

# VIII

## Les Nombres Complexes I



es nombres complexes ont été introduits par Cardan et Bombelli au 16<sup>ème</sup> siècle, comme moyen d'exprimer certaines racines de polynômes de degrés 3 ou 4.

À cette époque, l'introduction des nombres imaginaires (via des racines de réels négatifs) est un pur artifice. La notation  $i$  sera introduite par Euler <sup>[1]</sup> en 1777 pour remplacer la notation  $\sqrt{-1}$  qui n'avait pas de sens.



insi, dès leur origine, les nombres complexes sont introduits pour pallier l'absence de racines (réelles) de certains polynômes comme, par exemple,  $X^2 + 1$ .

On démontrera plus tard que ceci implique que tout polynôme à coefficients complexes se factorise en polynômes de degré 1. C'est, en substance, le théorème de D'Alembert-Gauss qui se réexprime ainsi :

*Tout polynôme non constant, à coefficients complexes, admet au moins une racine.*



e théorème est d'une importance capitale, puisqu'il motive la construction de  $\mathbb{C}$ . Il est conjecturé depuis longtemps déjà lorsque d'Alembert en propose une preuve en 1743. Cette preuve n'est pas satisfaisante, Gauss <sup>[2]</sup> va jusqu'à la qualifier de *petitio principii*, puisqu'elle part de l'hypothèse de l'existence de racines « fictives ».

La première preuve complète et rigoureuse revient à Gauss, au 19<sup>ème</sup> siècle d'où le nom qu'a laissé la postérité à ce théorème.

---

[1]. **Leonhard Euler** (15 avril 1707 - 18 septembre 1783) naît à Bâle. Il étudia les mathématiques sur les conseils de Johann Bernoulli, qui était ami avec son père. Il s'installa à Saint-Petersbourg, auprès de Pierre le Grand, puis à Berlin sous le règne de Frédéric II, où à chaque fois il rencontra un environnement scientifique exceptionnel. Son œuvre est considérable.

Euler intervint dans les trois domaines fondamentaux de la science de son époque : l'astronomie (orbites planétaires, trajectoires des comètes), les sciences physiques (champs magnétiques, hydrodynamique, optique, nature ondulatoire de la lumière, ...), les mathématiques, où il met au premier plan le concept de fonction. On lui doit aussi la très jolie relation entre les nombres de sommets, d'arêtes et de faces d'un polyèdre convexe (ex : le cube, le tétraèdre, ...).

La santé d'Euler était assez fragile. Il perdit son œil droit en 1735, puis son œil gauche en 1771 en raison d'une cataracte. Il fut donc pendant 12 ans totalement aveugle. Cela obligeait ce mathématicien très prolifique, qui publia 886 ouvrages, le tout en 80 volumes, à faire appel à des personnes de son entourage à qui il dictait ses mémoires. Il décède le 18 septembre 1783 à Saint-Petersbourg d'une hémorragie cérébrale.

Une déclaration attribuée à Pierre-Simon de Laplace exprime l'influence d'Euler sur les mathématiques : « Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous. »

[2]. **Carl Friedrich Gauss** (30 avril 1777 [Brunswick] - 23 février 1855 [Göttingen]) est considéré par ses pairs comme le prince des mathématiciens. Il est à la fois le dernier des classiques, et le premier des modernes, c'est-à-dire qu'il a résolu les problèmes les plus classiques avec les méthodes les plus modernes. Par exemple, il démontra comment partager une tarte en 17 parts égales à l'aide des seuls règle et compas, ce qui était un problème ouvert depuis les grecs. Mieux, il démontra pour quels nombres ce partage en parts égales est possible.

Mathématicien et physicien, Carl Friedrich Gauss est une figure incontournable du XIX<sup>ème</sup> siècle, non seulement pour la quantité monumentale de ses découvertes et la profondeur de ses idées, mais aussi pour sa rigueur à laquelle il attachait la plus haute importance. Sa devise, *Pauca sed matura* (peu mais mûr), illustre la précaution que prenait Gauss à ne publier que des textes soigneusement affinés : une de ces phrases célèbres est que « lorsqu'un bel édifice est achevé, on ne doit pas y lire ce qui fut l'échafaudage ». On peut ainsi concevoir qu'il n'ait pas souhaité la publication de certains de ses travaux.

Gauss influencera considérablement la vie mathématique de son époque et de fait annonce la révolution cantonienne.

Gauss est né dans une famille modeste : sa mère était femme de chambre, son père exerçait toute sorte de métiers, du jardinage à la trésorerie d'une société d'assurances. Il est un élève particulièrement précoce. Un épisode célèbre (peut-être romancé!) de son enfance rapporte qu'alors qu'il était âgé de 9 ans, son maître demanda de calculer  $1+2+\dots+100$ . Gauss inscrit presque immédiatement le résultat sur son ardoise, ayant trouvé une méthode extrêmement efficace pour calculer de telles sommes.

À 11 ans, Gauss entre au lycée, où il étudie latin, grec, mathématiques, etc...Il est un élève tellement brillant que le duc de Brunswick souhaite le rencontrer. Visiblement séduit par cet entretien, le duc le prend sous sa protection et lui accorde une bourse : c'est ainsi que Gauss, quoiqu'issu d'une famille modeste, pourra poursuivre ses études.

Il entre à l'université de Göttingen à l'automne 1795. Un an plus tard, après avoir découvert comment construire à la règle et au compas le polygone régulier à 17 côtés, il décide de se consacrer aux mathématiques. Sa thèse, soutenue en 1799, contient la première démonstration du théorème fondamental de l'algèbre. Deux ans plus tard, il publie *Disquisitiones Arithmeticae*, un ouvrage consacré à la théorie des nombres, où il explore des méthodes complètement nouvelles. Cette même année, en 1801, il détermine l'orbite de Cérès, une planète naine du système solaire, apparue furtivement sur les écrans des télescopes au début de 1801, et disparue ensuite. À cette occasion, Gauss introduit un outil fondamental, la méthode des moindres carrés.

En 1831 arrive à Göttingen Wilhelm Weber avec qui Gauss s'entend à merveille. Pendant six ans, jusqu'à ce que Weber soit chassé de l'Université pour avoir protesté contre le régime, les deux savants mènent des recherches sur l'électro-magnétisme. Ainsi, le « gauss » est devenu l'unité d'induction magnétique.

## Contenu

I. L'ensemble des nombres complexes .....	<b>3</b>
I.1 Construction de $\mathbb{C}$ .....	4
I.2 Conjugué d'un nombre complexe .....	8
I.3 Équations dans $\mathbb{C}$ (prélude) .....	11
II. Nombres et Plan complexes .....	<b>12</b>
II.1 Représentation des nombres complexes .....	13
II.2 Module d'un nombre complexe .....	14
II.3 Inégalité triangulaire .....	16
III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$ .....	<b>17</b>
III.1 Fonctions vectorielles .....	17
III.2 Notation d'Euler .....	20
III.3 Nombres complexes de module 1 .....	21
IV. Forme polaire .....	<b>23</b>
IV.1 Forme trigonométrique et exponentielle .....	23
IV.2 Règles de calcul en notation exponentielle .....	28
IV.3 Argument d'un nombre complexe .....	29
IV.4 Exponentielle complexe .....	30
V. Applications à la trigonométrie .....	<b>33</b>
V.1 Formule d'Euler et de Moivre .....	34
V.2 Linéarisation des puissances de cosinus et sinus .....	36
V.3 Factorisation par l'angle de l'arc moitié .....	36
V.4 Calculs de sommes de cosinus et sinus .....	37
V.5 « Délinéarisation » ou Polynômes de Tchebychev .....	38
V.6 Factorisation de sommes de cosinus et de sinus .....	39



## I L'ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

On suppose l'ensemble  $\mathbb{R}$  des réels muni de ces deux opérations  $+\mathbb{R}$  et  $\times\mathbb{R}$  connu et on construit un nouvel ensemble que l'on munit également de ses propres lois :

**I.1 Construction de  $\mathbb{C}$**

**Définition 1 (L'ensemble des nombres complexes) :** On appelle ensemble des *nombre complexes*, noté  $\mathbb{C}$ , l'ensemble  $\mathbb{R}^2$  muni des opérations  $+_{\mathbb{C}}$  et  $\times_{\mathbb{C}}$  définies par :

- $(a; b) +_{\mathbb{C}} (a'; b') = (a +_{\mathbb{R}} a'; b +_{\mathbb{R}} b')$ ,
- $(a; b) \times_{\mathbb{C}} (a'; b') = (a \times_{\mathbb{R}} a' -_{\mathbb{R}} b \times_{\mathbb{R}} b'; a \times_{\mathbb{R}} b' +_{\mathbb{R}} a' \times_{\mathbb{R}} b)$ .

On note :

$$1_{\mathbb{C}} = (1; 0) \quad \text{et} \quad i = (0; 1).$$

L'application  $i_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$  est une injection qui permet alors de considérer que  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$   

$$a \qquad (a; 0)$$
et d'identifier tout réel  $x$  au complexe  $(x; 0)$ .

Muni de cette identification, on a immédiatement quelques propriétés :

**Proposition 1 (Identification des lois de  $\mathbb{R}$  et de  $\mathbb{C}$ ) :**

**1** Soient  $z = (a; b)$  et  $z' = (a'; b')$  deux nombres complexes.

$$z =_{\mathbb{C}} z' \iff \begin{cases} a =_{\mathbb{R}} a' \\ b =_{\mathbb{R}} b' \end{cases}$$

**2** Les lois  $+_{\mathbb{C}}$  et  $\times_{\mathbb{C}}$  prolongent celles de  $\mathbb{R}$  :

**3** Les lois  $+_{\mathbb{C}}$  et  $\times_{\mathbb{C}}$  sont associatives et commutatives.

**4**  $\times_{\mathbb{C}}$  est distributive sur  $+_{\mathbb{C}}$ .

**5** La loi  $+_{\mathbb{C}}$  possède un *élément neutre*  $0_{\mathbb{C}} = (0; 0)$  que l'on notera encore 0.

Tout nombre complexe  $z = (a; b)$  possède un symétrique pour  $+_{\mathbb{C}}$  appelé *opposé de  $z$*  et noté  $-z$  et tel que :

$$-z = (-a; -b).$$

**6** La loi  $\times_{\mathbb{C}}$  possède un *élément neutre*  $1_{\mathbb{C}} = (1; 0)$  que l'on notera encore 1.

Tout nombre complexe  $z = (a; b)$  non nul possède symétrique pour  $\times_{\mathbb{C}}$  appelé *inverse de  $z$*  et noté  $\frac{1}{z}$  et tel que :

$$\frac{1}{z} = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}; -\frac{b}{a^2 + b^2} \right).$$

**7** Enfin, le nombre  $(0; 1)$  est tel que  $(0; 1)^2 = (-1; 0)$ . On le notera  $i$ .

En particulier, on a :

$$i^2 = -1.$$

L'assertion **2** permet de noter, par abus de langage, les lois  $+_{\mathbb{C}}$  et  $\times_{\mathbb{C}}$  plus simplement par  $+$  et  $\times$ .

**Preuve :**

**1** D'après la définition de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(a; b) = (a'; b') \iff a = a' \text{ et } b = b'$ .

$$\boxed{2} \quad \forall a, a' \in \mathbb{R}, (a; 0) +_{\mathbb{C}} (a'; 0) = (a +_{\mathbb{R}} a'; 0) = a +_{\mathbb{R}} a'.$$

$$\boxed{3} \quad \text{Il suffit de calculer et comparer } (a; b) \times_{\mathbb{C}} (a'; b') \text{ et } (a'; b') \times_{\mathbb{C}} (a; b).$$

Même chose avec  $(a; b) \times_{\mathbb{C}} ((a'; b') \times_{\mathbb{C}} (a''; b''))$  et  $(a; b) \times_{\mathbb{C}} (a'; b') \times_{\mathbb{C}} (a''; b'')$ .

La commutativité permettant de montrer la dernière égalité avec  $((a; b) \times_{\mathbb{C}} (a'; b')) \times_{\mathbb{C}} (a''; b'')$ .

On montrera les mêmes propriétés de la même façon pour la loi  $+_{\mathbb{C}}$  et on remarquera bien que celles-ci sont induites par les propriétés des lois  $+_{\mathbb{R}}$  et  $\times_{\mathbb{R}}$ .

$$\boxed{4} \quad \text{Idem avec } (a; b) \times_{\mathbb{C}} ((a'; b') +_{\mathbb{C}} (a''; b'')) \text{ et } (a; b) \times_{\mathbb{C}} (a'; b') +_{\mathbb{C}} (a; b) \times_{\mathbb{C}} (a''; b'').$$

$$\boxed{5} \quad \forall z = (a; b) \in \mathbb{C}, (a; b) +_{\mathbb{C}} (0; 0) = (0; 0) +_{\mathbb{C}} (a; b) = (a; b).$$

Donc  $0_{\mathbb{C}} = (0; 0)$  est élément neutre pour  $+_{\mathbb{C}}$ .

$$\text{De plus } z +_{\mathbb{C}} (-a; -b) = (a +_{\mathbb{R}} (-a); b +_{\mathbb{R}} (-b)) = (0; 0).$$

Par commutativité de  $+_{\mathbb{C}}$  on a également  $(-a; -b) +_{\mathbb{C}} z = (0; 0)$ .

