VIII

Les Nombres Complexes I

Contenu

I L'ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

I.1 Construction de $\mathbb{C}$

Définition 1 (L'ensemble des nombres complexes) : On appelle ensemble des *nombre complexes*, noté $\mathbb{C}$, l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des opérations $+_\mathbb{C}$ et $\times_\mathbb{C}$ définies par :

- $(a\,;b) +_\mathbb{C} (a'\,;b') = (a +_\mathbb{R} a'\,;b +_\mathbb{R} b')$,
- $(a\,;b) \times_\mathbb{C} (a'\,;b') = (a \times_\mathbb{R} a' -_\mathbb{R} b \times_\mathbb{R} b'\,;a \times_\mathbb{R} b' +_\mathbb{R} a' \times_\mathbb{R} b)$.

On note :

$$1_\mathbb{C} = (1\,;0) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{i} = (0\,;1)\,.$$

L'application $i_\mathbb{R} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R}^2 \\ a & & (a\,;0) \end{array}$ est une injection qui permet alors de considérer que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et d'identifier tout réel x au complexe $(x\,;0)$.

Proposition 1 (Identification des lois de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$) :

1. Soient $z = (a\,;b)$ et $z' = (a'\,;b')$ deux nombres complexes.

$$z =_\mathbb{C} z' \iff \left\{ \begin{array}{ccc} a & =_\mathbb{R} & a' \\ b & =_\mathbb{R} & b' \end{array} \right.$$

2. Les lois $+_\mathbb{C}$ et $\times_\mathbb{C}$ prolongent celles de $\mathbb{R}$:
3. Les lois $+_\mathbb{C}$ et $\times_\mathbb{C}$ sont associatives et commutatives.
4. $\times_\mathbb{C}$ est distributive sur $+_\mathbb{C}$.
5. La loi $+_\mathbb{C}$ possède un *élément neutre* $0_\mathbb{C} = (0\,;0)$ que l'on notera encore 0.

   Tout nombre complexe $z = (a\,;b)$ possède un symétrique pour $+_\mathbb{C}$ appelé *opposé de z* et noté $-z$ et tel que :

$$-z = (-a\,;-b)\,.$$

6. La loi $\times_\mathbb{C}$ possède un *élément neutre* $1_\mathbb{C} = (1\,;0)$ que l'on notera encore 1.

   Tout nombre complexe $z = (a\,;b)$ non nul possède symétrique pour $\times_\mathbb{C}$ appelé *inverse de z* et noté $\frac{1}{z}$ et tel que :

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}\,;-\frac{b}{a^2+b^2} \right).$$

7. Enfin, le nombre $(0\,;1)$ est tel que $(0\,;1)^2 = (-1\,;0)$. On le notera i.

   En particulier, on a :

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

Si cela était au programme, la proposition (1) pourrait simplement se résumer en disant que $\left(\mathbb{C}, +, \times\right)$ est un corps commutatif.

En particulier, on retrouve grâce à 6 que :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad zz' = 0 \iff z = 0 \quad \text{ou} \quad z' = 0.$$

Définition/Théorème 2 (Forme algébrique) : Tout nombre complexe $z = (a\,;b)$ peut s'écrire de manière *unique* la forme :

$$z = a + \mathrm{i}\,b, \qquad \text{avec } (a\,;b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \mathrm{i}^2 = -1.$$

- Le nombre réel a s'appelle la *partie réelle* de z notée $\mathrm{Re}\,(z)$.
  Si $\mathrm{Re}\,(z) = 0$, on dit que z est un *imaginaire pur* et on note $\mathrm{i}\,\mathbb{R}$ leur ensemble.
- Le nombre réel b s'appelle la *partie imaginaire* de z notée $\mathrm{Im}\,(z)$.
  Si $\mathrm{Im}\,(z) = 0$, le nombre complexe z est *réel* dont l'ensemble est noté $\mathbb{R}$
- L'écriture $z = a + \mathrm{i}\,b$ est appelée la *forme algébrique* de z.

Exemples 1 :

- $z_1 = 4 + 7\,\mathrm{i} - (2 + 4\,\mathrm{i}) = 4 + 7\,\mathrm{i} - 2 - 4\,\mathrm{i} = 2 + 3\,\mathrm{i}$.
- $z_2 = (2 + \mathrm{i})(3 - 2\,\mathrm{i}) = 6 - 4\,\mathrm{i} + 3\,\mathrm{i} - 2\,\mathrm{i}^2 = 6 - \mathrm{i} + 2 = 8 - \mathrm{i}$.
- $z_3 = (4 - 3\,\mathrm{i})^2 = 16 - 24\,\mathrm{i} + (3\,\mathrm{i})^2 = 7 - 24\,\mathrm{i}$.

Exemples 2 :

- $\mathrm{Re}\left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\right) = \sqrt{3}$ et $\mathrm{Im}\left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\right) = -1$.
- $\mathrm{Re}\,(4\,\mathrm{i}) = 0$ et $\mathrm{Im}\,(4\,\mathrm{i}) = 4$.

Remarques : $\mathrm{Im}\,(z) = 0 \iff z \in \mathbb{R}$. En particulier, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Méthode 1 (Montrer qu'un nombre complexe est réel ou imaginaire) :
Pour montrer qu'un nombre complexe est réel ou imaginaire pur :

1. *On l'écrit sous sa forme algébrique.*
2. *On écrit que sa partie imaginaire ou réelle est nulle suivant les cas.*
3. *On résout l'équation ainsi écrite.*

Exercice 1 : Soit la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = z^2.$$

1. Donner la forme algébrique de $f(z)$.
2. Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M du plan dont l'affixe remplie la condition demandée

   a. $f(z) \in \mathbb{R}$
   b. $f(z)$ imaginaire pur
   c. $\mathrm{Im}\,(f(z)) = 2$
   d. $\mathrm{Re}\,(f(z)) = \mathrm{Im}\,(z)$

Corollaire I.1 :

- Deux nombres complexes z et z' sont égaux si, et seulement si leur partie imaginaire et réelle sont égales.

$$z = z' \iff \begin{cases} \mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Re}\,(z') \\ \mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{Im}\,(z') \end{cases}$$

- Soient $z = a + \mathrm{i}\,b$ et $z' = a' + \mathrm{i}\,b'$ deux nombres complexes.
  - $z + z' = (a + a') + \mathrm{i}\,(b + b')$.
  - $zz' = (aa' - bb') + \mathrm{i}\,(a'b + ab')$.
  - $-z = -a - \mathrm{i}\,b$.
  - Si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a - \mathrm{i}\,b}{a^2 + b^2}$

ATTENTION

Il n'existe pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$ compatible avec ses opérations.

