \equiv -b\ [2\pi] \\ \sin(a)=\sin(b) \iff a \equiv b\ [2\pi] & \text{ou} & a \equiv \pi - b\ [2\pi] \end{array}$$

$$\big(\cos(a)=\cos(b) \text{ et } \sin(a)=\sin(b)\big) \iff a \equiv b\ [2\pi]\,.$$

Figure VII.5 – Équations trigonométriques.

Exercice 5 : Sur un cercle trigonométrique, représenter les ensembles suivants :

1. $\cos(x)$ sur $\left[\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{2\pi}{3}\right]$
2. $\sin(x)$ sur $\left[\frac{2\pi}{3}\ ;\ \frac{7\pi}{3}\right]$

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et placer les solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\sin(3x) = \cos(2x)$
3. $\sin(x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$

II Trigonométrie

$$\sin(x) = \frac{\text{Opposé}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{\text{HM}}{\text{OM}}.$$

$$\cos(x) = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{\text{OH}}{\text{OM}}.$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}} = \frac{\text{HM}}{\text{OH}}.$$

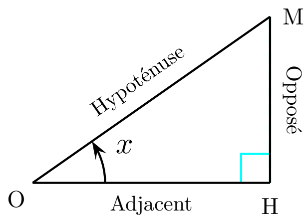
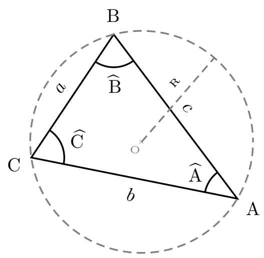


Figure VII.6 – Trigonométrie dans un triangle.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{\mathrm{C}}.$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{\mathrm{B}}.$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{\mathrm{A}}.$$



$$\frac{\sin\widehat{\mathrm{A}}}{a} = \frac{\sin\widehat{\mathrm{B}}}{b} = \frac{\sin\widehat{\mathrm{C}}}{c} = \frac{1}{2\mathrm{R}} = \frac{2\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}}}{abc}.$$

Avec $p = \dfrac{1}{2}(a+b+c)$, on a $\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Figure VII.7 – Théorème d'Al-Kashi, relation des sinus et formule de Héron d'Alexandrie.

II.1 Formules de duplication

Proposition 4 (Formule d'addition) : Pour tous réels a et b, on a :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b). \qquad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b). \qquad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b).$$

Proposition 5 (Formule de duplication) : Pour tout réel a, on a :

- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.
- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$
  $= 2\cos^2(a) - 1$
  $= 1 - 2\sin^2(a)$.

Exercice 7 : Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ |\sin(nx)| \leqslant n\,|\sin(x)|$.

II.2 Formules de linéarisation

Proposition 6 (Formule de linéarisation dite de Carnot) : Soit $a \in \mathbb{R}$:

- $\cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$
- $\sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$.

Proposition 7 : Soient a et b deux réels :

- $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\big[\cos(a-b) + \cos(a+b)\big]$.
- $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}\big[\cos(a-b) - \cos(a+b)\big]$.
- $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\big[\sin(a+b) + \sin(a-b)\big]$.

Exercice 8 :

1. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
2. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.
3. Montrer que $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$.

III FONCTIONS CIRCULAIRES

Définition 2 : La fonction *cosinus* (resp. *sinus*) est la fonction qui à tout réel associe son cosinus (resp. son sinus).

$$\cos\ : x \longmapsto \cos(x) \qquad\qquad \sin\ : x \longmapsto \sin(x).$$

III.1 Domaine de définition, parité et périodicité

Proposition 8 (Cosinus et Sinus) :

- Les fonctions *cos* et sin sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1\,;1]$.
- La fonction cos est *paire*. La fonction sin est *impaire*.

Définition 3 (Fonction périodique) : On dit d'une fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ qu'elle est *périodique de période* T ou T-*périodique* s'il existe un réel $\mathrm{T} > 0$ tel que :

$$\forall\, x \in \mathscr{D}_f,\ x+\mathrm{T} \in \mathscr{D}_f, \quad \text{et} \quad f(x+\mathrm{T}) = f(x). \tag{VII.1}$$

Corollaire 8.1 : Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π.

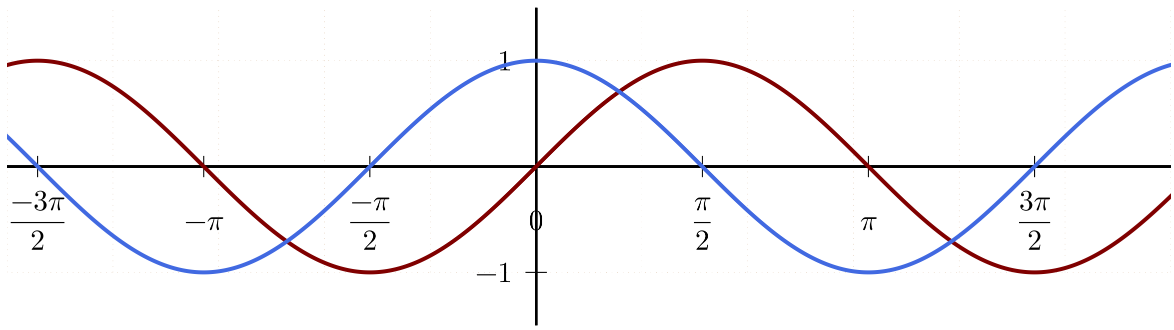


Figure VII.8 – $x \longmapsto \cos(x)$ et $x \longmapsto \sin(x)$ sont 2π-périodiques.