Donc, tout nombre complexe  $z$  possède un symétrique pour  $+_{\mathbb{C}}$  appelé opposé de  $z$  et noté  $-z$ .

$$\boxed{6} \quad \forall z = (a; b) \in \mathbb{C}, (a; b) \times_{\mathbb{C}} (1; 0) = (1; 0) \times_{\mathbb{C}} (a; b) = (a; b).$$

Donc  $1_{\mathbb{C}} = (1; 0)$  est élément neutre pour  $\times_{\mathbb{C}}$ .

De plus,  $\forall z = (a; b) \neq (0; 0)$ ,  $a^2 + b^2 \neq 0$  et on a :

$$\begin{aligned} z \times_{\mathbb{C}} \left( \frac{a}{a^2 + b^2}; -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) &= \left( a \times_{\mathbb{R}} \frac{a}{a^2 + b^2} +_{\mathbb{R}} b \times_{\mathbb{R}} \frac{b}{a^2 + b^2}; -a \times_{\mathbb{R}} \frac{b}{a^2 + b^2} +_{\mathbb{R}} \frac{a}{a^2 + b^2} \times_{\mathbb{R}} b \right) \\ &= \left( \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}; \frac{-ab + ab}{a^2 + b^2} \right) = (1; 0). \end{aligned}$$

Par commutativité de  $\times_{\mathbb{C}}$  on a également  $\left( \frac{a}{a^2 + b^2}; -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) \times_{\mathbb{C}} z = (1; 0)$ .

Tout nombre complexe  $z$  non nul admet donc un symétrique pour  $\times_{\mathbb{C}}$  appelé inverse de  $z$  et noté  $\frac{1}{z}$ .

$$\boxed{7} \quad \text{Il suffit de calculer :}$$

$$(0; 1)^2 = (0; 1) \times_{\mathbb{C}} (0; 1) = (0 \times_{\mathbb{R}} 0 -_{\mathbb{R}} 1 \times_{\mathbb{R}} 1; 0 \times_{\mathbb{R}} 1 +_{\mathbb{R}} 0 \times_{\mathbb{R}} 1) = (-1; 0) = -(1; 0) = -1.$$

Si cela était au programme, la **proposition (1)** pourrait simplement se résumer en disant que  $(\mathbb{C}, +, \times)$  est un corps commutatif.

En particulier, on retrouve grâce à **6** que :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad zz' = 0 \iff z = 0 \quad \text{ou} \quad z' = 0.$$

**Preuve :** Si  $zz' = 0$  et  $z \neq 0$  alors  $\frac{1}{z}$  existe et on a  $\frac{1}{z} \times zz' = 0 \iff z' = 0$ . La réciproque est évidente.

**Définition/Théorème 2 (Forme algébrique) :** Tout nombre complexe  $z = (a; b)$  peut s'écrire de manière *unique* la forme :

$$z = a + ib, \quad \text{avec } (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1.$$

- Le nombre réel  $a$  s'appelle la *partie réelle* de  $z$  notée  $\text{Re}(z)$ .

Si  $\text{Re}(z) = 0$ , on dit que  $z$  est un *imaginaire pur* et on note  $i\mathbb{R}$  leur ensemble.

- Le nombre réel  $b$  s'appelle la *partie imaginaire* de  $z$  notée  $\text{Im}(z)$ .

Si  $\text{Im}(z) = 0$ , le nombre complexe  $z$  est *réel* dont l'ensemble est noté  $\mathbb{R}$

- L'écriture  $z = a + ib$  est appelée la *forme algébrique* de  $z$ .

Globalement, comprenez que  $\mathbb{C}$  contient  $\mathbb{R}$ , que les opérations possèdent les mêmes propriétés que celles de  $\mathbb{R}$  à la différence près que l'on remplacera  $i^2$  par  $-1$  et que l'on regroupera les réels et les réels facteurs de  $i$  pour obtenir la forme algébrique d'un nombre complexe.

**Preuve :**

**Existence :** Soit  $z = (a; b)$  un nombre complexe. On a :

$$\begin{aligned} z = (a; b) &\Leftrightarrow (a; 0) + (0; b) \Leftrightarrow z = (a; 0) + b \times (0; 1) \\ &\Leftrightarrow z = (a; 0) + (b; 0) \times i \\ &\Leftrightarrow z = a + ib. \end{aligned}$$

**Unicité :** Soient deux couples de réels  $(a; b)$  et  $(a'; b')$  tels que  $z = a + ib = a' + ib'$ .

$$\text{On a alors } a - a' = (b' - b)i \Leftrightarrow (a - a'; 0) = (0; b' - b) \Leftrightarrow a = a' \text{ et } b = b'.$$

**Exemples 1 :**

- $z_1 = 4 + 7i - (2 + 4i) = 4 + 7i - 2 - 4i = 2 + 3i.$
- $z_2 = (2 + i)(3 - 2i) = 6 - 4i + 3i - 2i^2 = 6 - i + 2 = 8 - i.$
- $z_3 = (4 - 3i)^2 = 16 - 24i + (3i)^2 = 7 - 24i.$

**Exemples 2 :**

- $\text{Re}(\sqrt{3} - i) = \sqrt{3}$  et  $\text{Im}(\sqrt{3} - i) = -1.$
- $\text{Re}(4i) = 0$  et  $\text{Im}(4i) = 4.$

**Remarques :**  $\text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ . En particulier,  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

**Méthode 1 (Montrer qu'un nombre complexe est réel ou imaginaire) :**

Pour montrer qu'un nombre complexe est réel ou imaginaire pur :

- 1 On l'écrit sous sa forme algébrique.
- 2 On écrit que sa partie imaginaire ou réelle est nulle suivant les cas.
- 3 On résout l'équation ainsi écrite.

**Exercice 1 :** Soit la fonction  $f$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par :

$$f(z) = z^2.$$

- 1 Donner la forme algébrique de  $f(z)$ .
- 2 Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points  $M$  du plan dont l'affixe remplit la condition demandée

- |                           |                                      |
|---------------------------|--------------------------------------|
| (a) $f(z) \in \mathbb{R}$ | (c) $\text{Im}(f(z)) = 2$            |
| (b) $f(z)$ imaginaire pur | (d) $\text{Re}(f(z)) = \text{Im}(z)$ |

**Correction :**

- 1 Pour  $z = x + iy$ ,  $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$ .
- 2
  - (a)  $f(z) \in \mathbb{R} \iff \text{Im}(f(z)) = 0 \iff xy = 0 \iff x = 0 \text{ ou } y = 0 \iff z \in \mathbb{R} \text{ ou } z \in i\mathbb{R}$ .
  - (b)  $f(z) \in i\mathbb{R} \iff \text{Re}(f(z)) = 0 \iff x^2 = y^2 \iff y = x \text{ ou } y = -x$   
 $\iff M(z)$  appartient à la première ou la seconde bissectrice.
  - (c)  $\text{Im}(f(z)) = 2 \iff xy = 1 \iff x \neq 0 \text{ et } y = \frac{1}{x}$   
 $\iff M(z)$  appartient à l'hyperbole d'équation  $y = \frac{1}{x}$ .
  - (d)  $\text{Re}(f(z)) = \text{Im}(z) \iff x^2 - y^2 = 2xy \iff (x - y)^2 - 2y^2 = 0$   
 $\iff (x - (1 + \sqrt{2})y)(x - (1 - \sqrt{2})y) = 0$   
 $\iff y = (\sqrt{2} - 1)x \text{ ou } y = (\sqrt{2} + 1)x$ .

Avec la forme algébrique, la **proposition (1)** peut se réécrire :

**Corollaire II :**

- Deux nombres complexes  $z$  et  $z'$  sont égaux si, et seulement si leur partie imaginaire et réelle sont égales.

$$z = z' \iff \begin{cases} \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \\ \text{Im}(z) = \text{Im}(z') \end{cases}$$

- Soient  $z = a + ib$  et  $z' = a' + ib'$  deux nombres complexes.

- |                                     |  |
|-------------------------------------|--|
| • $z + z' = (a + a') + i(b + b')$ . | • $zz' = (aa' - bb') + i(a'b + ab')$ .                     |
| • $-z = -a - ib$ .                  | • Si $z \neq 0$ , $\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$ |

Une égalité entre deux nombres complexes pourra toujours se traduire, si nécessaire, par deux équations entre réels.

Désormais, nous abandonnons la notation d'un complexe sous forme d'un couple, et nous représenterons un nombre complexe sous la forme  $a + ib$ .

Il n'existe pas de relation d'ordre sur  $\mathbb{C}$  compatible avec ses opérations.

En effet, si c'était le cas et si  $\ll$  était une telle relation d'ordre et si on pouvait trouver deux complexes  $z$  et  $z'$  tels que :  $z \ll z'$  alors on aurait

- soit  $iz \ll iz' \iff -z \ll -z' \iff z' \ll z \implies z = z'$  par anti-symétrie.
- soit  $iz' \ll iz \iff -z \ll -z' \iff z' \ll z \implies z = z'$  par anti-symétrie.

Conclusion, tous les nombres complexes comparables seraient égaux ce qui n'est pas possible.

**ATTENTION**

**Proposition 2 (Identités remarquables dans  $\mathbb{C}$ ) :** Soient  $a$  et  $b$  deux nombres complexes.

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$
- $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$
- $(a + ib)^2 = a^2 + 2abi - b^2.$
- $(a - ib)^2 = a^2 - 2abi - b^2.$
- $(a - ib)(a + ib) = a^2 + b^2.$

**Preuve :** Seules, les dernières égalités sont nouvelles :

$$(a \pm ib)^2 = a^2 \pm 2abi + (ib)^2 = a^2 \pm 2abi - b^2,$$

et

$$(a - ib)(a + ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2.$$

Vous pourrez enfin factoriser une somme de deux carrés... dans  $\mathbb{C}$ !

## I.2 Conjugué d'un nombre complexe

**Exemple 3 :** Trouver la forme algébrique du nombre complexe  $z = \frac{2 - i}{3 + 2i}$ .

L'idée est de faire disparaître les nombres imaginaires du dénominateur. On utilise la même idée qu'avec les «  $\sqrt{\quad}$  » sachant que  $i^2 = -1$ .

D'après la **proposition (2)**,  $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ . On va donc multiplier numérateur et dénominateur par  $3 - 2i$  :

$$z = \frac{(2 - i)(3 - 2i)}{(3 + 2i)(3 - 2i)} = \frac{4 - 7i}{13} = \frac{4}{13} - i \frac{7}{13}.$$

**Définition 3 (Conjugué d'un complexe) :** Soit  $z = a + ib$  un nombre complexe.

On appelle *conjugué* de  $z$ , noté  $\bar{z}$ , le nombre  $\bar{z} = a - ib$ .

**Exemples 4 :**

- $3 - 2i$  est le conjugué de  $3 + 2i$ .
- $\bar{7} = 7$ . Le conjugué d'un réel est lui-même.
- $\overline{3i} = -3i$ . Le conjugué d'un imaginaire pur est son opposé.

**Exercice 2 :** Calculer les conjugués des nombres complexes suivants

$$z_1 = \frac{3}{7} - i\sqrt{7}$$

$$z_2 = \sqrt{2} - 3$$

$$z_3 = \sqrt{7} + i\pi$$

**Proposition 3 :**

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z\bar{z} \in \mathbb{R}_+.$$



**Preuve :** Soit  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ . Il suffit d'écrire :

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}_+.$$

Petite propriété simplette qui aura de grandes conséquences dont la première :

**Méthode 2 (Forme algébrique d'un quotient) :**

Pour trouver la forme algébrique d'un quotient, il suffit de multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

**Exercice 3 :** Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{1}{1+i}$$

$$z_2 = \frac{1+i}{1-i}$$

$$z_3 = \frac{7}{i}$$

**Proposition 4 (Propriétés du conjugué) :** Soit  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes, alors :

$$\boxed{1} \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$\boxed{3} \quad \overline{\bar{z}} = z$$

$$\boxed{4} \quad \forall z \neq 0, \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

$$\boxed{2} \quad \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$

$$\boxed{5} \quad \forall z' \neq 0, \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

En particulier,  $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n.$

Une fois n'est pas coutume, remarquez que l'opération « passer au conjugué » est compatible avec l'addition et la multiplication. Fait exceptionnel!

**Preuve :** Soit  $z = a + ib$  et  $z' = a' + ib'$  deux nombres complexes écrits sous leur forme algébrique.

**1** La première assertion est triviale.

**2** Calculons et comparons :

$$\bar{z} \times \bar{z}' = (a - ib)(a' - ib') = aa' - bb' - i(ab' + a'b)$$

et

$$\overline{z \times z'} = \overline{(a + ib)(a' + ib')} = \overline{aa' - bb' + i(ab' + a'b)} = aa' - bb' - i(ab' + a'b).$$

Donc  $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$  et on conclut par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  puis symétrie par rapport à 0 avec  $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$ .

**3** Easy.

**4** Avec  $z \neq 0$  inversible, modifions tout d'abord l'expression de  $\frac{1}{z}$  :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{1}{a^2 + b^2} \times (a - ib).$$

De la même manière  $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{a^2 + b^2} \times (a + ib)$ .

Comme  $\frac{1}{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$ , il est alors clair que

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} &= \overline{\frac{1}{a^2 + b^2} \times (a - ib)} = \frac{1}{a^2 + b^2} \times \overline{(a - ib)} \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \times (a + ib) = \frac{1}{\bar{z}}. \end{aligned}$$

5 Avec  $z' \neq 0$ ,  $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = z \times \frac{1}{z'} = \bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \bar{z} \times \frac{1}{z'} = \frac{\bar{z}}{z'}$ .