En effet, si c'était le cas et si $\ll$ était une telle relation d'ordre et si on pouvait trouver deux complexes z et z' tels que : $z \ll z'$ alors on aurait

— soit $\mathrm{i}\,z \ll \mathrm{i}\,z' \iff -z \ll -z' \iff z' \ll z \implies z = z'$ par anti-symétrie.
— soit $\mathrm{i}\,z' \ll \mathrm{i}\,z \iff -z \ll -z' \iff z' \ll z \implies z = z'$ par anti-symétrie.

Conclusion, tous les nombres complexes comparables seraient égaux ce qui n'est pas possible.

Proposition 2 (Identités remarquables dans $\mathbb{C}$) : Soient a et b deux nombres complexes.

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
- $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.
- $(a + \mathrm{i}\,b)^2 = a^2 + 2ab\,\mathrm{i} - b^2$.
- $(a - \mathrm{i}\,b)^2 = a^2 - 2ab\,\mathrm{i} - b^2$.
- $(a - \mathrm{i}\,b)(a + \mathrm{i}\,b) = a^2 + b^2$.

I.2 Conjugué d'un nombre complexe

Exemple 3 : Trouver la forme algébrique du nombre complexe $z = \dfrac{2 - \mathrm{i}}{3 + 2\,\mathrm{i}}$.

L'idée est de faire disparaître les nombres imaginaires du dénominateur. On utilise la même idée qu'avec les « $\sqrt{}$ » sachant que $\mathrm{i}^2 = -1$.

D'après la proposition (2) , $(a + \mathrm{i}\,b)(a - \mathrm{i}\,b) = a^2 + b^2$. On va donc multiplier numérateur et dénominateur par $3 - 2i$:

$$z = \frac{(2 - \mathrm{i}\,)(3 - 2\,\mathrm{i}\,)}{(3 + 2\,\mathrm{i}\,)(3 - 2\,\mathrm{i}\,)} = \frac{4 - 7\,\mathrm{i}}{13} = \frac{4}{13} - \mathrm{i}\,\frac{7}{13}.$$

Définition 3 (Conjugué d'un complexe) : Soit $z = a + \mathrm{i}\,b$ un nombre complexe.

On appelle *conjugué* de z, noté $\overline{z}$, le nombre $\overline{z} = a - \mathrm{i}\,b$.

Exemples 4 :

- $3-2\,\mathrm{i}$ est le conjugué de $3+2\,\mathrm{i}$.
- $\overline{7}=7$. Le conjugué d'un réel est lui-même.
- $\overline{3\,\mathrm{i}}=-3\,\mathrm{i}$. Le conjugué d'un imaginaire pur est son opposé.

Exercice 2 : Calculer les conjugués des nombres complexes suivants

$z_1 = \dfrac{3}{7} - \mathrm{i}\sqrt{7}$ $\qquad z_2 = \sqrt{2}-3$ $\qquad z_3 = \sqrt{7}+\mathrm{i}\,\pi$

Proposition 3 :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z\overline{z} \in \mathbb{R}_+.$$

Méthode 2 (Forme algébrique d'un quotient) :
Pour trouver la forme algébrique d'un quotient, il suffit de multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Exercice 3 : Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$z_1 = \dfrac{1}{1+i}$ $\qquad z_2 = \dfrac{1+i}{1-i}$ $\qquad z_3 = \dfrac{7}{\mathrm{i}}$

Proposition 4 (Propriétés du conjugué) : Soit z et z' deux nombres complexes, alors :

1. $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
2. $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
3. $\overline{\overline{z}} = z$
4. $\forall z \neq 0,\ \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$
5. $\forall z' \neq 0,\ \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\boxed{\overline{z^n} = \overline{z}^n.}$

Exercice 4 : Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe, déterminer les conjugués des nombres complexes suivants :

$z_1 = z+5-\mathrm{i}$ $\qquad z_2 = \mathrm{i}\,z+2$ $\qquad z_3 = z+\dfrac{1}{\overline{z}}$ $\qquad z_4 = z+\mathrm{i}\,\overline{z}$

Théorème 5 (Fondamental) : $\forall z \in \mathbb{C}$,

- $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$.
- $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.
- $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$.
- $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$.

Remarque : On retiendra qu'un nombre complexe est réel si, et seulement si il est égal à son conjugué ou encore si, et seulement si le point d'affixe $\mathrm{M}(z)$ appartient à l'axe des abscisses.

Exercice 5 : Soit $z = a + \mathrm{i}\,b \in \mathbb{C}$ tel que $a^2 + b^2 = 1$.

Montrer que si $z \neq 1$, alors $\dfrac{1+z}{1-z}$ est un imaginaire pur.

Méthode 3 (Nombres réels et imaginaires purs) :

1. Pour montrer qu'un nombre z est réel il faut et il suffit de montrer que $\bar{z} = z$ ou $\mathrm{Im}\,(z) = 0$. On pourra, par exemple, calculer $z - \bar{z}$.
2. Pour montrer qu'un nombre z est imaginaire pur il faut et il suffit de montrer que $\bar{z} = -z$ ou $\mathrm{Re}\,(z) = 0$. On pourra, par exemple, calculer $z + \bar{z}$.

I.3 Équations dans $\mathbb{C}$ (prélude)

Théorème 6 (Équation du second degré à coefficients réels) : Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

On considère l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad (\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}})$$

L'équation $(\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}})$ admet toujours des solutions dans $\mathbb{C}$.