Exercice 9 : Vérifier que la fonction $f : x \longmapsto \sin(6x-3)$ est $\frac{\pi}{3}$-périodique.

Compléments sur les fonctions périodiques :

— Une fonction T-périodique est aussi kT-périodique pour $k \in \mathbb{Z}$.
On appelle *période de f*, le plus petit réels strictement positif T vérifiant (VII.1) :

$$\mathrm{T} = \inf\left\{t \in \mathbb{R}_+^* \,/\, \forall\, x \in \mathscr{D}_f,\ x+t \in \mathscr{D}_f \ \text{ et } \ f(x+t) = f(x)\right\}.$$

ATTENTION Il existe des fonctions périodiques n'admettant pas de période minimale, par exemple $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$.

— Alors qu'une fonction peut être paire ou impaire sur un intervalle borné à condition qu'il soit symétrique par rapport à O, l'invariance par translation du domaine de définition d'une fonction périodique lui impose d'être nécessairement infini.

Exercice 10 : Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$ vérifiant $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 3$ et $f(x+1) = \dfrac{f(x)-5}{f(x)-3}$.
Montrer que f est périodique de période 4.

Proposition 9 (Interprétation graphique) : Une fonction f est T-périodique si, et seulement si sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est invariante par translation de vecteur $\mathrm{T}\vec{\imath}$.

Méthode 1 (Restriction du domaine d'étude) :
Si la fonction est T-périodique, on restreint son étude à un segment de longueur T et on complète la courbe par translations de vecteur $\mathrm{T}\vec{\imath}$.

Exercice 11 : Proposer un domaine d'étude minimal pour $f : x \longmapsto \left(\sin\left(\dfrac{1}{3}x\right) - \sin\left(\dfrac{1}{5}x\right)\right)^2$.

Proposition 10 (Opérations sur les fonctions périodiques) : Soient $\mathrm{T} \in \mathbb{R}_+^*$, $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions T-périodiques.

- Les fonctions $f+g$, $f \times g$ sont aussi T-périodiques, ainsi que $\dfrac{f}{g}$ si g ne s'annule pas.
- Pour tout $a > 0$, $\forall\, b \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto f(ax+b)$ est $\dfrac{\mathrm{T}}{a}$-périodique.

Exemple 2 : La fonction $x \longmapsto \cos(5x)$ est $\dfrac{2\pi}{5}$-périodique et un domaine d'étude sera $\left[0\,;\dfrac{\pi}{5}\right]$ par périodicité et parité.

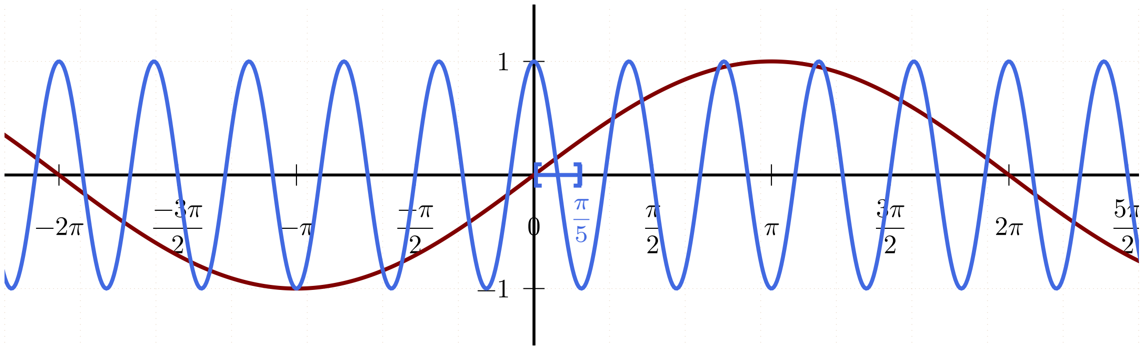


Figure VII.9 – $x \longmapsto \cos(5x)$ et $x \longmapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.
En physique, on parle de dilatation temporelle.

III.2 Continuité, dérivabilité

Théorème 11 (Continuité) : Les fonctions cosinus et sinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

Théorème 12 (Nombres dérivés en 0) :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0.$$

Le théorème (12) permet surtout d'affirmer que les fonctions sin et cos sont dérivables en 0. En effet, les taux d'accroissement en 0 de ces fonctions s'écrivent :

$$\frac{\sin(0+x)-\sin(0)}{x} = \frac{\sin(x)}{x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\cos(0+x)-\cos(0)}{x} = \frac{\cos(x)-1}{x}.$$

D'où, $\boxed{\left(\sin(x)\right)'(0) = 1}$ et $\boxed{\left(\cos(x)\right)'(0) = 0.}$

Remarque : Les courbes représentatives des fonctions cos et sin admettent ainsi, respectivement, comme tangente à l'origine les droites d'équation :

$$(\mathrm{T}_{\cos}) : y = 1 \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{T}_{\sin}) : y = x.$$

Exercice 12 :

1. Montrer que $\dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ puis $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{x}$.