**Exercice 4 :** Soit  $z \in \mathbb{C}$  un nombre complexe, déterminer les conjugués des nombres complexes suivants :

$$z_1 = z + 5 - i$$

$$z_2 = iz + 2$$

$$z_3 = z + \frac{1}{z}$$

$$z_4 = z + i\bar{z}$$

**Théorème 5 (Fondamental) :**  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,

■  $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ .

■  $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ .

■  $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$ .

■  $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}$ .

**Remarque :** On retiendra qu'un nombre complexe est réel si, et seulement si il est égal à son conjugué ou encore si, et seulement si le point d'affixe  $M(z)$  appartient à l'axe des abscisses.

**Preuve :** On a :

$$z + \bar{z} = a + \cancel{ib} + a - \cancel{ib} = 2a = 2\operatorname{Re}(z) \quad \text{et} \quad z - \bar{z} = \cancel{a} + ib - \cancel{a} + ib = 2ib = 2i\operatorname{Im}(z).$$

Le reste est trivial comme, par exemple :  $z = \bar{z} \iff \operatorname{Re}(z) = \frac{\cancel{z}}{\cancel{z}} \iff z \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 5 :** Soit  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  tel que  $a^2 + b^2 = 1$ .

Montrer que si  $z \neq 1$ , alors  $\frac{1+z}{1-z}$  est un imaginaire pur.

**Méthode 3 (Nombres réels et imaginaires purs) :**

1 Pour montrer qu'un nombre  $z$  est réel il faut et il suffit de montrer que  $\bar{z} = z$  ou  $\operatorname{Im}(z) = 0$ . On pourra, par exemple, calculer  $z - \bar{z}$ .

2 Pour montrer qu'un nombre  $z$  est imaginaire pur il faut et il suffit de montrer que  $\bar{z} = -z$  ou  $\operatorname{Re}(z) = 0$ . On pourra, par exemple, calculer  $z + \bar{z}$ .

**I.3** Équations dans  $\mathbb{C}$  (prélude)

**Théorème 6 (Équation du second degré à coefficients réels) :** Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ .

On considère l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (\text{Tr}_{\mathbb{R}})$$

L'équation  $(\text{Tr}_{\mathbb{R}})$  admet toujours des solutions dans  $\mathbb{C}$ .

On appelle *discriminant* de l'équation  $(\text{Tr}_{\mathbb{R}})$ , noté  $\Delta$ , le nombre réel défini par  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

- Si  $\Delta = 0$ ,  $(\text{Tr}_{\mathbb{R}})$  possède une unique solution :  $z = -\frac{b}{2a}$ .
- Si  $\Delta > 0$ ,  $(\text{Tr}_{\mathbb{R}})$  possède deux solutions réelles :  $z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ .
- Si  $\Delta < 0$ ,  $(\text{Tr}_{\mathbb{R}})$  possède deux solutions complexes *conjuguées* :  $z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ .

**ATTENTION**

Pour l'instant, faites bien attention que ce théorème ne s'applique qu'à des équations à coefficients réels. Seules les solutions sont complexes.

**Preuve :** La démonstration est identique à celle de première si ce n'est que l'on n'est plus gêné par la cas où le discriminant est négatif.

La forme canonique s'écrit :

$$az^2 + bz + c = a \left[ \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right].$$

- Pour les deux premiers cas  $\Delta = 0$  et  $\Delta > 0$  ont retrouvé les cas vus en première.
- si  $\Delta < 0$ , on a  $-\Delta > 0$  d'où  $\Delta = (i\sqrt{-\Delta})^2$ .

On factorise à l'aide des identités remarquables :

$$\begin{aligned} \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} &= \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)^2 \\ &= \left( z + \frac{b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right) \left( z + \frac{b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right). \end{aligned}$$

On en déduit les deux solutions de l'équation du second degré  $az^2 + bz + c = 0$  dans ce cas.

**Exemple 5 :** Soit l'équation  $z^2 - z + 1 = 0$ . On a  $\Delta = -3 = (i\sqrt{3})^2$ .

Les solutions sont donc  $z_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$  et  $z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ .

Et, on, la forme factorisée :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^2 - z + 1 = \left( z - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right) \left( z - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right).$$

**Exercice 6 (À savoir faire absolument !)** : Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , les équations suivantes :

**1**  $z^2 - 7z = 0.$

**2**  $z^2 - 4z + 5 = 0.$

**3**  $-8 = 3z^2.$

**Théorème 7** : Soit  $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$  un polynôme à coefficients réels.

$\alpha \in \mathbb{C}$  est une racine de  $P$  si, et seulement si  $\bar{\alpha}$  est une racine de  $P$ .

**Preuve** : Par compatibilité du conjugué avec les lois de  $\mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned} \overline{P(X)} &= \overline{a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0} \\ &= \overline{a_n X^n} + \overline{a_{n-1} X^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 X} + \overline{a_0} \\ &= a_n \overline{X}^n + a_{n-1} \overline{X}^{n-1} + \dots + a_1 \overline{X} + a_0. \end{aligned}$$

Il est alors clair que :

$$\alpha \text{ est racine de } P \iff P(\alpha) = 0 \iff \overline{P(\alpha)} = 0 \iff P(\bar{\alpha}) = 0 \iff \bar{\alpha} \text{ est racine de } P.$$

**Exercice 7** : Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $z^4 + 4z^2 - 21 = 0$ .

## II NOMBRES ET PLAN COMPLEXES

**Théorème 8** : L'application  $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{C}$ .

$$(a; b) \qquad z = a + ib$$

**Preuve** : D'après le **théorème (5)**, tout nombre complexe  $z$  possède un unique antécédent  $\left( \frac{z + \bar{z}}{2}; \frac{z - \bar{z}}{2i} \right)$  dans  $\mathbb{R}^2$  par  $\varphi$  qui est donc bien bijective entre ces deux ensembles.

**Remarque** : Pour l'injectivité, c'est simplement une traduction du **corollaire (1.1)**.

En effet, deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si leur partie réelle et imaginaire sont égales.

Cette bijection permet d'identifier l'ensemble des nombres complexes au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  appelé **plan complexe**.

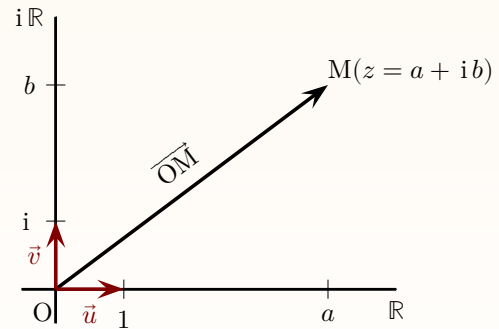
### II.1 Représentation des nombres complexes

Le **théorème (8)** permet donc d'associer à  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  un unique point M du plan de coordonnées  $(a; b)$ , et un unique vecteur  $\overrightarrow{\varphi(M)}$  tel que  $\overrightarrow{\varphi(M)} = a\vec{u} + b\vec{v}$ .

Plus précisément,

**Proposition 9 :**

- À tout nombre  $z = a + ib$  on peut faire correspondre, de manière unique, un point M de coordonnées  $(a; b)$  d'un plan orthonormal  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .
- Réciproquement, tout point M  $(a; b)$  d'un plan orthonormal  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  peut être associé, de manière unique, à un nombre complexe  $z = a + ib$ .

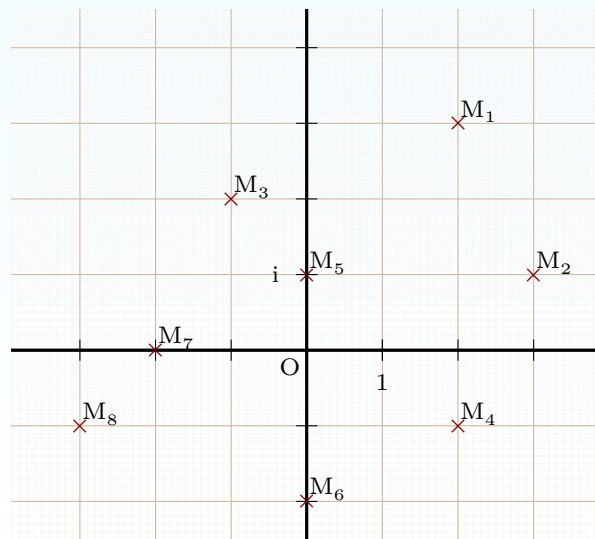


- 1 Le plan  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  est appelé *plan complexe*.
- 2 Le nombre complexe  $z$  est appelé *l'affixe* du point M ou du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  et on écrit  $M(z)$  ou  $\overrightarrow{OM}(z)$ .

**Remarques :** L'axe des abscisses est alors naturellement appelé l'axe des réels et l'axe des ordonnées celui des imaginaire purs.

**Exemple 6 :**

- 1  $z_1 = 2 + 3i$
- 2  $z_2 = 3 + i$
- 3  $z_3 = -1 + 2i$
- 4  $z_4 = 2 - i$
- 5  $z_5 = i$
- 6  $z_6 = -2i$
- 7  $z_7 = -2$
- 8  $z_8 = -i - 3$

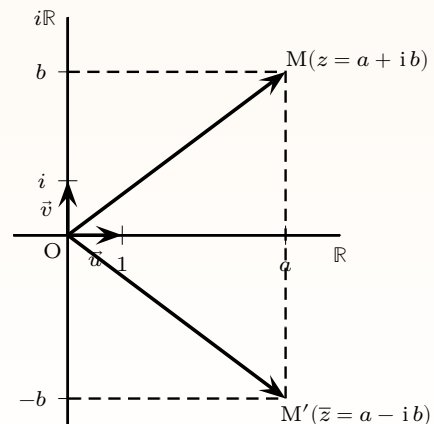


**Exercice 8 :** Dans chacun des cas suivants, déterminer et représenter l'ensemble des points M dont l'affixe  $z$  vérifie l'égalité proposée :

- |  |                              |
|--|------------------------------|
| 1 $\text{Re}(z) = -2$                            | 4 $\text{Im}(z^2) = 0$       |
| 2 $\text{Im}(z) = 1$                             | 5 $\text{Im}(z^2) = 2$       |
| 3 $\text{Re}(z) \geq 1$ et $\text{Im}(z) \geq 1$ | 6 $\text{Re}((z - 1)^2) = 0$ |

**Proposition 10 (Point d'affixe conjuguée) :** Soit  $z = a + ib$  un nombre complexe et  $M(z)$  un point du plan complexe  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  d'affixe  $z$ .

Le point  $M'$  d'affixe  $\bar{z} = a - ib$  est le symétrique de  $M$  par rapport à l'axe des abscisses.



**Exercice 9 :** On pose  $j = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ .

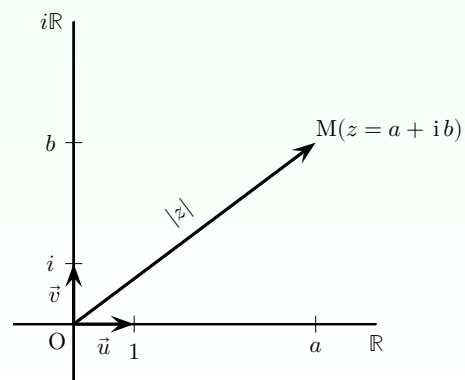
Dans le plan complexe, placer les points d'affixe respective 1,  $\bar{1}$ ,  $i$ ,  $\bar{i}$ ,  $j$  et  $\bar{j}$ .

### II.2 Module d'un nombre complexe

**Définition 4 :** Soit  $z = a + ib$  un nombre complexe et  $M(z)$  un point du plan complexe  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  d'affixe  $z$ .

On appelle *module* de  $z$ , noté  $|z|$ , la distance  $OM$  *i.e.* le réel positif tel que :

$$|z| = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



**Exercice 10 :** Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = 3 + 4i$

$z_2 = 1 - i$

$z_3 = -5 - 2i$

$z_4 = -5$

$z_5 = 9i$

**Proposition 11 :** Soient  $z = a + ib$  et  $z'$  deux nombres complexes.

■  $z\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2.$

En particulier, si  $z \neq 0$  alors  $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$

■  $|z| = 0_{\mathbb{R}} \iff z = 0_{\mathbb{C}}$

■  $|-z| = |z|$  et  $|\bar{z}| = |z|.$

■  $|z \times z'| = |z| \times |z'|.$

En particulier,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|z^n| = |z|^n$ .

■  $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$ , avec  $z \neq 0$ .

■  $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$ , avec  $z' \neq 0$ .

En particulier,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ ,  $|z^n| = |z|^n$ .

■  $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ .

■  $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$ .

**Remarque** : Si  $a$  est un réel,  $|a| = \sqrt{a \bar{a}} = \sqrt{aa} = \sqrt{a^2}$  car  $\bar{a} = a$ . La notion de module dans  $\mathbb{C}$  généralise donc celle de valeur absolue dans  $\mathbb{R}$ .

**Preuve :**

- Il suffit de calculer :  $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$ .

La forme de  $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$  est tout de même plus sympathique que celle de la **proposition (1)** !

-  $|z| = 0 \iff a^2 + b^2 = 0 \iff a = b = 0 \iff z = 0$ .