On appelle *discriminant* de l'équation $(\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}})$, noté Δ, le nombre réel défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$, $(\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}})$ possède une unique solution : $z = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, $(\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}})$ possède deux solutions réelles : $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, $(\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}})$ possède deux solutions complexes *conjuguées* : $z = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Exemple 5 : Soit l'équation $z^2 - z + 1 = 0$. On a $\Delta = -3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$.

Les solutions sont donc $z_1 = \dfrac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

Et, on, la forme factorisée :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad z^2 - z + 1 = \left(z - \frac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right).$$

Exercice 6 (À savoir faire absolument !) : Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

1. $z^2 - 7z = 0$.
2. $z^2 - 4z + 5 = 0$.
3. $-8 = 3z^2$.

Théorème 7 : Soit $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = a_n \mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \ldots + a_1 \mathrm{X} + a_0$ un polynôme à coefficients *réels*.

$$\alpha \in \mathbb{C} \text{ est une racine de P si, et seulement si } \overline{\alpha} \text{ est une racine de P.}$$

Exercice 7 : Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^4 + 4z^2 - 21 = 0$.

II Nombres et Plan complexes

Théorème 8 : L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longmapsto & \mathbb{C} \\ (a\,;b) & & z = a + \mathrm{i}\,b \end{array}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$.

Cette bijection permet d'identifier l'ensemble des nombres complexes au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ appelé *plan complexe*.

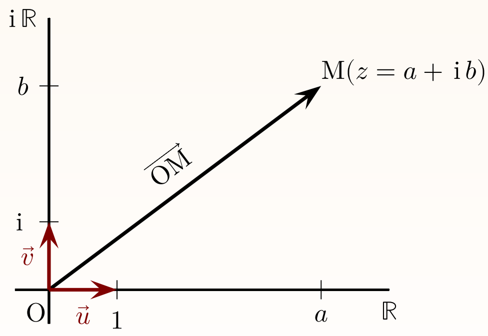
II.1 Représentation des nombres complexes

Le théorème (8) permet donc d'associer à $z = a + \mathrm{i}\,b \in \mathbb{C}$ un unique point M du plan de coordonnées $(a\,;b)$, et un unique vecteur $\overrightarrow{\varphi(\mathrm{M})}$ tel que $\overrightarrow{\varphi(\mathrm{M})} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$.

Plus précisément,

Proposition 9 :

- À tout nombre $z = a + \mathrm{i}\,b$ on peut faire correspondre, de manière unique, un point M de coordonnées $(a\,;b)$ d'un plan orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.
- Réciproquement, tout point $\mathrm{M}\,(a\,;b)$ d'un plan orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ peut être associé, de manière unique, à un nombre complexe $z = a + \mathrm{i}\,b$.

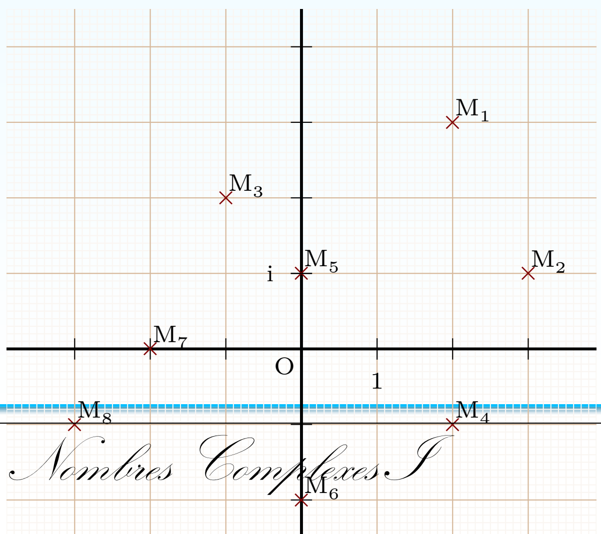


1. Le plan $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ est appelé *plan complexe*.
2. Le nombre complexe z est appelé l'*affixe* du point M ou du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et on écrit $\mathrm{M}(z)$ ou $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(z)$.

Remarques : L'axe des abscisses est alors naturellement appelé l'axe des réels et l'axe des ordonnées celui des imaginaire purs.

Exemple 6 :

1. $z_1 = 2 + 3\,\mathrm{i}$
2. $z_2 = 3 + \mathrm{i}$
3. $z_3 = -1 + 2\,\mathrm{i}$
4. $z_4 = 2 - \mathrm{i}$
5. $z_5 = \mathrm{i}$
6. $z_6 = -2i$
7. $z_7 = -2$
8. $z_8 = -\mathrm{i} - 3$

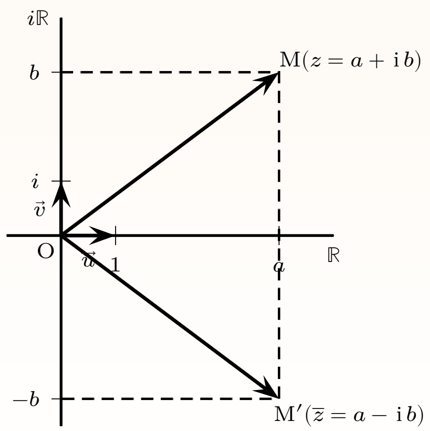


Exercice 8 : Dans chacun des cas suivants, déterminer et représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité proposée :

1. $\mathrm{Re}\,(z) = -2$
2. $\mathrm{Im}\,(z) = 1$
3. $\mathrm{Re}\,(z) \geqslant 1$ et $\mathrm{Im}\,(z) \geqslant 1$
4. $\mathrm{Im}\,(z^2) = 0$
5. $\mathrm{Im}\,(z^2) = 2$
6. $\mathrm{Re}\,((z-1)^2) = 0$

Proposition 10 (Point d'affixe conjuguée) : Soit $z = a + \mathrm{i}\,b$ un nombre complexe et $\mathrm{M}(z)$ un point du plan complexe $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ d'affixe z.

Le point M' d'affixe $\overline{z} = a - \mathrm{i}\,b$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.