Théorème 13 (Dérivabilité) : Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$\cos'(x) = -\sin(x) \qquad \text{et} \qquad \sin'(x) = \cos(x).$$

Corollaire 13.1 (Fonctions composées) : Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Alors, les fonctions $\cos u$ et $\sin u$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\Big(\cos\big(u(x)\big)\Big)' = -u'(x) \times \sin\big(u(x)\big) \quad \text{et} \quad \Big(\sin\big(u(x)\big)\Big)' = u'(x) \times \cos\big(u(x)\big).$$

Exercice 13 : Déterminer le domaine de dérivabilité $\mathscr{D}_f$ et calculer la fonction dérivée de $f : x \longmapsto \dfrac{\cos(x)+2}{\sin^2(x)+2}$.

III.3 Variations et représentation graphique

Théorème 14 :

- La fonction cosinus est décroissante sur $[0\,;\pi]$.
- La fonction sinus est croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ puis décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$-\sin(x)$		$+$	0	$-$	
$\cos$	-1 ↗	0 ↗	1	↘ 0	↘ -1

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos(x)$		$+$	0	$-$	
$\sin$	-1 ↗	0 ↗	1	↘ 0	↘ -1

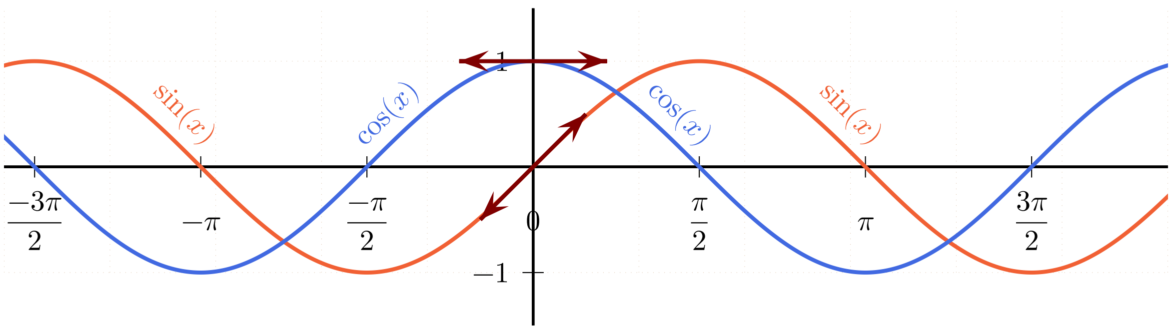


Figure VII.10 – Tableaux de variation et courbes représentatives des fonctions $x \longmapsto \cos(x)$ et $x \longmapsto \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 14 : Étudier la fonction $f : x \longmapsto \sin^2(x) + \cos(x)$ et préciser les intersections de sa courbe représentatif avec l'axe des abscisses.

IV Fonctions circulaires réciproques

IV.1 Arccosinus et Arcsinus

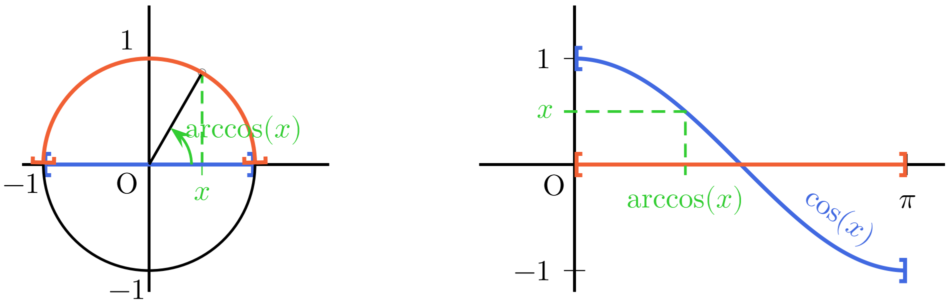


Figure VII.11 – La fonction cos est continue strictement décroissante de $[0\,;\pi]$ sur $[-1\,;1]$. Elle y réalise donc une bijection.