Observer surtout que l'on a une équivalence entre un zéro complexe ( $z = 0_{\mathbb{C}}$ ) et un zéro réel ( $|z| = 0_{\mathbb{R}}$ ) !

Une autre manière est d'écrire :

$$|z| = 0 \iff z\bar{z} = 0 \iff z = 0 \text{ ou } \bar{z} = 0 \iff z = 0.$$

-  $a^2 + b^2 = |-z| = |\bar{z}| = |z|$  ou en revient à la définition :

$$|-z| = \sqrt{(-z)(-\bar{z})} = \sqrt{(-z)(-\bar{z})} = \sqrt{z\bar{z}} = |z|.$$

$$|\bar{z}| = \sqrt{\bar{z}z} = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{z\bar{z}} = |z|.$$

-  $|z \times z'| = \sqrt{(zz') \times \overline{(zz')}} = \sqrt{z \times z' \bar{z} \times \bar{z}'} = \sqrt{z\bar{z} \times z'\bar{z}'} = \sqrt{z\bar{z}} \times \sqrt{z'\bar{z}'} = |z| \times |z'|$ .

- Comme  $z \neq 0$  alors  $|z| \neq 0$  et  $\bar{z} \neq 0$  et on a :

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \sqrt{\frac{1}{z} \times \overline{\left( \frac{1}{z} \right)}} = \sqrt{\frac{1}{z} \times \frac{1}{\bar{z}}} = \sqrt{\frac{1}{z\bar{z}}} = \frac{1}{\sqrt{z\bar{z}}} = \frac{1}{|z|}.$$

Une autre méthode est de montrer que  $|z| \times \left| \frac{1}{z} \right| = \left| z \times \frac{1}{z} \right| = |1| = 1$  i.e.  $\left| \frac{1}{z} \right|$  est l'inverse de  $|z|$  soit  $\frac{1}{|z|}$ .

-  $\left| \frac{z}{z'} \right| = \left| z \times \frac{1}{z'} \right| = |z| \times \left| \frac{1}{z'} \right| = |z| \times \frac{1}{|z'|} = \frac{|z|}{|z'|}$ .

- Doit-on vraiment montrer que  $a^2 \leq a^2 + b^2$  ou  $b^2 \leq a^2 + b^2$  ?

**Exercice II** : Dans chacun des cas suivants, déterminer le module du nombre complexe proposé :

$$z_1 = (\sqrt{3} - i)(-1 - i)$$

$$z_3 = \left( \frac{-3i}{1 + i\sqrt{3}} \right)^2$$

$$z_2 = i \left( \frac{1 + i}{1 - i} \right)$$

$$z_4 = \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}$$

### II.3 Inégalité triangulaire

**Proposition 12 (Inégalité triangulaire) :** Pour tout  $z_1, z_2$  de  $\mathbb{C}$  on a :

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

En particulier,  $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff z_2 = 0$  ou  $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+$  tel que  $z_1 = \alpha z_2$  i.e. les points d'affixe  $z_1$  et  $z_2$  sont alignés avec l'origine sur une même demi-droite.

**Preuve :** Pour l'inégalité de droite, on a :

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \end{aligned} \tag{VIII.1}$$

$$\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)| \tag{VIII.2}$$

$$\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\bar{z}_2| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \tag{VIII.3}$$

$$= (|z_1| + |z_2|)^2.$$

Inégalité entre deux réels positifs donc  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ .

Pour l'inégalité de gauche, il suffit d'écrire que  $|z_1| = |z_1 + z_2 - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|$  i.e.  $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$ .

Par symétrie entre  $z_1$  et  $z_2$ , on a aussi  $|z_2| - |z_1| \leq |z_1 + z_2|$ .

En conclusion,  $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$ .

Supposons avoir l'égalité  $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$  alors les inégalités (VIII.2) et (VIII.3) doivent être des égalités i.e.

$$2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) = 2|\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)| = 2|z_1\bar{z}_2|.$$

Ainsi  $\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \in \mathbb{R}_+$  puis

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) = |z_1\bar{z}_2| &\implies \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)^2 = |z_1\bar{z}_2|^2 \\ &\iff \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)^2 = \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)^2 + \operatorname{Im}(z_1\bar{z}_2)^2 \\ &\iff \operatorname{Im}(z_1\bar{z}_2)^2 = 0 \end{aligned}$$

En d'autres termes, le nombre  $z_1\bar{z}_2$  est donc un réel positif  $\lambda$ .

Si  $z_2 = 0$ ,  $|z_1| \leq |z_1|$  est clairement une égalité.

Sinon, on finit en écrivant,  $z_1 = z_1 \times \frac{z_2\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2} \times z_2 = \frac{\lambda}{|z_2|^2} \times z_2 = \alpha z_2$  où  $\alpha = \frac{\lambda}{|z_2|^2} \in \mathbb{R}_+$ .

Réciproquement, si  $z_1 = \alpha z_2$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ , on a facilement :

$$|z_1 + z_2| = \left| \underbrace{(\alpha + 1)}_{\geq 0} z_2 \right| = (\alpha + 1)|z_2| = \underbrace{\alpha}_{\geq 0} |z_2| + |z_2| = |\alpha z_2| + |z_2| = |z_1| + |z_2|.$$



**Remarque** : En remplaçant  $z_2$  par  $-z_2$ , on a aussi :

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Quoi qu'il en soit, on a coutume de dire qu'on majore les valeurs absolues de réels et les modules de complexes.

L'inégalité triangulaire peut s'interpréter géométriquement de la manière suivante : si  $z$  et  $z'$  représentent les affixes de deux vecteurs  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  alors :

$$||\vec{U} + \vec{V}|| \leq ||\vec{U}|| + ||\vec{V}||.$$

Le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire correspond donc au cas où les vecteurs  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  sont colinéaires de même sens.

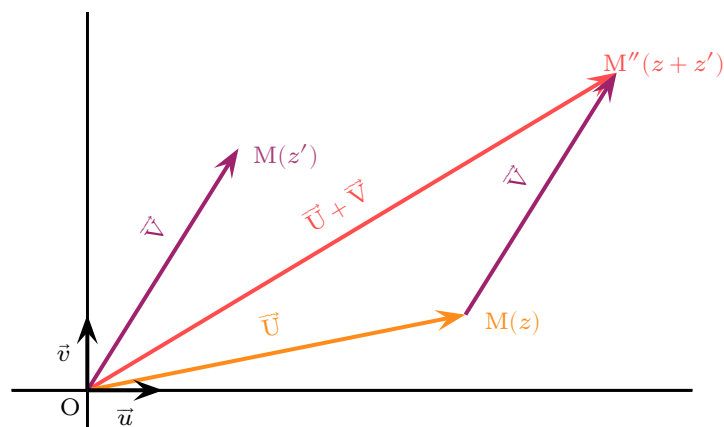


Figure VIII.1 – Inégalité triangulaire pour les normes de vecteurs.

### III L'EXPONENTIELLE SUR $i\mathbb{R}$

#### III.1 Fonctions vectorielles

**Définition 5** : Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

On définit les fonctions :

- partie réelle de  $f$  : 
$$\text{Re}(f) : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
  
$$x \qquad \text{Re}(f)(x) = \text{Re}(f(x)).$$

- et partie imaginaire de  $f$  : 
$$\text{Im}(f) : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
  
$$x \qquad \text{Im}(f)(x) = \text{Im}(f(x)).$$

On a alors :

$$f : I \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$x \qquad f(x) = \text{Re}(f)(x) + i \text{Im}(f)(x).$$

En identifiant  $\mathbb{C}$  au plan complexe  $\mathbb{R}^2$ , la fonction  $f$  est un exemple de fonctions, dites *vectorielles*.

En particulier, on peut également définir les fonctions  $\bar{f}$  et  $|f|$  par leurs valeurs sur  $I$  :

$$\forall x \in I,$$

$$\bullet \overline{f(x)} = \overline{f(x)}.$$

$$\bullet |f|(x) = |f(x)|.$$

On retrouve alors les formules, dites d'Euler :

$$\bullet \operatorname{Re}(f) = \frac{f + \overline{f}}{2}.$$

$$\bullet \operatorname{Im}(f) = \frac{f - \overline{f}}{2i}.$$

**Exercice 12** : Soit  $f : x \mapsto \sin x + i(x^2 - 1)$ .

Définir les fonctions  $\operatorname{Re}(f)$ ,  $\operatorname{Im}(f)$ ,  $\overline{f}$  et  $|f|$ .

**Théorème 13 (Continuité)** : Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \mapsto \mathbb{C}$  une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

$f$  est continue sur  $I$  si, et seulement si  $\operatorname{Re}(f)$  et  $\operatorname{Im}(f)$  le sont.

**Preuve** : Tout repose sur l'inégalité triangulaire de la **proposition (12)**. Soit  $a$  un élément de  $I$ .

Supposons  $\operatorname{Re}(f)$  et  $\operatorname{Im}(f)$  continues en  $a$ . Alors

$$|f(x) - f(a)| \leq |\operatorname{Re}(f)(x) - \operatorname{Re}(f)(a)| + |\operatorname{Im}(f)(x) - \operatorname{Im}(f)(a)|.$$

La continuité de  $f$  en  $a$  en découle.

Réciproquement, si  $f$  est continue en  $a$ , on en déduit que  $\operatorname{Re}(f)$  et  $\operatorname{Im}(f)$  le sont trivialement à l'aide des inégalités de la **proposition (11)** :

$$|\operatorname{Re}(f)(x) - \operatorname{Re}(f)(a)| = |\operatorname{Re}(f(x) - f(a))| \leq |f(x) - f(a)|$$

et

$$|\operatorname{Im}(f)(x) - \operatorname{Im}(f)(a)| = |\operatorname{Im}(f(x) - f(a))| \leq |f(x) - f(a)|.$$

**Théorème 14 (Dérivabilité)** : Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \mapsto \mathbb{C}$  une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

$f$  est dérivable sur  $I$  si, et seulement si  $\operatorname{Re}(f)$  et  $\operatorname{Im}(f)$  le sont et on a :

$$\forall x \in I, f'(x) = \operatorname{Re}(f)'(x) + i \operatorname{Im}(f)'(x).$$

**Preuve** : Soit  $a \in I$ . La démonstration est identique à la précédente en majorant les quotients ci-dessous suivant les besoins :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - (\operatorname{Re}(f)'(a) + i \operatorname{Im}(f)'(a)) = \frac{\operatorname{Re}(f)(x) - \operatorname{Re}(f)(a)}{x - a} - \operatorname{Re}(f)'(a) + i \left( \frac{\operatorname{Im}(f)(x) - \operatorname{Im}(f)(a)}{x - a} - \operatorname{Im}(f)'(a) \right).$$

Les limites  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{Re}(f)(x) - \operatorname{Re}(f)(a)}{x - a} = \operatorname{Re}(f)'(a)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{Im}(f)(x) - \operatorname{Im}(f)(a)}{x - a} = \operatorname{Im}(f)'(a)$  existant, on obtient alors :

$$f'(a) = \operatorname{Re}(f)'(a) + i \operatorname{Im}(f)'(a).$$

Réciproquement, il suffira d'écrire, exemple, que :

$$\frac{\operatorname{Re}(f)(x) - \operatorname{Re}(f)(a)}{x - a} - \operatorname{Re}(f)'(a) = \operatorname{Re}\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)\right),$$

puis se rappeler encore que  $|\operatorname{Re}(u)| \leq |u|$ .

Si  $f$  est une fonction à valeurs complexes, ce n'est pas encore à proprement parler, une fonction complexe car elle n'est pas encore « de la variable complexe » mais plutôt un cas particulier de *fonctions vectorielles*.

Augmenter le but, ne pose pas vraiment de problèmes et l'on pourrait tout aussi bien considérer une fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### ATTENTION

$$f : I \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^n$$

$$x \qquad (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

Augmenter la source, demandera de redéfinir totalement les notions de continuité et de dérivabilité notamment à partir d'une *topologie* de  $\mathbb{C}$  à définir aussi.

On parlera alors de *fonctions holomorphes* qui ont de très puissantes propriétés notamment leur analyticité. To be continued...

**Exemple 7 :** La fonction  $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a :

$$x \qquad \sin(x) + i e^x.$$

$$f'(x) = \cos(x) + i e^x.$$

**Exercice B :** Montrer que la fonction  $f : x \mapsto \sin x + i(x^2 - 1)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et calculer  $f'$ .

Un grand nombre de résultats concernant la dérivabilité des fonctions à valeurs réelles sont encore valables pour les fonctions à valeurs complexes.

Citons par exemple :

**Proposition 15 :** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions à valeurs complexes définies sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ .

Alors, pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , les fonctions  $\lambda f + \mu g$ ,  $fg$  et  $\frac{f}{g}$ , si  $g$  ne s'annule pas sur  $I$  sont dérivables sur  $I$  et on a :

$$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg' \quad \text{et} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

**Preuve :** Il suffit simplement d'écrire et d'identifier. Montrons par exemple que  $(fg)' = f'g + fg'$  en notant  $f_1, f_2, g_1$  et  $g_2$  les fonctions réelles et imaginaires de  $f$  et  $g$  respectivement :

$$fg = (f_1g_1 - f_2g_2) + i(f_1g_2 + f_2g_1).$$

En dérivant et en identifiant, on a, d'une part :

$$(fg)' = (f'_1g_1 + f_1g'_1 - f'_2g_2 - f_2g'_2) + i(f'_1g_2 + f_1g'_2 + f'_2g_1 + f_2g'_1).$$

D'autre part, en développant  $f'g + fg'$  :

$$\begin{aligned} f'g + fg' &= (f'_1 + i f'_2)(g_1 + i g_2) + (f_1 + i f_2)(g'_1 + i g'_2) \\ &= (f'_1 g_1 + f_1 g'_1 - f'_2 g_2 - f_2 g'_2) + i(f'_1 g_2 + f_1 g'_2 + f'_2 g_1 + f_2 g'_1). \end{aligned}$$

D'où l'égalité. └

### III.2 Notation d'Euler

Soit  $f$  la fonction définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  par :

$$f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C} \\ \theta \qquad f(\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

- 1 Comme somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ , la fonction  $f$  est aussi dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, f'(\theta) = -\sin(\theta) + i \cos(\theta) = i f(\theta).$$

- 2  $f$  vérifie  $f(0) = 1$ .