Exercice 9 : On pose $\mathrm{j} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

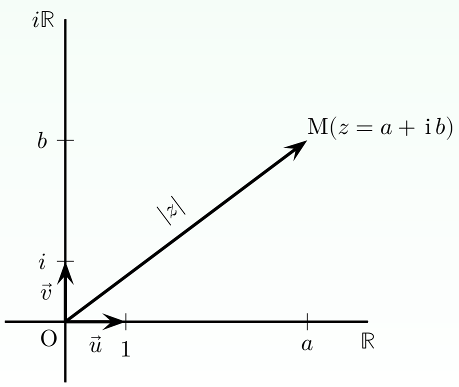
Dans le plan complexe, placer les points d'affixe respective 1, $\overline{1}$, i, $\overline{\mathrm{i}}$, j et $\overline{\mathrm{j}}$.

II.2 Module d'un nombre complexe

Définition 4 : Soit $z = a + \mathrm{i}\,b$ un nombre complexe et $\mathrm{M}(z)$ un point du plan complexe $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ d'affixe z.

On appelle *module* de z, noté $|z|$, la distance OM *i.e.* le réel positif tel que :

$$\begin{aligned}|z| &= \left\|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right\| \\ &= \sqrt{a^2 + b^2}.\end{aligned}$$



Exercice 10 : Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = 3+4\,\mathrm{i}$ $z_2 = 1-\mathrm{i}$ $z_3 = -5-2\,\mathrm{i}$ $z_4 = -5$ $z_5 = 9i$

Proposition 11 : Soient $z = a + \mathrm{i}\,b$ et z' deux nombres complexes.

- $z\overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$.

  En particulier, si $z \neq 0$ alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.
- $|z| = 0_{\mathbb{R}} \iff z = 0_{\mathbb{C}}$
- $|-z| = |z|$ et $|\overline{z}| = |z|$.
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.

  En particulier, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$.
- $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$, avec $z \neq 0$.
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$, avec $z' \neq 0$.

  En particulier, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $|z^n| = |z|^n$.
- $|\mathrm{Re}\,(z)| \leqslant |z|$.
- $|\mathrm{Im}\,(z)| \leqslant |z|$.

Remarque : Si a est un réel, $|a| = \sqrt{a\ \overline{a}} = \sqrt{aa} = \sqrt{a^2}$ car $\overline{a} = a$. La notion de module dans $\mathbb{C}$ généralise donc celle de valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

Exercice 11 : Dans chacun des cas suivants, déterminer le module du nombre complexe proposé :

$$z_1 = \left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\right)(-1-\mathrm{i}) \qquad z_3 = \left(\frac{-3\,\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^2$$

$$z_2 = \mathrm{i}\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right) \qquad z_4 = \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{6}+\mathrm{i}\sqrt{2}}$$

II.3 Inégalité triangulaire

Proposition 12 (Inégalité triangulaire) : Pour tout z_1, z_2 de $\mathbb{C}$ on a :

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

En particulier, $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff z_2 = 0$ ou $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_1 = \alpha z_2$ *i.e.* les points d'affixe z_1 et z_2 sont alignés avec l'origine sur une même demi-droite.

L'inégalité triangulaire peut s'interpréter géométriquement de la manière suivante : si z et z' représentent les affixes de deux vecteurs $\vec{\mathrm{U}}$ et $\vec{\mathrm{V}}$ alors :

$$\left\|\vec{\mathrm{U}} + \vec{\mathrm{V}}\right\| \leqslant \left\|\vec{\mathrm{U}}\right\| + \left\|\vec{\mathrm{V}}\right\|.$$

Le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire correspond donc au cas où les vecteurs $\vec{\mathrm{U}}$ et $\vec{\mathrm{V}}$ sont colinéaires de *même* sens.

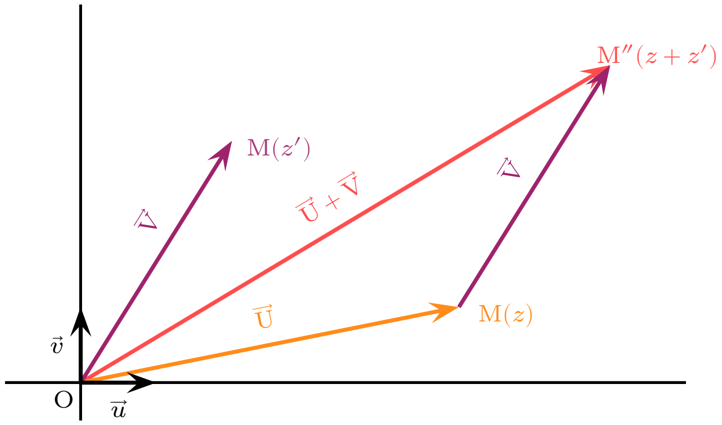


Figure VIII.1 – Inégalité triangulaire pour les normes de vecteurs.

III L'EXPONENTIELLE SUR $i\mathbb{R}$

III.1 Fonctions vectorielles

Définition 5 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

On définit les fonctions :

- *partie réelle* de f : $\quad \mathrm{Re}\,(f) : \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \mathrm{Re}\,(f)\,(x) = \mathrm{Re}\,(f(x))\,. \end{array}$
- et *partie imaginaire* de f : $\quad \mathrm{Im}\,(f) : \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \mathrm{Im}\,(f)\,(x) = \mathrm{Im}\,(f(x))\,. \end{array}$

On a alors :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longmapsto & \mathbb{C} \\ x & & f(x) = \mathrm{Re}\,(f)\,(x) + \mathrm{i}\ \mathrm{Im}\,(f)\,(x). \end{array}$$

En particulier, on peut également définir les fonctions $\overline{f}$ et $|f|$ par leurs valeurs sur I :

$\forall\, x \in \mathrm{I}$, $\quad \bullet\ \overline{f}(x) = \overline{f(x)}$. $\quad \bullet\ |f|(x) = |f(x)|$.

On retrouve alors les formules, dites d'Euler :

- $\mathrm{Re}\,(f) = \dfrac{f + \overline{f}}{2}$.
- $\mathrm{Im}\,(f) = \dfrac{f - \overline{f}}{2\,\mathrm{i}}$.