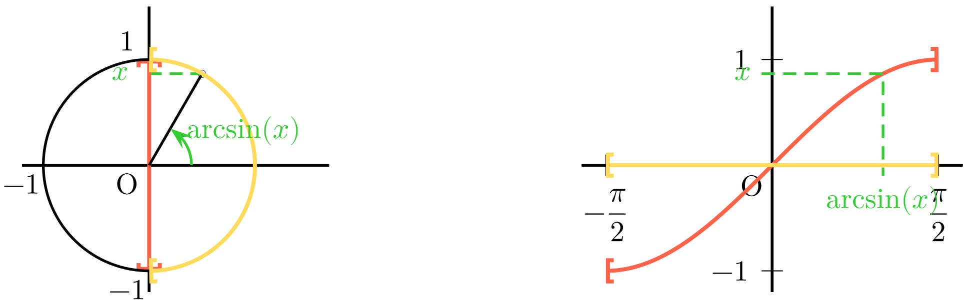


Figure VII.12 – La fonction sin est continue strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1\,;1]$. Elle y réalise donc une bijection.

Définition 4 (Arccosinus et Arcsinus) : On appelle :

- fonction *arccosinus*, notée arccos, la bijection réciproque de la fonction $\cos_{|[0;\pi]}$ corestreinte à $[-1\,;1]$.
- fonction *arcsinus*, notée arcsin, la bijection réciproque de la fonction $\sin_{|[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]}$ corestreinte à $[-1\,;1]$.

Pour x dans $[-1\,;1]$, $\arccos(x)$ est l'angle de $[0\,;\pi]$ dont le cosinus vaut x. Même chose pour $\arcsin(x)$ avec le sinus dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Corollaire IV.1 (Formule de réciprocité) : Les fonctions arccos et arcsin sont définies sur $[-1\,;1]$ et on a :

- $\forall x \in [-1\,;1],\quad \cos\big(\arccos(x)\big) = x.$
- $\forall x \in [0\,;\pi],\quad \arccos\big(\cos(x)\big) = x.$
- $\forall x \in [-1\,;1],\quad \sin\big(\arcsin(x)\big) = x.$
- $\forall x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right],\quad \arcsin\big(\sin(x)\big) = x.$

Exemples 3 (Arccosinus) :

- $\arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

- $\cos\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- $\arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

Mais **ATTENTION** $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \neq -\frac{\pi}{6}$.

Exemples 4 (Arcsinus) :

- $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ et $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.
- $\sin\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- $\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Mais **ATTENTION** $\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \neq \frac{3\pi}{4}$.

Exercice 15 : Étudier la parité et la périodicité puis tracer la courbe de la fonction $x \longmapsto \arccos(\cos(x))$ sur $\mathbb{R}$.

IV.2 Dérivabilité

Proposition 15 :

- Les fonctions arccos et arcsin sont continues sur $[-1\,;1]$ et dérivables sur $]-1\,;1[$ et on a :

$$\forall\, x \in\,]-1\,;1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos'(x).$$

  En particulier,

  - la fonction arccos est strictement décroissante sur $[-1\,;1]$.
  - la fonction arcsin est strictement croissante sur $[-1\,;1]$.
- La fonction arcsin est impaire.

Remarques :

— La courbe de arcsin est donc symétrique par rapport à l'origine et on pourrait montrer, si c'était au programme, que le courbe de arccos admet le point $\left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$ comme centre de symétrie.

— En particulier, les courbes représentatives des fonctions arccos et arcsin admettent, respectivement, comme tangentes à l'origine les droites d'équation :

$$(\mathrm{T}_{\arccos}) : \; y = \frac{\pi}{2} - x \quad \text{et} \quad (\mathrm{T}_{\arcsin}) : \; y = x.$$

— Les fonctions arccos et arcsin ne sont pas donc pas dérivables en 1 et -1 mais leur courbe représentative y admet deux demi-tangentes verticales.

Exercice 16 : Montrer que, $\forall\, x \in [-1\,;1]$, $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.

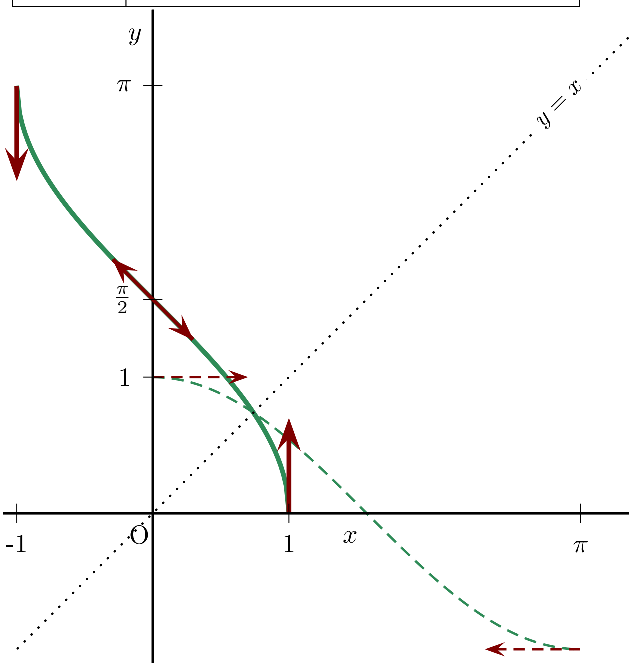
Corollaire 15.1 : Pour toute fonction u dérivable sur un intervalle I à valeurs dans $]-1\,;1[$, $\arccos(u)$ et $\arcsin(u)$ sont dérivables sur I et on a :