- 3 La fonction  $f$  est donc solution de problème de Cauchy :

$$(\mathcal{E}) \quad \begin{cases} y' = i y \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

- 4 Par analogie avec les systèmes d'équations différentielles linéaires du premier ordre de la

forme  $\begin{cases} y' = a y \\ y(0) = 1. \end{cases}$  dont les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto e^{ax}$ , on pose comme définition :  $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta) = e^{i\theta}$ .

Conclusion :  $\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta).$

Cette notation est due à Euler à qui on doit la magnifique relation du même nom pour  $\theta = \pi$ ,  $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1$ .

Autrement écrit :

**Théorème 16 (Relation d'Euler) :** Pour tout nombre réel  $\theta$ , on a :

$$e^{i\pi} + 1 = 0. \tag{VIII.4}$$

Cette relation relie d'une manière quasi-miraculeuse, les 5 constantes universelles des mathématiques 0, 1,  $\pi$ ,  $i$  et  $e$  et avec elles, relie, dans l'ordre, l'arithmétique, la géométrie, l'algèbre et l'analyse.

**Proposition 17 :** Soient  $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ .

Alors :

1  $e^{i0} = 1.$

2  $|e^{i\theta}| = 1.$

3  $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}.$

4  $\forall n \in \mathbb{N}, (e^{i\theta})^n = e^{ni\theta}.$

5  $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}.$

6  $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' [2\pi].$

On récupère ainsi toutes les propriétés de l'exponentielle réelle.

Preuve :

1  $e^{i0} = \cos(0) + i \sin(0) = 1.$

2  $|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = 1.$

3 
$$\begin{aligned} e^{i(\theta+\theta')} &= \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta') \\ &= \cos(\theta) \cos(\theta') - \sin(\theta) \sin(\theta') + i (\sin(\theta) \cos(\theta') + \cos(\theta) \sin(\theta')) \\ &= (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \times (\cos(\theta') + i \sin(\theta')) \\ &= e^{i\theta} \times e^{i\theta'} \end{aligned}$$

4 Par récurrence sur  $n$  à partir de la relation précédente.

5 Il suffit d'écrire et d'utiliser la parité des fonctions  $\cos$  et  $\sin$  :

$$\overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos(\theta) + i \sin(\theta)} = \cos(\theta) - i \sin(\theta) = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = e^{-i\theta}.$$

6  $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \begin{cases} \cos(\theta) = \cos(\theta') \\ \sin(\theta) = \sin(\theta') \end{cases} \iff \theta \equiv \theta' [2\pi].$

### III.3 Nombres complexes de module 1

En remarquant que  $|e^{i\theta}| = 1$  i.e. le point d'affixe  $e^{i\theta}$  se trouve sur le cercle de centre  $O$  et de rayon 1, on est encouragé à s'intéresser à ce dernier :

**Définition 6 (Cercle trigonométrique) :** On appelle *cercle trigonométrique* et on note  $\mathbb{U}$  l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}.$$

Conséquence immédiate,  $\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} \in \mathbb{U}$ .

**Proposition 18 :** Soient  $z$  et  $z'$  deux éléments de  $\mathbb{U}$ .

**Stabilité par la multiplication :**  $zz' \in \mathbb{U}$ .

**Stabilité par l'inverse :**  $\frac{1}{z} = \bar{z} \in \mathbb{U}$ .

Preuve :

1 Soient  $z, z' \in \mathbb{U}$ .  $|zz'| = |z| \times |z'| = 1 \times 1 = 1 \implies zz' \in \mathbb{U}$ .

**2** Soit  $z \in \mathbb{U}$ . Alors  $z \neq 0$  et  $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{1} = 1$ . Donc  $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$ .

Enfin,  $|z| = 1 \iff z \times \bar{z} = 1 \iff \frac{1}{z} = \bar{z}$ .

**Remarque** : Tout élément de  $\mathbb{U}$  admet donc un symétrique (inverse) pour la multiplication. Le produit de deux éléments de  $\mathbb{U}$  est encore un élément de  $\mathbb{U}$  et  $1 \in \mathbb{U}$ . Ces trois propriétés font dire de  $\mathbb{U}$  qu'il est un *groupe* multiplicatif à l'instar de  $\mathbb{R}^*$ .

**Exercice 14** : Démontrer que,  $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ ,  $\frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R} \iff z \in \mathbb{U}$ .

**Théorème 19** :

$$\mathbb{U} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}.$$

**Preuve** : Comme  $|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$ , on a facilement  $\{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{U}$ .

Réciproquement, par définition des fonctions  $\cos$  et  $\sin$ , tout point  $M(z)$  du cercle trigonométrique a pour coordonnées  $(\cos(\theta); \sin(\theta))$  pour un certain  $\theta \in \mathbb{R}$  i.e. pour affixe  $z = \cos(\theta) + i \sin(\theta) = e^{i\theta}$  et l'inclusion voulue.

En conclusion,  $\mathbb{U} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}$ .

Plus particulièrement, tout nombre complexe de module 1 peut s'écrire  $e^{i\theta}$  où  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Le réel  $\theta$  est, de plus, unique si on impose  $\theta \in ]-\pi; \pi]$ .

**Corollaire 19.1** :

**1** La fonction  $\theta \mapsto e^{i\theta}$  est surjective de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{U}$ .

Plus précisément, c'est une bijection de tout intervalle  $[\alpha; \alpha + 2\pi[$  sur  $\mathbb{U}$ .

**2** La fonction  $(r; \theta) \mapsto r e^{i\theta}$  est une bijection de  $\mathbb{R}_+^* \times ]-\pi; \pi]$  sur  $\mathbb{C}^*$ .

**Preuve** :

**1** Simple traduction du **théorème (19)**.

**2** Soit  $z \in \mathbb{C}^*$ . Comme  $z \neq 0$  alors  $r = |z| \neq 0$  et on peut écrire  $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$ .

Il existe alors un unique  $\theta \in ]-\pi; \pi]$  tel que  $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$  ou encore un unique couple  $(r; \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times ]-\pi; \pi]$  tel que :

$$z = |z| e^{i\theta} = r e^{i\theta}.$$

L'application  $(r; \theta) \mapsto r e^{i\theta}$  est bien une bijection de  $\mathbb{R}_+^* \times ]-\pi; \pi]$  sur  $\mathbb{C}^*$ .

## IV FORME POLAIRE

### IV.1 Forme trigonométrique et exponentielle

De manière pratique, le **corollaire (19.1)** se traduit par le résultat suivant :

**Définition/Théorème 1 :**

- 1 Pour tout nombre complexe  $z$  non nul, il existe un unique réel strictement positif  $r$  et un unique  $\theta \in \mathbb{R}$  modulo  $2\pi$  tel que :

$$z = r e^{i\theta} \quad \text{avec } r = |z| \quad (\text{forme exponentielle})$$

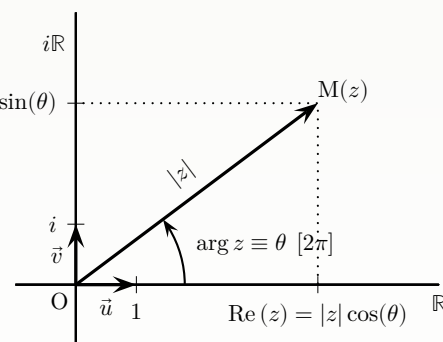
$$= r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)). \quad (\text{forme trigonométrique})$$

Cette écriture s'appelle la *forme trigonométrique/exponentielle/polaire* de  $z$ .

- 2 Tout réel  $\theta$  de ce type s'appelle un *argument* de  $z$  et est défini modulo  $2\pi$  par les relations :

$$\cos(\theta) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}.$$

On note alors  $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$ .



- 3 Dans un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ,  $\arg(z)$  est une mesure en radians de l'angle  $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$  où  $M$  est le point du plan d'affixe  $z$ .
- 4 L'unique mesure de cet angle dans  $]-\pi; \pi]$  définit l'argument principal de  $z$ , noté  $\arg(z)$ .

#### ATTENTION

Le réel  $r$  correspond au module, on fera donc toujours bien attention à ce qu'il soit un nombre réel *positif*.

Par exemple,  $-1$  n'est pas le module de  $-e^{i\pi} = 1$ .

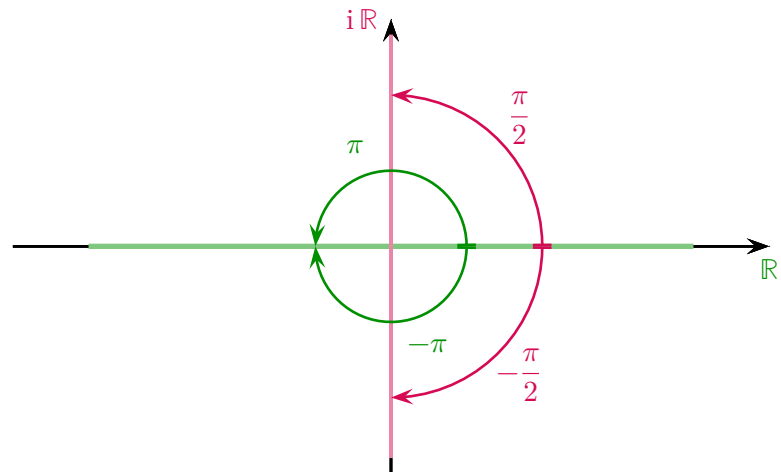
**Remarques :**

- On ne peut pas définir d'argument pour  $0$ , mais son module suffit à le caractériser.
- On a vu que si  $\theta_0$  est un argument de  $z$ , l'ensemble de ses arguments est de la forme  $\{\theta_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .
- Le réel  $\theta$  est unique si on impose  $\theta \in [0; 2\pi[$  ou  $\theta \in ]-\pi; \pi]$ .
- Connaissant la forme algébrique d'un nombre complexe, on peut donc obtenir son module et son argument à partir de ses parties réelles et imaginaires.

On obtiendra alors une mesure exacte de  $\theta$  si  $\cos(\theta)$  et  $\sin(\theta)$  sont des valeurs connues comme  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $1$ , .... Sinon, on obtiendra une valeur approchée à l'aide de la calculatrice.

**Théorème 20 (Caractérisation d'un réel, d'un imaginaire pur) :** Soit  $z$  un nombre complexe non nul.

- $z \in \mathbb{R} \iff \arg z \equiv 0 \text{ ou } \pi [2\pi] \iff \arg z \equiv 0 [\pi].$
- $z \in i\mathbb{R} \iff \arg z \equiv \pm \frac{\pi}{2} [2\pi] \iff \arg z \equiv \frac{\pi}{2} [\pi].$



**Figure VIII.2** – Réels et imaginaires purs caractérisés par leur argument.

Un nombre complexe peut donc s'écrire sous trois formes bien distinctes : algébrique, trigonométrique et exponentielle. Chacune d'elles sera à préférer aux autres suivant le type de calculs à effectuer. Pensez-y !