Exercice 12 : Soit $f : x \longmapsto \sin x + \mathrm{i}\,(x^2 - 1)$.
Définir les fonctions $\mathrm{Re}\,(f)\,, \mathrm{Im}\,(f)\,, \overline{f}$ et $|f|$.

Théorème 13 (Continuité) : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

f est continue sur I si, et seulement si $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ le sont.

Théorème 14 (Dérivabilité) : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

f est dérivable sur I si, et seulement si $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ le sont et on a :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ f'(x) = \mathrm{Re}\,(f)'\,(x) + \mathrm{i}\ \mathrm{Im}\,(f)'\,(x).$$

Exemple 7 : La fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{C} \\ x & & \sin(x) + \mathrm{i}\ \mathrm{e}^{x}. \end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'(x) = \cos(x) + \mathrm{i}\ \mathrm{e}^{x}.$$

Exercice 13 : Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \sin x + \mathrm{i}\,(x^2 - 1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer f'.

Proposition 15 : Soient f et g deux fonctions à valeurs complexes définies sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$.

Alors, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, les fonctions $\lambda f + \mu g$, fg et $\dfrac{f}{g}$, si g ne s'annule pas sur I sont dérivables sur I et on a :

$$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg' \quad \text{et} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

III.2 Notation d'Euler

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{C} \\ \theta & & f(\theta) = \cos(\theta) + \mathrm{i}\ \sin(\theta). \end{array}$$

1 Comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction f est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ f'(\theta) = -\sin(\theta) + \mathrm{i}\ \cos(\theta) = \mathrm{i}\, f(\theta).$$

2 f vérifie $f(0) = 1$.

3 La fonction f est donc solution de problème de Cauchy :

$$(\mathscr{E}) \qquad \begin{cases} y' = \mathrm{i}\ y \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

4 Par analogie avec les systèmes d'équations différentielles linéaires du premier ordre de la forme $\begin{cases} y' = a\, y \\ y(0) = 1. \end{cases}$ dont les solutions sont les fonctions de la forme $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}$, on pose comme définition : $\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad f(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$.

Conclusion : $\boxed{\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{i\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\ \sin(\theta).}$

Cette notation est due à Euler à qui on doit la magnifique relation du même nom pour $\theta = \pi$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} = \cos(\pi) + \mathrm{i}\ \sin(\pi) = -1$.

Autrement écrit :

Théorème 16 (Relation d'Euler) : Pour tout nombre réel θ, on a :

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} + 1 = 0.} \tag{VIII.1}$$

Proposition 17 : Soient θ, $\theta' \in \mathbb{R}$.

Alors :

1. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,0} = 1$.
2. $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right| = 1$.
3. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'}$.
4. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{n\,\mathrm{i}\,\theta}$.
5. $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}$.
6. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'} \iff \theta \equiv \theta'\ [2\pi]$.

On récupère ainsi toutes les propriétés de l'exponentielle réelle.

III.3 Nombres complexes de module 1

Définition 6 (Cercle trigonométrique) : On appelle *cercle trigonométrique* et on note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1\}.$$

Conséquence immédiate, $\forall\,\theta \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \in \mathbb{U}$.

Proposition 18 : Soient z et z' deux éléments de $\mathbb{U}$.

Stabilité par la multiplication : $zz' \in \mathrm{U}$.

Stabilité par l'inverse : $\dfrac{1}{z} = \overline{z} \in \mathbb{U}$.

Exercice 14 : Démontrer que, $\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{1\},\ \dfrac{1+z}{1-z} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \iff z \in \mathbb{U}$.

Théorème 19 :

$$\mathbb{U} = \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta},\ \theta \in \mathbb{R}\right\}.$$

Plus particulièrement, tout nombre complexe de module 1 peut s'écrire $e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Le réel θ est, de plus, unique si on impose $\theta \in \,]-\pi\,;\pi]$.

Corollaire 19.1 :

1. La fonction $\theta \longmapsto \mathrm{e}^{\,i\,\theta}$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$.

   Plus précisément, c'est une bijection de tout intervalle $[\alpha\,;\alpha+2\pi[$ sur $\mathbb{U}$.
2. La fonction $(r\,;\theta) \longmapsto r\,\mathrm{e}^{\,i\,\theta}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi\,;\pi]$ sur $\mathbb{C}^*$.

IV FORME POLAIRE

IV.1 Forme trigonométrique et exponentielle

Définition/Théorème 7 :

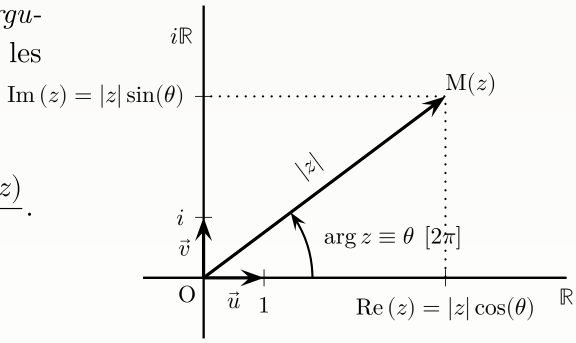
1. Pour tout nombre complexe z non nul, il existe un unique réel strictement positif r et un unique $\theta \in \mathbb{R}$ modulo 2π tel que :

$$\begin{aligned} z &= r\ \mathrm{e}^{i\theta} \qquad \text{avec } r = |z| && \text{(forme exponentielle)} \\ &= r\big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\ \sin(\theta)\big). && \text{(forme trigonométrique)} \end{aligned}$$

   Cette écriture s'appelle la *forme trigonométrique*/*exponentielle*/polaire de z.

2. Tout réel θ de ce type s'appelle un *argument de z* et est défini modulo 2π par les relations :

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{Re}\,(z)}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{Im}\,(z)}{|z|}.$$



   On note alors $\arg\,(z) \equiv \theta\ \ [2\pi]$.

3. Dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, $\arg\,(z)$ est une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ où M est le point du plan d'affixe z.
4. L'unique mesure de cet angle dans $]-\pi\,;\pi]$ définit l'argument principal de z, noté $\arg\,(z)$.

ATTENTION

Le réel r correspond au module, on fera donc toujours bien attention à ce qu'il soit un nombre réel *positif*.