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad \Big(\arcsin(u)\Big)'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} = -\Big(\arccos(u)\Big)'(x).$$

IV.3 Courbes représentatives

x	-1		0		1
arccos	π	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

x	-1		0		1
arcsin	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$



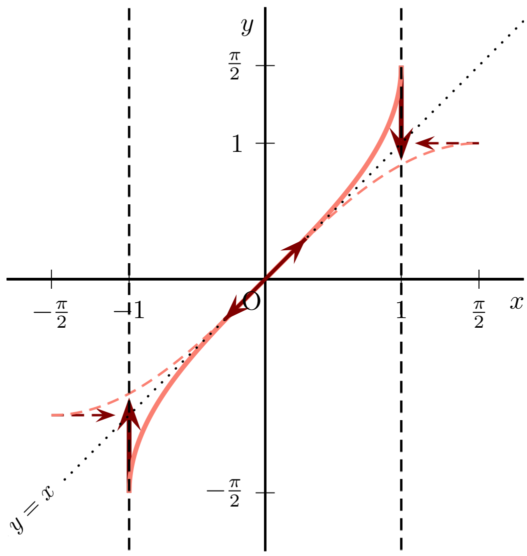
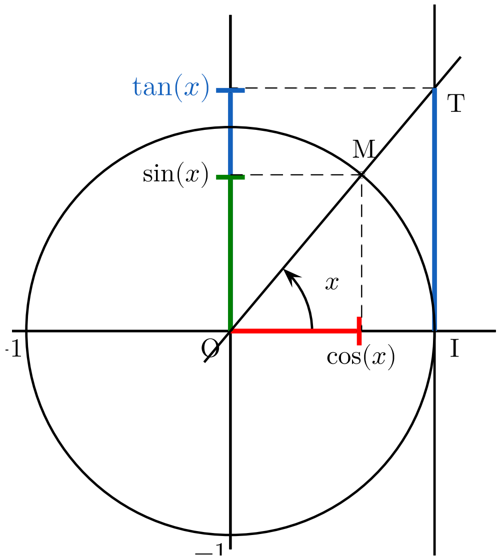


Figure VII.13 – Tableaux de variation et courbes représentatives de $x \longmapsto \arccos(x)$ et $x \longmapsto \arcsin(x)$ sur $[-1\,;1]$.
En dash, les courbes de cos et sin.

Remarque : Les courbes de sin et arcsin sont également tangentes à l'origine.

V Fonctions tangente et réciproque

V.1 Fonction tangente



Lorsque $x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$, on note T l'intersection de (OM) avec la tangente au cercle en $\mathrm{I}(1,0)$.

L'ordonnée de T est appelée **tangente de** x, notée $\tan(x)$.
En considérant des longueurs algébriques, d'après le théorème de Thalès appliqué au triangle OIT, on a :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Figure VII.14 – $\tan(x)$ pour $x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Pour tout x réel, $\cos(x) \neq 0 \iff x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Définition 5 (Tangente) : On appelle fonction *tangente*, notée tan, la fonction définie par :

$$\forall\, x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[,\ \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Proposition 16 (Domaine d'étude) :

- La fonction tan est impaire.
- La fonction tan est π-périodique.
- La fonction tan est continue et dérivable sur tout intervalle de la forme $\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ où $k \in \mathbb{Z}$ et on a :

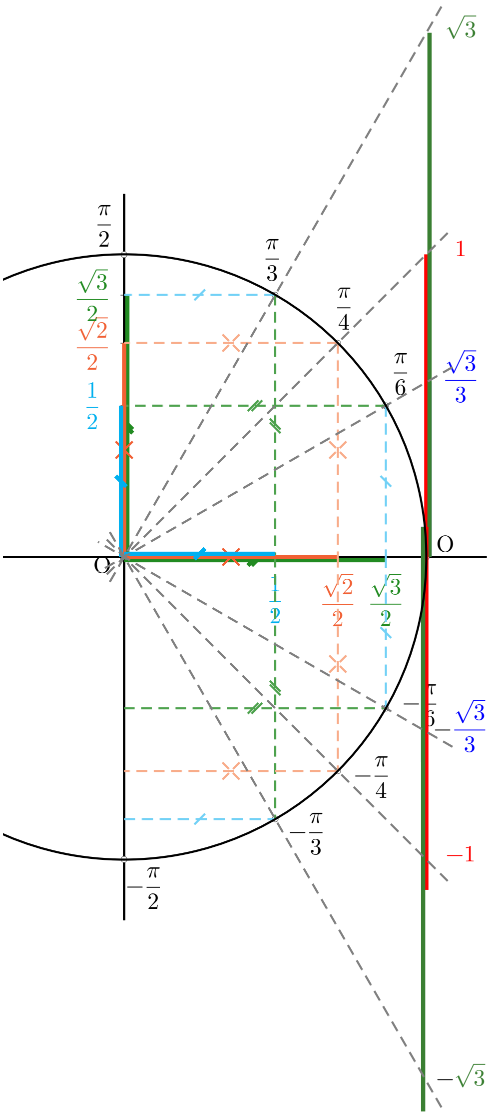
$$\forall\, x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[,\ \tan'(x) = 1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

En particulier, la fonction tan est strictement croissante sur tout intervalle de la forme $\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$.