**Exemple 8 :** Différentes écritures du nombre complexe  $1 + i\sqrt{3}$  :

Forme exponentielle	Forme trigonométrique	Forme algébrique
$2 e^{i\frac{\pi}{3}}$	$2 \left[ \cos \left( \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{3} \right) \right]$	$1 + i\sqrt{3}$

**Exercice 15 :** Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 5 \left( \cos \left( \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{3} \right) \right)$$

$$z_2 = \cos(\pi) + i \sin(\pi)$$

**Exemples 9 :** Quelques exemples classiques à retenir ou à savoir retrouver :

- $e^{i0} = e^{i2\pi} = 1.$

- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$

- $e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1.$

- $2 e^{i\frac{\pi}{3}} = 2 \cos \frac{\pi}{3} + i 2 \sin \frac{\pi}{3}$   
 $= 1 + i\sqrt{3}.$

- $\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} + i \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}$   
 $= 1 + i.$

- $2 e^{i\frac{\pi}{6}} = 2 \cos \frac{\pi}{6} + i 2 \sin \frac{\pi}{6}$   
 $= \sqrt{3} + i.$



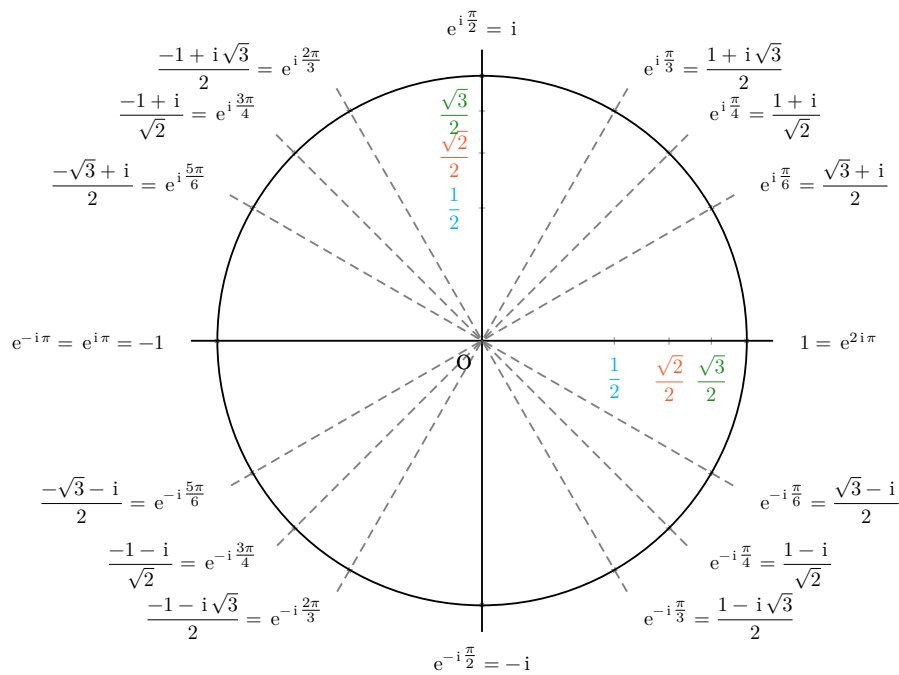


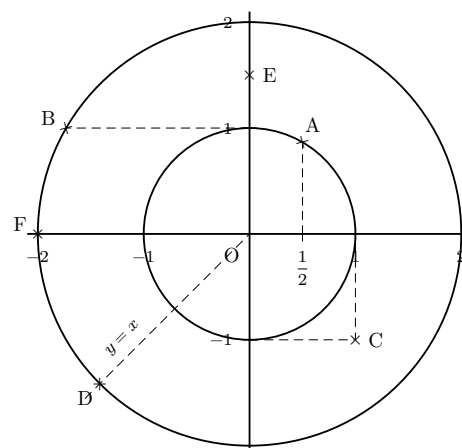
Figure VIII.3 – Formes exponentielles remarquables

Exemple 10 (Forme exponentielle, trigonométrique et algébrique) :

$$\begin{aligned}
 z &= 4 e^{i \frac{3\pi}{4}} && \text{(Forme exponentielle)} \\
 &= 4 \left[ \cos \left( \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{4} \right) \right] && \text{(Forme trigonométrique)} \\
 &= 4 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\
 &= -2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}. && \text{(Forme algébrique)}
 \end{aligned}$$

Exercice 16 :

Déterminer la forme exponentielle de l’affiche de chacun des points A, B, C, D, E et F placés dans le repère donné ci-contre :



**Exemple II :** Quelle est la forme algébrique de  $z = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \cos \left( \frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{5\pi}{6} \right) \right)$  ?

Il suffit de calculer et développer :

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i.$$

**Méthode 4 (Mettre sous forme trigonométrique un nombre complexe) :**

Soit  $z = a + ib$  un nombre complexe sous sa forme algébrique.

Pour trouver sa forme trigonométrique :

1 On calcule  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

2 On cherche l'angle  $\theta$  tel que  $\cos(\theta) = \frac{a}{|z|}$  et  $\sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$ .

$$\text{Au pire, si } a \neq 0, \theta \equiv \begin{cases} \arctan \left( \frac{b}{a} \right) [2\pi] & \text{si } a > 0 \\ \arctan \left( \frac{b}{a} \right) + \pi [2\pi] & \text{si } a < 0 \text{ et } b > 0 \\ \arctan \left( \frac{b}{a} \right) - \pi [2\pi] & \text{si } a < 0 \text{ et } b < 0 \end{cases}$$

Une autre méthode est, le module trouvé, de factoriser par celui-ci et de reconnaître directement  $\cos(\theta)$  et  $\sin(\theta)$  dans l'expression

$$z = |z| \left( \frac{a}{|z|} + i \frac{b}{|z|} \right).$$

**Exemples I2 :**

1  $\arg(3 + 2i) \equiv \arctan \left( \frac{2}{3} \right) [2\pi]$ .

2  $\arg(-1 + i) \equiv \arctan(-1) + \pi = \frac{3\pi}{4} [2\pi]$ .

3  $\arg(-3 - i\sqrt{3}) \equiv \arctan \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right) - \pi = \frac{5\pi}{6} [2\pi]$ .

**Exemples I3 :** Déterminer la forme trigonométrique des nombres suivants :

$$\blacksquare z_1 = 1 - i : \begin{cases} |1 - i| = \sqrt{2} \\ \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\text{D'où } r = \sqrt{2}, \theta \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ et } z_1 = 1 - i = \sqrt{2} \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right] \\ = \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}}.$$

$$\blacksquare z_2 = -\sqrt{3} + i : \begin{cases} |-\sqrt{3} + i| = 2 \\ \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } r = 2, \theta \equiv -\frac{\pi}{6} \text{ et } z_2 = -\sqrt{3} + i &= 2 \left[ \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right] \\ &= 2 e^{-i\frac{\pi}{6}}. \end{aligned}$$

**Exercice 17** : Trouver un argument des nombres complexes suivants :

**1**  $z_1 = -2 + 2i$  .

**2**  $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ .

**Correction** :

$$\mathbf{1} \quad z_1 = -2 + 2i : \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{2}{|-2+2i|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{2}{|2+2i|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi].$$

Donc  $\arg(-2 + 2i) = \frac{3\pi}{4}$ .

$$\mathbf{2} \quad z_2 = 1 - i\sqrt{3} : \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{|1-i\sqrt{3}|} = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{|1-i\sqrt{3}|} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi].$$

Donc  $\arg(1 - i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ .

**Exemples 14 (Factorisation directe)** : Quelle est la forme trigonométrique de  $z = 1 + i\sqrt{3}$  ?

**1** Tout d'abord, on calcule  $|z| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$ .

**2** Puis, on factorise l'expression de  $z$  par  $|z|$  :

$$z = 2 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

**3** On cherche, sur le cercle trigonométrique quel est l'angle qui a pour cosinus  $\frac{1}{2}$  et pour sinus  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . C'est  $\frac{\pi}{3} [2\pi]$ .

D'où,  $z = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 e^{i\frac{\pi}{3}}$ .

**Remarque** : Dans certains cas, il est inutile de faire tous les calculs : la forme trigonométrique se « voit » :

—  $1 = \cos 0 + i \sin 0$  donc  $|1| = 1$  et  $\arg(1) = 0$

—  $i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$  donc  $|i| = 1$  et  $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$

**IV.2** Règles de calcul en notation exponentielle

**Théorème 21 :**

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}^*, \quad z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) \equiv \arg(z') [2\pi] \end{cases}$$

Autrement dit, deux nombres complexes sous forme exponentielle sont égaux si, et seulement si ils ont même module et même argument modulo  $2\pi$ .

**Preuve :** Soient deux nombres complexes  $z = |z| e^{i\theta}$  et  $z' = |z'| e^{i\theta'}$  non nuls sous leur forme exponentielle.

$$z = z' \Leftrightarrow |z| e^{i\theta} = |z'| e^{i\theta'} \Leftrightarrow \frac{|z|}{|z'|} = e^{i(\theta' - \theta)} \in \mathbb{R}_+^*.$$

Or,  $e^{i(\theta' - \theta)} \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \theta - \theta' \equiv 0 [2\pi] \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \arg(z') [2\pi]$ .

Mais alors  $\frac{|z|}{|z'|} = e^{0i} = 1 \Leftrightarrow |z| = |z'|$  et c'est le résultat escompté.

**Proposition 22 :** Soient  $z = r e^{i\theta}$  et  $z' = r' e^{i\theta'}$  deux nombres complexes sous leur forme exponentielle avec  $r, r' \neq 0$  et  $n$  un nombre entier :

- **Produit :**  $r e^{i\theta} \times r' e^{i\theta'} = rr' e^{i(\theta + \theta')}$ .
- **Puissance :**  $(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$ .
- **Conjugué :**  $\overline{r e^{i\theta}} = r e^{-i\theta}$ .
- **Quotient :**  $\frac{r e^{i\theta}}{r' e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta - \theta')}$ .
- **Inverse :**  $\frac{1}{r e^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$ .

**Moralité :**

- Les formes trigonométriques et exponentielles sont adaptées aux produits de complexes.
- Les formes algébriques sont adaptées aux sommes de complexes.

**Preuve :** Rien à faire si ce n'est rappeler les propriétés de la fonction exponentielle.

**Exemple 15 (Forme exponentielle et calculs de produits et quotients) :**

On considère les nombres complexes  $z_1 = 2 e^{i\frac{\pi}{3}}$  et  $z_2 = 2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}}$  :

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 2 \times 2\sqrt{3} \times e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{6}} & z_2^4 &= (2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}})^4 & \frac{z_2}{z_1} &= \frac{2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}}}{2 e^{i\frac{\pi}{3}}} \\ &= 4\sqrt{3} e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6})} & &= (2\sqrt{3})^4 e^{i4\frac{\pi}{6}} & &= \frac{2\sqrt{3}}{2} e^{i(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3})} \\ &= 4\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}} & &= 144 e^{i\frac{2\pi}{3}} & &= \sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{6}}. \end{aligned}$$

**Exercice 18 :** Établir l'égalité suivante :

$$\left( \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \right) \left( \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right) (1 + i) = \sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{5\pi}{84}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{84}\right) \right).$$

### IV.3 Argument d'un nombre complexe

L'analogie avec la fonction exponentielle et l'idée géniale de remarquer qu'un nombre complexe puisse se mettre sous une forme exponentielle permet d'obtenir rapidement et simplement grâce à la **proposition (22)** des propriétés sur les modules et les arguments. Concentrons-nous donc sur ces derniers.

**Proposition 23 (Propriétés algébriques) :** Soient  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes non nuls.

- $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' \pmod{2\pi}$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv \arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' \pmod{2\pi}$

En particulier,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ ,  $\arg(z^n) = n \arg z$ .

**ATTENTION** |  $\arg(-z) \equiv \pi + \arg z \pmod{2\pi}$ .

Bien sûr, tout le monde aura remarqué que la fonction  $\arg$  se comporte comme la fonction  $\ln$  avec les produits.

**Preuve :** La **proposition (23)** n'est qu'un cas particulier de la **proposition (22)** en ne considérant que les arguments.

On considère donc deux nombres complexes  $z = r e^{i\theta}$  et  $z' = r' e^{i\theta'}$  écrits sous leur forme exponentielle.

- $zz' = r e^{i\theta} \times r' e^{i\theta'} = rr' e^{i(\theta+\theta')}$ . Donc  $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' \pmod{2\pi}$ .<sup>[3]</sup>
- $\overline{r e^{i\theta}} = r e^{-i\theta}$  et si  $z \neq 0 \iff r \neq 0$ ,  $\frac{1}{r e^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$ . En ne regardant que les arguments, on obtient  $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg z \pmod{2\pi}$  et  $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z \pmod{2\pi}$ .<sup>[4]</sup>
- Pour l'argument du quotient, soit on écrit que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{z}{z'}\right) &\equiv \arg\left(z \times \frac{1}{z'}\right) \equiv \arg z + \arg\left(\frac{1}{z'}\right) \\ &\equiv \arg z - \arg z' \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

en transformant le quotient en produit et on utilise les formules précédentes, soit on préfère la forme exponentielle :

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')} \implies \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' \pmod{2\pi}. \text{ [5]}$$

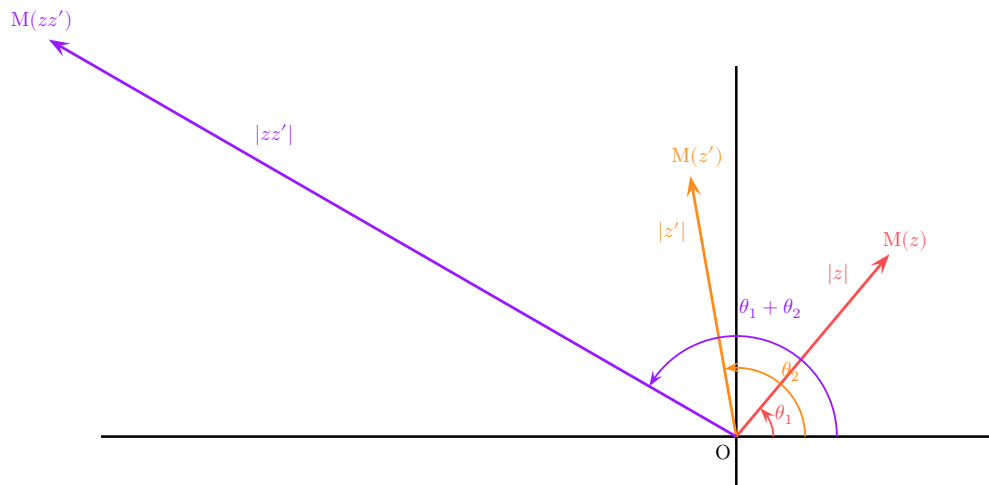
- La dernière assertion est une conséquence de  $(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$ .<sup>[6]</sup>

[3]. Sur les modules, on obtiendrait  $|zz'| = |z| \times |z'|$ .