Par exemple, -1 n'est pas le module de $-\mathrm{e}^{\,i\,\pi} = 1$.

Remarques :

- On ne peut pas définir d'argument pour 0, mais son module suffit à le caractériser.
- On a vu que si θ_0 est un argument de z, l'ensemble de ses arguments est de la forme $\left\{\theta_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Le réel θ est unique si on impose $\theta \in [0\,;2\pi[$ ou $\theta \in]-\pi\,;\pi]$.
- Connaissant la forme algébrique d'un nombre complexe, on peut donc obtenir son module et son argument à partir de ses parties réelles et imaginaires.

On obtiendra alors une mesure exacte de θ si $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont des valeurs connues comme $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1, ... Sinon, on obtiendra une valeur approchée à l'aide de la calculatrice.

Théorème 20 (Caractérisation d'un réel, d'un imaginaire pur) : Soit z un nombre complexe non nul.

- $z \in \mathbb{R} \iff \arg z \equiv 0 \text{ ou } \pi \; [2\pi] \iff \arg z \equiv 0 \; [\pi]$.
- $z \in i\mathbb{R} \iff \arg z \equiv \pm\frac{\pi}{2} \; [2\pi] \iff \arg z \equiv \frac{\pi}{2} \; [\pi]$.

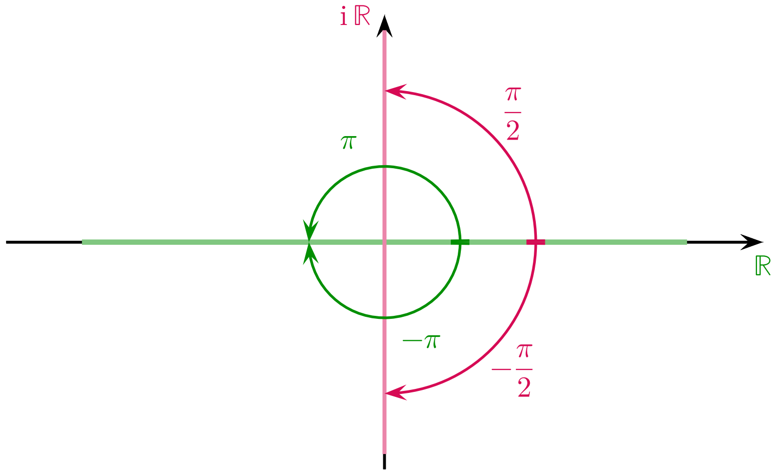


Figure VIII.2 – Réels et imaginaires purs caractérisés par leur argument.

Exemple 8 : Différentes écritures du nombre complexe $1 + i\sqrt{3}$:

Forme exponentielle	Forme trigonométrique	Forme algébrique
$2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$	$2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$	$1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

Exercice 15 : Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$z_1 = 5\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ $\qquad$ $z_2 = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi)$

Exemples 9 : Quelques exemples classiques à retenir ou à savoir retrouver :

- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,0} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi} = 1$.
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$.
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\pi} = -1$.
- $2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 2\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\,2\sin\frac{\pi}{3} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.
- $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = 1 + \mathrm{i}$.
- $2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 2\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\,2\sin\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} + \mathrm{i}$.

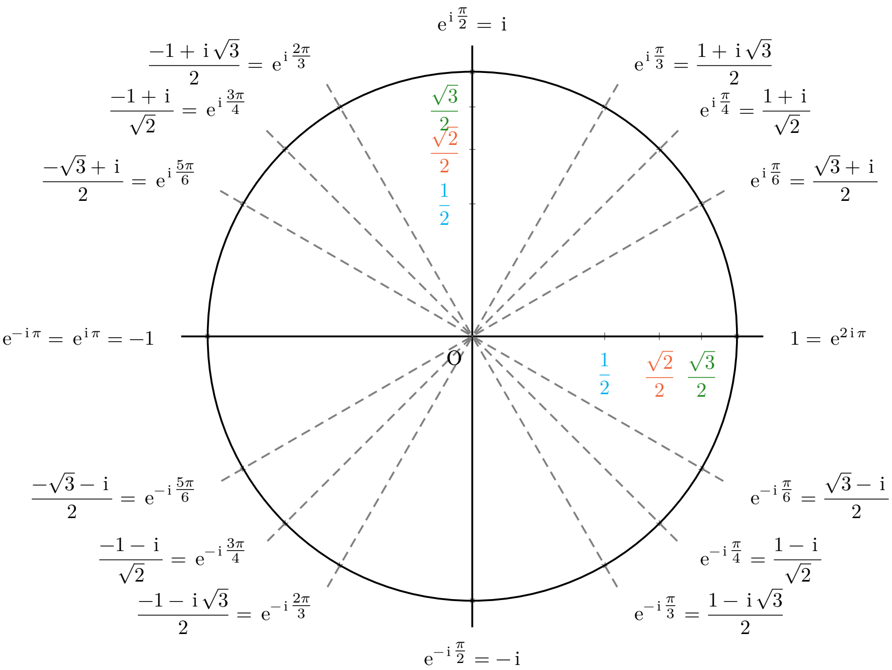


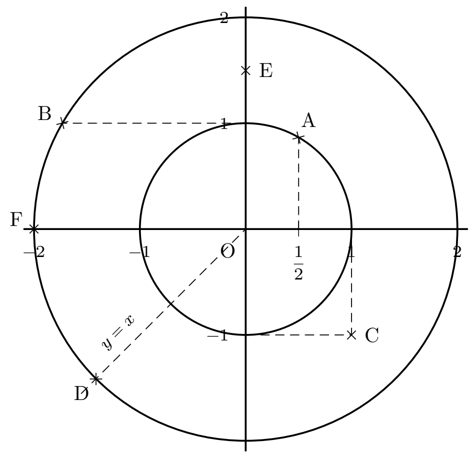
Figure VIII.3 – Formes exponentielles remarquables

Exemple 10 (Forme exponentielle, trigonométrique et algébrique) :

$$\begin{aligned}
z &= 4\,e^{i\frac{3\pi}{4}} && \text{(Forme exponentielle)}\\
&= 4\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] && \text{(Forme trigonométrique)}\\
&= 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &&\\
&= -2\sqrt{2} + 2\,i\sqrt{2}. && \text{(Forme algébrique)}
\end{aligned}$$

Exercice 16 :

Déterminer la forme exponentielle de l'affixe de chacun des points A, B, C, D, E et F placés dans le repère donné ci-contre :



Exemple 11 : Quelle est la forme algébrique de $z = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$?