On étudiera donc la fonction tan sur l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et on complètera la courbe représentative par symétrie centrale puis translations de vecteur $\pi\vec{\imath}$.

Comme $\tan'(0) = 0$, la courbe représentative de tan admet comme tangente à l'origine la droite d'équation :

$$(\mathrm{T}_{\tan}) :\ y = x.$$



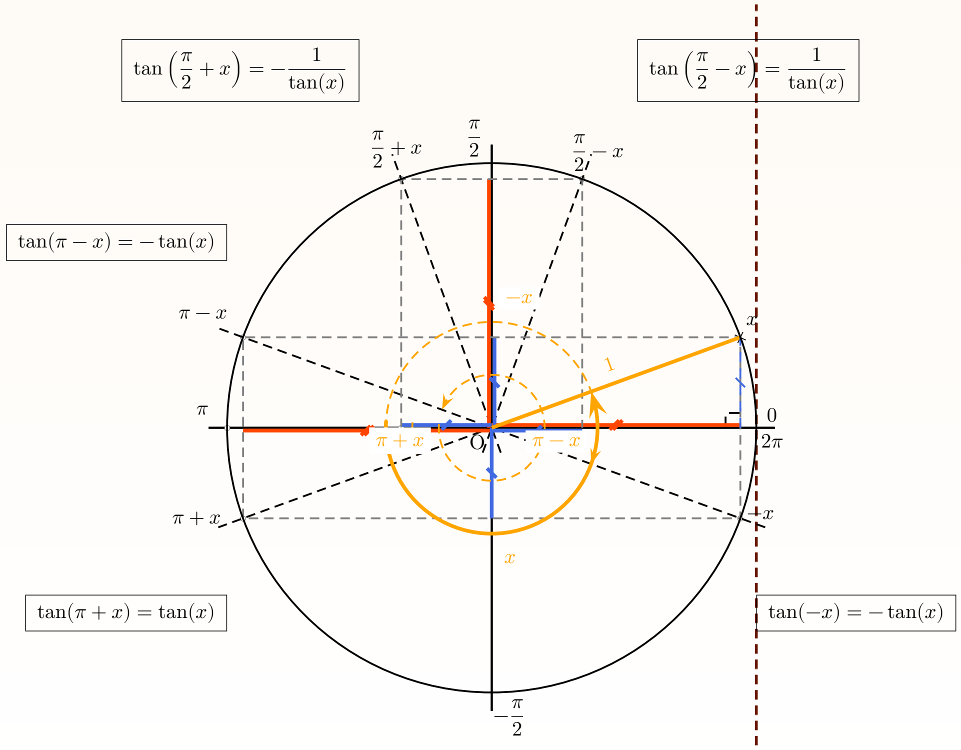
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0

Figure VII.15 – Tangente d'angles remarquables.

Proposition 17 (Trigonométrie et Transformations du plan) : Soit $x \in \mathcal{D}_{tan}$.

Suivant les conditions d'existence, on a :

$$\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[,\ \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$



Exercice 17 : À quelle condition peut-on écrire $\cos(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$.

Proposition 18 (Limite et croissance comparée) :

- $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$.
- $\displaystyle\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$.
- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$.

La courbe représentative admet donc une asymptote d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$ puis, par symétrie et translation, des asymptotes d'équation $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On obtient donc son tableau de variation et sa courbe représentative (VII.17).

Proposition 19 (Équations trigonométriques) :

$$\tan(x) = \tan(y) \iff x \equiv y\ [\pi]\,.$$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\tan'(x)$	||	$+$	1	$+$	||
$\tan$	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ||

Figure VII.16 – Tableau de variation $x \longmapsto \tan(x)$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

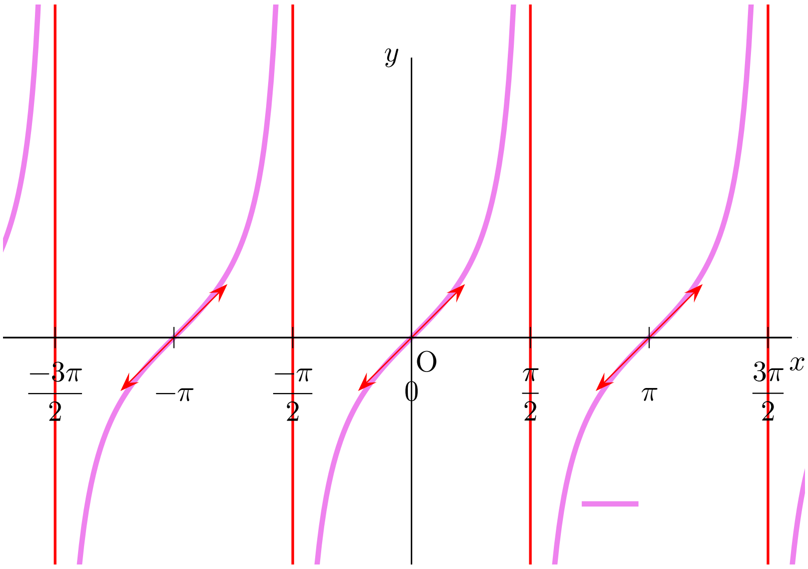


Figure VII.17 – Courbe représentative de $x \longmapsto \tan(x)$ sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$.