[4]. Sur les modules, on obtiendrait  $|\bar{z}| = |z|$  et  $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ .

[5]. Sur les modules, on obtiendrait  $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ .

[6]. Sur les modules, on obtiendrait  $|z^n| = |z|^n$ .



**Figure VIII.4** – Dans la multiplication de deux nombres complexes, les modules se *multiplient* et les arguments s'*ajoutent*.

**Exemple 16 :** En reprenant les notations de l'**exemple (15)**, on obtient, *sans calculs* :

- $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z_1}\right) \equiv -\arg z_1 \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \equiv \arg z_2 - \arg z_1 \equiv \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi]$

#### IV.4 Exponentielle complexe

**Définition 8 :** Pour tout nombre complexe  $z$ , on appelle *exponentielle de  $z$* , noté  $\exp(z)$  ou  $e^z$ , le nombre défini par :

$$\exp(z) = e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} \times e^{i \operatorname{Im}(z)}.$$

**Exemple 17 :**  $e^{2 + \frac{i\pi}{4}} = e^2 e^{\frac{i\pi}{4}} = e^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{e^2}{\sqrt{2}} + \frac{i e^2}{\sqrt{2}}.$

Si  $z$  est réel ou imaginaire pur, on retrouve respectivement l'exponentielle réelle et l'exponentielle définie sur les imaginaires purs au **paragraphe (III)**. Cette définition prolonge donc ces deux définitions.

En particulier, si  $z \in i\mathbb{R}$  alors  $e^z \in \mathbb{U}$ .

Ici aussi, ce n'est pas encore la *fonction* exponentielle complexe qui existe et qui est définie par

$$e : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \tag{VIII.5}$$

$$z \longmapsto e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

mais seulement la définition *algébrique* du nombre complexe  $e^z$ .

**ATTENTION**

De façon immédiate, on a les résultats suivants :

**Théorème 24 (Morphisme) :** Soit  $(z; z') \in \mathbb{C}^2$ .

$$e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}$$

Encore une fois, la relation précédente n'est facile que par la définition algébrique que l'on a donné du nombre  $e^z$ .

Montrer cette même formule dans le cadre de la fonction  $z \mapsto e^z$  définie en (VIII.5) demande un peu plus de bagages mathématiques. Le **théorème (24)** est d'ailleurs une propriété caractéristique de cette fonction.

**Proposition 25 (Forme algébrique et polaire) :** Soit  $z \in \mathbb{C}$ .

- $\operatorname{Re}(e^z) = e^{\operatorname{Re}(z)} \cos(\operatorname{Im}(z))$ .
- $\operatorname{Im}(e^z) = e^{\operatorname{Re}(z)} \sin(\operatorname{Im}(z))$ .
- $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$ .
- $\arg e^z \equiv \operatorname{Im}(z) [2\pi]$ .
- $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ .
- $\forall z \in \mathbb{C}, e^z \neq 0$  et  $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$ .

**Preuve :** Il suffit d'écrire et d'identifier à partir de :

$$e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} (\cos(\operatorname{Im}(z)) + i \sin(\operatorname{Im}(z)))$$

Pour la dernière assertion, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , d'après le **théorème (24)** :

$$e^z \times e^{-z} = e^0 = 1.$$

On en déduit deux choses :

- 1 La première :  $e^z$  ne peut être nul, pas plus que  $e^{-z}$ .
  - 2 La seconde :  $e^z$  est inversible pour tout  $z \in \mathbb{C}$  et son inverse est  $e^{-z}$ .
- Magique !

**Théorème 26 (Noyau de l'exponentielle) :** Soit  $(z; z') \in \mathbb{C}^2$ .

$$\begin{aligned} e^z = e^{z'} &\iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) \equiv \operatorname{Im}(z') [2\pi] \end{cases} \\ &\iff z \equiv z' [2i\pi]. \end{aligned}$$

Preuve : Déjà fait maintes fois. Soit  $(z; z') \in \mathbb{C}^2$ .

$$e^z = e^{z'} \Leftrightarrow \begin{cases} |e^z| = |e^{z'}| \\ \arg e^z \equiv \arg e^{z'} [2\pi]. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) \equiv \operatorname{Im}(z') [2\pi]. \end{cases} \Leftrightarrow z \equiv z' [2i\pi].$$

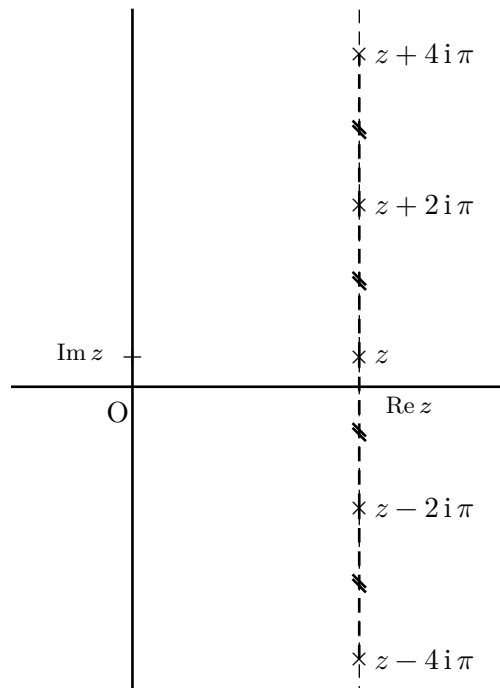


Figure VIII.5 – Nombres complexes ayant la même exponentielle.

**Théorème 27 (Image réciproque)** : Soit  $\omega \in \mathbb{C}$  un nombre complexe.

- Si  $\omega = 0$ , l'équation  $e^z = \omega$  n'a pas de solution.
- Si  $\omega \neq 0$ , l'équation  $e^z = \omega$  a une infinité de solutions définies par :

$$\operatorname{Re}(z) = \ln |\omega| \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z) \equiv \arg(\omega) [2\pi].$$

Preuve : Il suffit d'écrire (encore) les égalités entre module et argument.

**Exercice 19** : Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $e^z = 2 + i$ .

**Correction** :  $z \equiv \frac{1}{5} \ln(5) + i \arctan\left(\frac{1}{2}\right) [2i\pi]$ .

**Moralité** : Le **théorème (24)** et le **théorème (26)** montrent que l'application exponentielle est un morphisme continue surjectif de  $(\mathbb{C}, +)$  dans  $(\mathbb{C}^*, \times)$  de noyau  $2i\pi\mathbb{Z}$ .



**Théorème 28 (Dérivée de composées) :** Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction dérivable sur  $I$ .

Alors la fonction  $f = \exp \circ \varphi = e^\varphi$  est dérivable sur  $I$  et on a :

$$\forall t \in I, f'(t) = \varphi'(t) \times e^{\varphi(t)}.$$

**Preuve :** On a rapidement :

$$f_1 = \operatorname{Re}(e^\varphi) = e^{\operatorname{Re}(\varphi)} \cos(\operatorname{Im}(\varphi)) \quad \text{et} \quad f_2 = \operatorname{Im}(e^\varphi) = e^{\operatorname{Re}(\varphi)} \sin(\operatorname{Im}(\varphi)).$$

Par compositions, produits et sommes de fonctions dérivables sur  $I$ ,  $\exp(\varphi)$  est dérivable sur  $I$  d'après le **théorème (14)** et en utilisant les formules de dérivation usuelles, on obtient :

$$\begin{aligned} (e^\varphi)' &= f_1' e^{f_1} (\cos f_2 + i \sin f_2) + e^{f_1} (-f_2' \sin f_2 + i f_2' \cos f_2) \\ &= (f_1' + i f_2') e^{f_1} (\cos f_2 + i \sin f_2) \\ &= \varphi' e^\varphi. \end{aligned}$$

**Exemple 18 :** Pour  $a \in \mathbb{C}$  et  $f : x \mapsto e^{ax}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f^{(n)}(x) = a^n e^{ax} = a^n f(x)$ .

**Exercice 20 :** Dériver les fonctions complexes  $t \mapsto e^{e^{it}}$  et  $t \mapsto e^{\arccos(t) + i \arcsin(t)}$ .

## V APPLICATIONS À LA TRIGONOMÉTRIE

Les théorèmes et propriétés qui suivent illustrent bien le potentiel de la forme exponentielle en simplifiant un certain nombre de calculs liés à la trigonométrie. Nous présentons ci-dessous quelques méthodes à connaître.

**Exemple 19 (Expression de  $\cos \frac{\pi}{12}$ ) :** Il suffit de remarquer que  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ .

D'où :

$$\begin{aligned} e^{i \frac{\pi}{12}} &= e^{i \frac{\pi}{3}} e^{-i \frac{\pi}{4}} \\ \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on trouve :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

**V.1** Formule d'Euler et de Moivre

Commençons par réécrire une des assertions du **théorème (5)** :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

**Proposition 29 (Formule d'Euler) :**

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

En particulier, les fonctions sin et cos sont respectivement les parties réelles et imaginaires de la fonction  $\theta \mapsto e^{i\theta}$ .

**Preuve :** On a :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos(\theta) + i \sin(\theta), \\ e^{-i\theta} &= \cos(\theta) - i \sin(\theta). \end{aligned}$$

La somme et la différence des deux expressions précédentes donnent le résultat.

**Exercice 21 :** Développer  $A = (e^{i\theta} - 1)^3$  et  $B = (1 + e^{i\theta})^4$ .

**Remarque :**  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}(ix) = \cos(x) \quad \operatorname{sh}(ix) = i \sin(x)$   
 $\operatorname{cos}(ix) = \operatorname{ch}(x) \quad \operatorname{sin}(ix) = i \operatorname{sh}(x).$

Il est alors aisé de retrouver les formules trigonométriques hyperboliques à partir de leurs homologues circulaires.

Par exemples :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(ix) + \sin^2(ix) = 1 &\iff \operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}^2(x) = 1. \\ \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \cos(i(a+b)) = \cos(ia)\cos(ib) - \sin(ia)\sin(ib) \\ &\iff \operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b). \end{aligned}$$

**Théorème 30 (Formules de Moivre) :** Soient  $\theta$  un nombre réel et  $n$  un entier.

$$\left( \cos(\theta) + i \sin(\theta) \right)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

**Preuve :** Magique de simplicité grâce à la notation exponentielle, c'est simplement une réécriture de la **proposition (17)** :

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \iff \left( \cos(\theta) + i \sin(\theta) \right)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

## Un peu d'histoire :

- Abraham de Moivre (1667, Vitry-le-François - 1667, Londres) était un mathématicien ami des physiciens et astronomes Newton et Halley qu'il rencontra lors de son exil forcé en Angleterre à la suite de la révocation de l'édit de Nantes en 1685 et la recrudescence des persécutions contre les huguenots<sup>a</sup>. Il faudrait théoriquement dire « formule de De Moivre », (selon la règle de conservation de la particule onomastique pour les noms d'une syllabe, comme de Gaulle), mais on dit plus souvent « formule de Moivre ».
- La version démontrée par Moivre est la version donnée avec les fonctions sin et cos, le lien avec les propriétés de l'exponentielle n'ayant été découvertes que plus tard par Euler (19<sup>ème</sup> siècle), qui est à l'origine de la notation exponentielle  $e^{i\theta}$ .

a. protestants (ndp.)

**Exemple 20 (Duplication des angles) :** À l'aide des formules de Moivre, on peut retrouver les formules de duplication de  $\cos 2\theta$  et  $\sin 2\theta$  :

D'une part,  $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^2 = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)$ .

D'autre part, en développant,  $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^2 = (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) + 2i \cos(\theta) \sin(\theta)$ .

En identifiant, parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \quad \text{et} \quad \sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

À l'aide de la forme exponentielle, on peut très facilement retenir et redémontrer les formules d'addition des sinus et cosinus.

**Proposition 31 (Formule d'addition) :** Pour tous réels  $a$  et  $b$ , on a :

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b). & \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b). \\ \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b). & \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b). \end{aligned}$$

**Preuve :** Pour tous  $a$  et  $b$  réels, on a :

$$e^{ia} = \cos a + i \sin a \quad \text{et} \quad e^{ib} = \cos b + i \sin b.$$

Or,  $e^{ia} \times e^{ib} = e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i \sin(a+b)$  mais aussi :

$$\begin{aligned} e^{ia} \times e^{ib} &= (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) \\ &= \cos a \cos b - \sin a \sin b + i(\sin a \cos b + \cos a \sin b). \end{aligned}$$

En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient les deux premières formules. Il suffit alors de remplacer  $b$  par  $-b$  et d'utiliser la parité de cos et l'imparité de sin pour avoir la deuxième série de formules.

### V.2 Linéarisation des puissances de cosinus et sinus

Les formules d'Euler permettent, comme on l'a déjà vu, de linéariser les expressions en  $\cos^2$  et  $\sin^2$ .

D'une manière générale, pour linéariser une expression trigonométrique  $\cos^k x \sin^\ell x$  (en combinaison linéaire de termes en  $\cos(\alpha x)$  ou  $\sin(\beta x)$ ), on procède comme suit :

Méthode 5 (Linéarisation de  $\cos^k x \sin^\ell x$ ) :

- 1 On utilise les formules d'Euler de la proposition (29) pour changer  $\cos x$  et  $\sin x$  en somme de termes avec  $e^{ix}$  et  $e^{-ix}$ .
- 2 On développe complètement, avec le binôme de Newton [7].
- 3 On regroupe les termes deux à deux conjugués pour reconnaître des  $\cos(\alpha x)$  ou  $\sin(\beta x)$ .