Il suffit de calculer et développer :

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{i}\,.$$

Méthode 4 (Mettre sous forme trigonométrique un nombre complexe) :
Soit $z = a + \mathrm{i}\,b$ un nombre complexe sous sa forme algébrique.

Pour trouver sa forme trigonométrique :

1. On calcule $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. On cherche l'angle θ tel que $\cos(\theta) = \frac{a}{|z|}$ et $\sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$.

Au pire, si $a \neq 0$, $\theta \equiv \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & [2\pi] \quad \text{si } a > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & [2\pi] \quad \text{si } a < 0 \text{ et } b > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & [2\pi] \quad \text{si } a < 0 \text{ et } b < 0 \end{cases}$

Une autre méthode est, le module trouvé, de factoriser par celui-ci et de reconnaître directement $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ dans l'expression

$$z = |z|\left(\frac{a}{|z|} + \mathrm{i}\,\frac{b}{|z|}\right).$$

Exemples 12 :

1. $\arg(3 + 2\,\mathrm{i}) \equiv \arctan\left(\frac{2}{3}\right) \quad [2\pi]$.
2. $\arg(-1 + \mathrm{i}) \equiv \arctan(-1) + \pi = \frac{3\pi}{4} \quad [2\pi]$.
3. $\arg\left(-3 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right) \equiv \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \pi = \frac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$.

Exemples 13 : Déterminer la forme trigonométrique des nombres suivants :

- $z_1 = 1 - i : \begin{cases} |1-i| & = \sqrt{2} \\ \cos(\theta) & = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) & = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

  D'où $r = \sqrt{2}$, $\theta \equiv -\frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$ et $z_1 = 1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$
  $= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

- $z_2 = -\sqrt{3} + i : \begin{cases} \left|-\sqrt{3}+i\right| & = 2 \\ \cos\theta & = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) & = \frac{1}{2} \end{cases}$

D'où $r = 2$, $\theta \equiv -\frac{\pi}{6}$ et $z_2 = -\sqrt{3} + i = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$
$= 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}}$.

Exercice 17 : Trouver un argument des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = -2 + 2\,\mathrm{i}$.
2. $z_2 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

Exemples 14 (Factorisation directe) : Quelle est la forme trigonométrique de $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$?

1. Tout d'abord, on calcule $|z| = \left|1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{1+3} = 2$.
2. Puis, on factorise l'expression de z par $|z|$:
$$z = 2\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$
3. On cherche, sur le cercle trigonométrique quel est l'angle qui a pour cosinus $\frac{1}{2}$ et pour sinus $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C'est $\frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$.

D'où, $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\,\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}$.

Remarque : Dans certains cas, il est inutile de faire tous les calculs : la forme trigonométrique se « voit » :

— $1 = \cos 0 + i\sin 0$ donc $|1| = 1$ et $\arg(1) = 0$
— $i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ donc $|i| = 1$ et $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$

IV.2 Règles de calcul en notation exponentielle

Théorème 21 :

$$\forall\, z, z' \in \mathbb{C}^*, \quad z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) \equiv \arg(z') \ [2\pi] \end{cases}$$

Autrement dit, deux nombres complexes sous forme exponentielle sont égaux si, et seulement si ils ont même module et même argument modulo 2π.

Proposition 22 : Soient $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ et $z' = r'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'}$ deux nombres complexes sous leur forme exponentielle avec $r, r' \neq 0$ et n un nombre entier :

- *Produit :* $r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \times r'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'} = rr'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\theta+\theta')}$.
- *Puissance :* $\left(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)^n = r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\theta}$.
- *Conjugué :* $\overline{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}} = r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}$.
- *Quotient :* $\dfrac{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}{r'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'}} = \dfrac{r}{r'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\theta-\theta')}$.
- *Inverse :* $\dfrac{1}{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}} = \dfrac{1}{r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}$.

Moralité :

— Les formes trigonométriques et exponentielles sont adaptées aux produits de complexes.
— Les formes algébriques sont adaptées aux sommes de complexes.

Exemple 15 (Forme exponentielle et calculs de produits et quotients) :
On considère les nombres complexes $z_1 = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = 2\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 2 \times 2\sqrt{3} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \\ &= 4\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)} \\ &= 4\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {z_2}^4 &= \left(2\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^4 \\ &= \left(2\sqrt{3}\right)^4 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,4\frac{\pi}{6}} \\ &= 144\,\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_2}{z_1} &= \frac{2\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}{2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)} \\ &= \sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}. \end{aligned}$$

Exercice 18 : Établir l'égalité suivante :

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)\left(\frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)(1+\mathrm{i}) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{84}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{84}\right)\right).$$

IV.3 Argument d'un nombre complexe

Proposition 23 (Propriétés algébriques) : Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

- $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' \ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv \arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) \ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' \ [2\pi]$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\boxed{\arg(z^n) = n\arg z.}$

ATTENTION $\arg(-z) \equiv \pi + \arg z \ [2\pi]$.

Exemple 16 : En reprenant les notations de l' exemple (15) , on obtient, *sans calculs* :

- $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z_1}\right) \equiv -\arg z_1 \equiv -\frac{\pi}{3} \ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \equiv \arg z_2 - \arg z_1 \equiv \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{6} \ [2\pi]$

$\lfloor -3 \rfloor$. Sur les modules, on obtiendrait $|zz'| = |z| \times |z'|$.
$\lfloor -2 \rfloor$. Sur les modules, on obtiendrait $|\overline{z}| = |z|$ et $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.
$\lfloor -1 \rfloor$. Sur les modules, on obtiendrait $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.
$\lfloor 0 \rfloor$. Sur les modules, on obtiendrait $|z^n| = |z|^n$.