Proposition 20 :

Formule d'addition : Pour tout $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\tan(a)$, $\tan(b)$, $\tan(a+b)$ ou $\tan(a-b)$ soient définis.

- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$.
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$.

Formule de duplication : Pour tout $(a\,;\in)\,\mathbb{R}$ tel que $\tan(a)$, $\tan 2a$ soient définis.

$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}.$$

Formule de factorisation par l'angle moitié Soient p et q deux réels tels que $\tan(p)$ et $\tan(q)$ soient définis :

- $\tan(p)+\tan(q) = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos(p)\cos(q)}$.
- $\tan(p)-\tan(q) = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos(p)\cos(q)}$.

Formule de l'angle moitié : Pour tout x réel tel que $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ soit défini.

- $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$.
- $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.
- $\tan(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

Exercice 18 : Sans s'occuper du domaine de définition, exprimer $\dfrac{\cos(x)}{1+\sin(x)}$ en fonction de $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

V.2 Fonction arctangente

La fonction $\tan : \mathcal{D}_{\tan} \longmapsto \mathbb{R}$ n'est pas bijective. Elle n'admet donc pas de réciproque (sur $\mathbb{R}$ s'entend).

La restriction de la fonction tan à $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ est bijective. On la note $\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[}$.

$$\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[} : \begin{array}{ccc} \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[& \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \tan(x) \end{array}$$

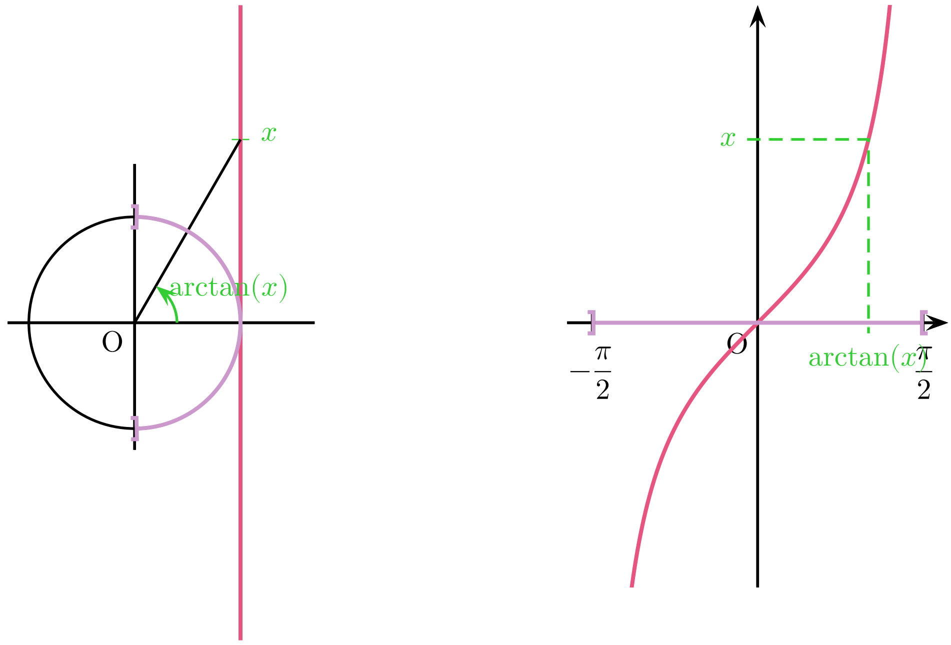


Figure VII.18 – La fonction tan est continue et strictement monotone de $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Elle y réalise donc une bijection.

Définition 6 (Arctangente) : On appelle fonction *arctangente*, notée arctan, la bijection réciproque de la fonction $\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Corollaire 20.1 (Formule de réciprocité) : La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$ et on a :

- $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\tan\left(\arctan(x)\right) = x$.
- $\forall\, x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\arctan\left(\tan(x)\right) = x$.

Exemples 5 :

- $\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.
- $\tan\left(\arctan\left(\sqrt{3}\right)\right) = \sqrt{3}$.
- $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

Mais **ATTENTION** $\arctan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6} \neq \frac{5\pi}{6}$.

Exercice 19 : Montrer que :

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4} \qquad \text{(Hutton, 1776)}$$

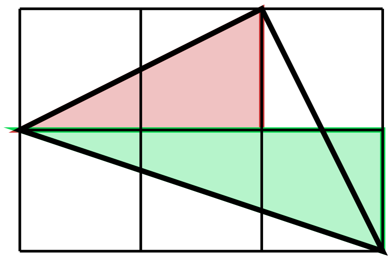


Figure VII.19 – $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Proposition 21 :

- La fonction arctan est continue sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

- La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

  En particulier, arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction arctan est impaire.