Exercice 22 : Linéariser  $\cos^5(x)$  et  $\cos^2(x) \sin^3(x)$ .

### V.3 Factorisation par l'angle de l'arc moitié

Méthode 6 (Factorisation par l'angle de l'arc moitié) :

Pour factoriser une expression du type  $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$  :

- 1 On factorise par l'angle moitié, c'est à dire par  $e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$ .
- 2 On utilise ensuite les formules d'Euler de la proposition (29)

Exercice 23 : Factoriser les expressions suivantes :

- 1  $\forall t \in \mathbb{R}, 1 + e^{it}$  et  $1 - e^{it}$ .
- 2
  - a Soient  $p$  et  $q$  des réels. Montrer que  $e^{ip} + e^{iq} = 2e^{i\frac{p+q}{2}} \cos \frac{p-q}{2}$ .
  - b En déduire des formules plus aisées pour  $\cos(p) + \cos(q)$ ,  $\cos(p) - \cos(q)$ ,  $\sin(p) + \sin(q)$  et  $\sin(p) - \sin(q)$  avec  $(p; q) \in \mathbb{R}^2$ .

Cette méthode, appelée aussi *principe de symétrisation des arguments*, permet d'exprimer une somme ou une différence de deux exponentielles à l'aide des fonctions trigonométriques. C'est notamment intéressant pour obtenir la partie réelle et la partie imaginaire sous forme factorisée.

Soient  $a$  et  $b$  deux réels. Alors :

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left( e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}} \right) = 2 \cos \left( \frac{a-b}{2} \right) e^{i\frac{a+b}{2}}.$$

$$e^{ia} - e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left( e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{-i\frac{a-b}{2}} \right) = 2i \sin \left( \frac{a-b}{2} \right) e^{i\frac{a+b}{2}}.$$

Remarquez que c'est une façon commode de retenir ou retrouver les formules de factorisation des fonctions trigonométriques (transformation d'une somme en produit).

Conséquence de l'exercice (23), une nouvelle série de formules trigonométriques :

$$[7]. (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

**Proposition 32 (Formule de factorisation par l'angle moitié) :** Soient  $p$  et  $q$  deux réels :

- $\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$
- $\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$
- $\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$
- $\sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right).$

**Preuve :** Afin de ne pas tout redémontrer, il sera bon de se rappeler, à partir de la première expression de  $\cos(p) + \cos(q)$ , que

$$-\cos q = \cos(q \pm \pi) \quad \text{et} \quad \pm \sin(p) = \cos\left(p \pm \frac{\pi}{2}\right).$$

**Exercice 24 :** Mettre  $e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{3}}$  sous forme exponentielle.

#### V.4 Calculs de sommes de cosinus et sinus

Les nombres complexes à travers la forme exponentielle sont aussi utiles pour le calcul de sommes de cosinus ou sinus

On écrira alors que  $\cos(\theta) = \operatorname{Re}(e^{i\theta})$ ,  $\sin(\theta) = \operatorname{Im}(e^{i\theta})$  et on utilisera la linéarité des opérateurs  $\operatorname{Re}$  et  $\operatorname{Im}$  avant de remarquer, souvent, un binôme de Newton ou une série géométrique.

**Exercice 25 :** Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ . On pose :

$$A_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ikt}, \quad \text{le noyau de Dirichlet, et} \quad B_n(t) = \sum_{k=0}^n A_k(t).$$

Montrer que  $A_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}}$  et  $B_n(t) = \left(\frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$ .

Correction : Pour  $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ ,  $e^{it} \neq 1$  et on a :

$$\begin{aligned}
 A_n(t) &= \sum_{k=-n}^n e^{ikt} = 1 + \sum_{k=1}^n (e^{ikt} + e^{-ikt}) = 1 + \sum_{k=1}^n (e^{ikt} + \overline{e^{-ikt}}) \\
 &= 1 + 2 \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}(e^{ikt}) = 1 + 2 \operatorname{Re} \left( \sum_{k=1}^n e^{ikt} \right) = 2 \operatorname{Re} \left( \sum_{k=0}^n (e^{it})^k \right) - 1 \\
 &= 2 \operatorname{Re} \left( \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} \right) - 1 = 2 \operatorname{Re} \left( e^{i \frac{nt}{2}} \frac{e^{-i \frac{(n+1)t}{2}} - e^{i \frac{(n+1)t}{2}}}{e^{-i \frac{t}{2}} - e^{i \frac{t}{2}}} \right) - 1 \\
 &= 2 \operatorname{Re} \left( e^{i \frac{nt}{2}} \frac{\sin \left( \frac{(n+1)t}{2} \right)}{\sin \left( \frac{t}{2} \right)} \right) - 1 = 2 \cos \left( \frac{nt}{2} \right) \frac{\sin \left( \frac{(n+1)t}{2} \right)}{\sin \left( \frac{t}{2} \right)} - 1 \\
 &= \frac{\sin \left( \frac{nt}{2} + \frac{(n+1)t}{2} \right) - \sin \left( \frac{nt}{2} - \frac{(n+1)t}{2} \right)}{\sin \left( \frac{t}{2} \right)} - 1 \\
 &= \frac{\sin \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) t \right) - \sin \left( \frac{t}{2} \right)}{\sin \left( \frac{t}{2} \right)} - 1 = \frac{\sin \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) t \right)}{\sin \left( \frac{t}{2} \right)} \\
 &= \frac{\sin \frac{(2n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}.
 \end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned}
 B_n(t) &= \sum_{k=0}^n A_k(t) = \sum_{k=0}^n \frac{\sin \frac{(2k+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \sum_{k=0}^n \operatorname{Im} \left( e^{i \frac{(2k+1)t}{2}} \right) = \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \operatorname{Im} \left( e^{i \frac{t}{2}} \sum_{k=0}^n (e^{it})^k \right) \\
 &= \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \operatorname{Im} \left( e^{i \frac{t}{2}} \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} \right) = \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \operatorname{Im} \left( e^{i \frac{(n+1)t}{2}} \frac{e^{-i \frac{(n+1)t}{2}} - e^{i \frac{(n+1)t}{2}}}{e^{-i \frac{t}{2}} - e^{i \frac{t}{2}}} \right) \\
 &= \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \operatorname{Im} \left( e^{i \frac{(n+1)t}{2}} \frac{\sin \left( \frac{(n+1)t}{2} \right)}{\sin \left( \frac{t}{2} \right)} \right) = \left( \frac{\sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2.
 \end{aligned}$$

### V.5 « Délinéarisation » ou Polynômes de Tchebychev

Il s'agit du cheminement inverse, consistant à écrire  $\cos(nx)$  ou  $\sin(nx)$  en fonction des puissances de  $\cos(x)$  et/ou  $\sin(x)$ .

La méthode repose sur les formules de Moivre de la **proposition (30)**.

Pour transformer  $\cos(nx)$  ou  $\sin(nx)$  en un polynôme en  $\cos$  ou en  $\sin$ , on procède comme à l'**exemple (20)** i.e. :

Méthode 1 (Délinéarisation de  $\cos nx$  et  $\sin nx$ ) :

- 1 On écrit  $\cos(nx) = \operatorname{Re}((e^{ix})^n) = \operatorname{Re}((\cos x + i \sin x)^n)$ .
- 2 On développe avec le binôme de Newton.
- 3 On ne garde que la partie réelle (ou imaginaire dans le cas d'un sinus).

Exercice 26 : Exprimer  $\cos(6x)$  en fonction de  $\cos(x)$ .

### V.6 Factorisation de sommes de cosinus et de sinus

**Proposition 33 (Transformation de Fresnel) :** Si  $(a; b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$  et  $\omega$  un réel, il existe  $(A; \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  tel que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$a \cos \omega t + b \sin \omega t = A \cos(\omega t + \varphi).$$

**Preuve :** On utilise, comme précédemment, les formules de la **proposition (29)**.

Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on a :

$$a \cos \omega t + b \sin \omega t = a \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} - ib \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2} = \frac{a - ib}{2} e^{i\omega t} + \frac{a + ib}{2} e^{-i\omega t}.$$

Notons  $z = \frac{a + ib}{2} \neq 0$  et  $r e^{-i\varphi}$  sa forme polaire [8].

$$\begin{aligned} \text{D'où, } a \cos \omega t + b \sin \omega t &= \bar{z} e^{i\omega t} + z e^{-i\omega t} = \bar{z} e^{i\omega t} + \overline{\bar{z} e^{i\omega t}} = 2\operatorname{Re}(\bar{z} e^{i\omega t}) \\ &= 2\operatorname{Re}(r e^{i(\omega t + \varphi)}) = \underbrace{2r}_A \cos(\omega t + \varphi) \\ &= A \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

En particulier,  $A = 2r = \sqrt{a^2 + b^2}$  et  $\varphi = -\arg(a + ib)$ .

**Remarque :** Une telle fonction  $t \mapsto a \cos \omega t + b \sin \omega t$  est appelée *signal sinusoïdal*.

Physiquement, le réel  $A$  représente son amplitude, et  $\varphi$  son déphasage. Comme vu dans la preuve, l'amplitude est alors le module de  $a + ib$  et la phase son argument.

**Exercice 27 :** Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

- 1 Simplifier l'expression  $\sqrt{2} \cos(\theta) + \sqrt{6} \sin(\theta)$ .
- 2 Donner une interprétation physique de ce résultat.
- 3 Même question avec  $\sqrt{3} \cos(\theta) - \sin(\theta)$ .

**Correction :**

- 1  $\sqrt{2} \cos(\theta) + \sqrt{6} \sin(\theta) = 2\sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ .
- 2 La somme des signaux  $\theta \mapsto \sqrt{2} \cos(\theta)$  et  $\theta \mapsto \sqrt{6} \sin(\theta)$  est encore un signal sinusoïdal de nouvelle amplitude  $2\sqrt{2}$  et déphasé de  $-\frac{\pi}{6}$ .
- 3  $\sqrt{3} \cos(\theta) - \sin(\theta) = 2 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ .

[8].  $r \in \mathbb{R}_+$  et  $\varphi \in \mathbb{R}$ . On prend un argument en notation négative simplement pour des facilités d'écriture.

# Index

- Affixe, 13
- Angle
  - Factorisation par l'angle moitié, 36
- Argument
  - d'un nombre complexe, 23, 27
  - propriétés algébriques, 29
- Bernoulli, 1
- Bombelli, 1
- $\mathbb{C}$ , 4
- Cardan, 1
- Conjugué
  - d'un nombre complexe, 8
  - Propriétés algébriques, 9
- Continuité, 18
- Dirichlet, 37
- Discriminant, 11
- Dérivabilité, 18
- Élément neutre
  - pour  $+$ , 4
  - pour  $\times$ , 4
- Équation
  - dans  $\mathbb{C}$ , 11
  - du second degré dans  $\mathbb{C}$ , 11
- Euler, 1
  - Formule d', 34
  - Relation d', 20
- Exponentielle, 33
  - complexe, 22, 30
  - Forme algébrique, 31
  - Forme polaire, 31
  - sur  $i\mathbb{R}$ , 17
- Factorisation
  - de sinus et de cosinus, 39
- Fonction
  - bijective, 22
  - exponentielle
    - complexe, 30
  - injective, 4
  - surjective, 22, 32
  - vectorielle, 17, 19
- Forme
  - algébrique, 6, 8, 9, 23, 24, 28
  - exponentielle, 23, 24, 28
  - trigonométrique, 23, 24, 28
- Formule
  - de factorisation par l'angle moitié, 37
  - de Fresnel, 39
  - de Moivre, 38
- Gauss, 1
- Groupe, 22
- Halley, 35
- $i$ , 6
- $i$ , 4
- Identité
  - remarquable, 8
- Imaginaire
  - pur, 6
- Inverse
  - d'un nombre complexe, 4, 5
- Inégalité
  - triangulaire, 16
- Laplace, 1
- Linéarisation
  - de cosinus et sinus, 36
- Linéarité
  - de  $\operatorname{Re}$ , 37
- Loi
  - associative, 4
  - commutative, 4
  - distributive, 4
- Méthode
  - Factorisation par l'angle moitié, 36
  - Forme algébrique d'un quotient, 9
  - Montrer qu'un nombre complexe est réel ou imaginaire, 6
  - Trouver la forme trigonométrique, 26
- Module
  - d'un nombre complexe, 14
  - propriétés algébriques, 14, 29
- Moivre, 35
  - Formule de, 34
- Morphisme, 32
- Newton, 35
- Nombre complexe, 3
  - Affixe d'un, 13
  - argument, 23
  - conjugué, 9, 11
  - Égalité entre, 12
  - Ensemble des, 4
  - imaginaire pur, 24
  - inverse, 15
  - module, 14
  - représentation, 13
  - réel, 10, 24
- Noyau
  - de Dirichlet, 37
  - de l'exponentielle, 32
- Opposé
  - d'un nombre complexe, 4, 5
- Partie
  - imaginaire, 6, 17, 35
  - réelle, 6, 17, 35
- Plan
  - complexe, 12, 13



Polynôme  
de Tchebychev, 38

Réel, 6  
Nombre, 6

Somme  
de sinus et de cosinus, 37

Série  
géométrique, 37

Tchebychev, 38

Théorème  
de D'Alembert-Gauss, 1  
fondamental  
de l'algèbre, 2

Topologie  
de  $\mathbb{C}$ ., 19

Trigonométrie, 33