En particulier, la courbe représentative de tan admet deux asymptotes en l'infini d'équation $y = \pm\frac{\pi}{2}$ et la première bissectrice comme tangente à l'origine.

Remarque : Les courbes de tan et arctan sont tangentes à l'origine.

Exercice 20 : Étudier les asymptotes de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = (x+1)\arctan x.$$

Corollaire 21.1 : Pour toute fonction u dérivable sur un intervalle I, $\arctan(u)$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ \Big(\arctan(u)\Big)'(x) = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}.$$

Exercice 21 : Étude et représentation graphique de $f : x \longmapsto \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}\right)$.

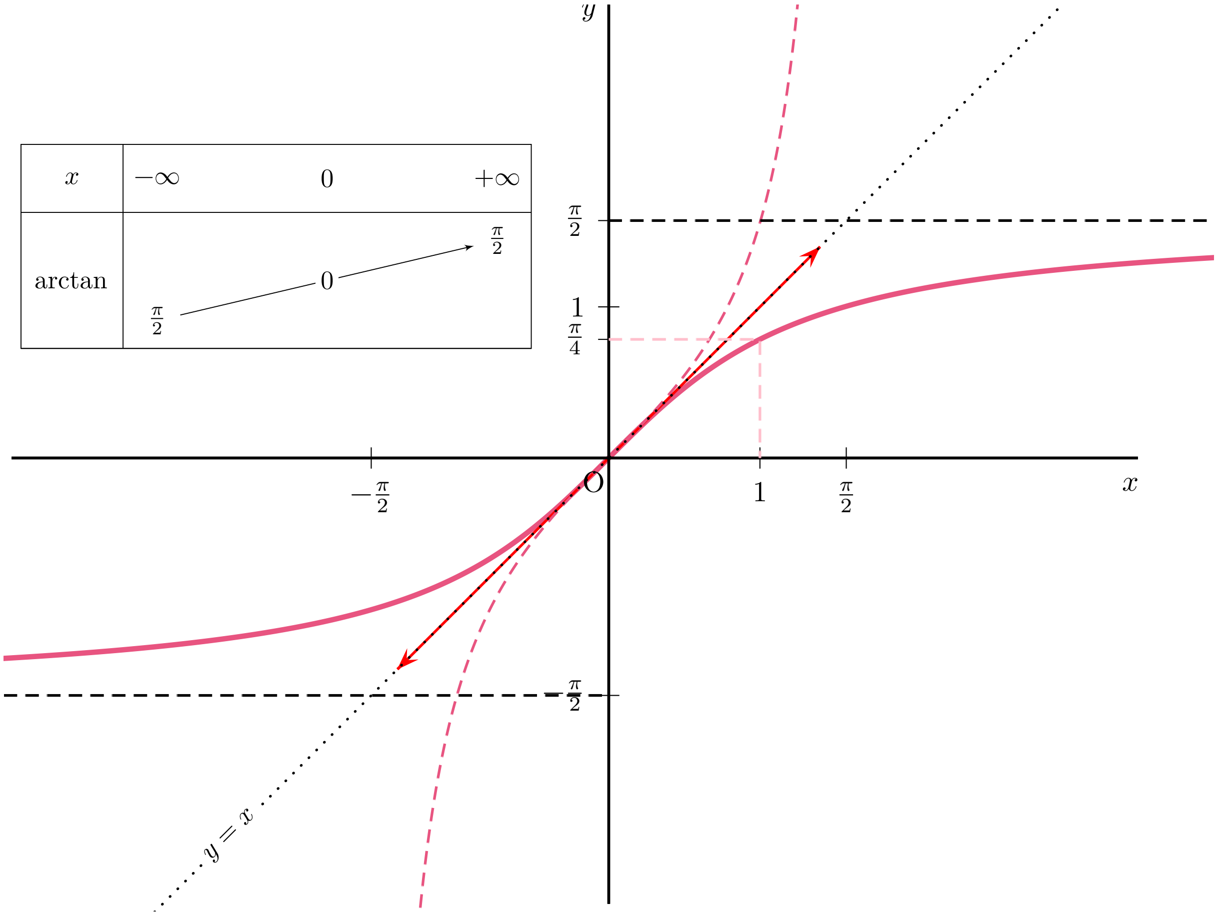


Figure VII.20 – Tableau de variation et courbe représentative de $x \longmapsto \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$. En dash, la courbe de tan.

Proposition 22 : Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = signe(x) \times \frac{\pi}{2}.$$

VI Tableau récapitulatif

$f(x)$	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	$f'(x)$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$		$-\sin(x)$
$\sin(x)$			$\cos(x)$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$		$1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$
$\arccos(x)$	$[-1\,;1]$	$]-1\,;1[$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arcsin(x)$			$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$		$\dfrac{1}{1+x^2}$