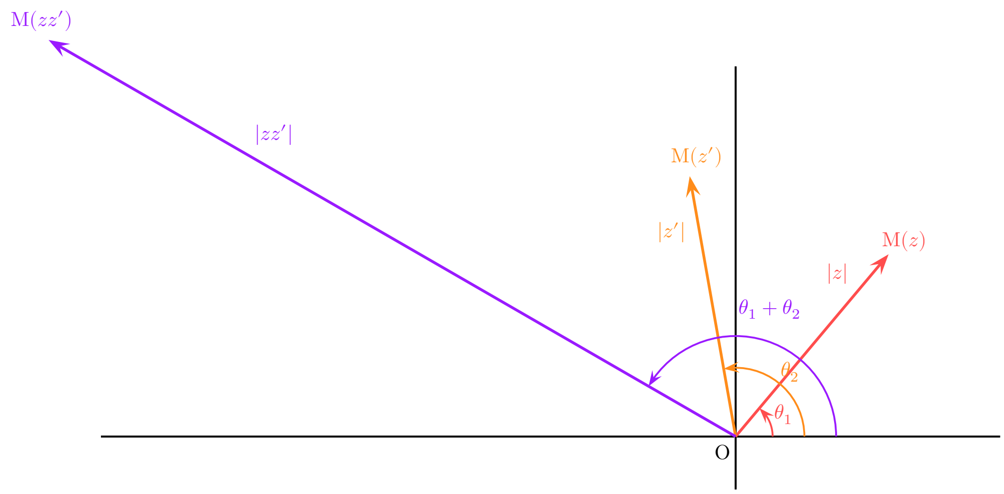


Figure VIII.4 – Dans la multiplication de deux nombres complexes, les modules se *multiplient* et les arguments s'*ajoutent*.

IV.4 Exponentielle complexe

Définition 8 : Pour tout nombre complexe z, on appelle *exponentielle de* z, noté $\exp(z)$ ou e^z, le nombre défini par :

$$\exp(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)}.$$

Exemple 17 : $\mathrm{e}^{2+\frac{\mathrm{i}\,\pi}{4}} = \mathrm{e}^2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{4}} = \mathrm{e}^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\mathrm{e}^2}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^2}{\sqrt{2}}$.

Si z est réel ou imaginaire pur, on retrouve respectivement l'exponentielle réelle et l'exponentielle définie sur les imaginaires purs au paragraphe (III) . Cette définition prolonge donc ces deux définitions.

En particulier, si $z \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$ alors $\mathrm{e}^z \in \mathbb{U}$.

ATTENTION Ici aussi, ce n'est pas encore la *fonction* exponentielle complexe mais seulement la définition *algébrique* du nombre complexe e^z.

Théorème 24 (Morphisme) : Soit $(z\,;z') \in \mathbb{C}^2$.

$$\mathrm{e}^z \times \mathrm{e}^{z'} = \mathrm{e}^{z+z'}.$$

Proposition 25 (Forme algébrique et polaire) : Soit $z \in \mathbb{C}$.

- $\mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} \cos\left(\mathrm{Im}\,(z)\right)$.
- $\mathrm{Im}\,(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} \sin\left(\mathrm{Im}\,(z)\right)$.
- $\left|\mathrm{e}^z\right| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}$.
- $\arg \mathrm{e}^z \equiv \mathrm{Im}\,(z)\ \ [2\pi]$.

- $\overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\overline{z}}$.
- $\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{e}^z \neq 0$ et $\dfrac{1}{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{-z}$.

Théorème 26 (Noyau de l'exponentielle) : Soit $(z\,;z') \in \mathbb{C}^2$.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} &\iff \begin{cases} \mathrm{Re}\,(z) &= \mathrm{Re}\,(z') \\ \mathrm{Im}\,(z) &\equiv \mathrm{Im}\,(z')\ [2\pi] \end{cases} \\ &\iff z \equiv z'\ [2\,\mathrm{i}\,\pi]. \end{aligned}$$

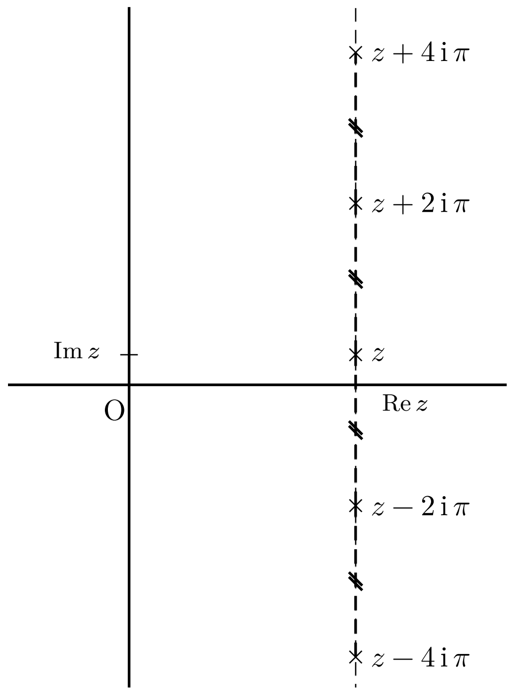


Figure VIII.5 – Nombres complexes ayant la même exponentielle.

Théorème 27 (Image réciproque) : Soit $\omega \in \mathbb{C}$ un nombre complexe.

- Si $\omega = 0$, l'équation $\mathrm{e}^z = \omega$ n'a pas de solution.
- Si $\omega \neq 0$, l'équation $\mathrm{e}^z = \omega$ a une infinité de solutions définies par :

$$\mathrm{Re}\,(z) = \ln|\omega| \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\,(z) \equiv \arg(\omega)\ [2\pi]\,.$$

Exercice 19 : Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $\mathrm{e}^z = 2 + \mathrm{i}\,$.

Théorème 28 (Dérivée de composées) : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I.

Alors la fonction $f = \exp \circ \varphi = \mathrm{e}^{\varphi}$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall\, t \in \mathrm{I},\ f'(t) = \varphi'(t) \times \mathrm{e}^{\varphi(t)}.$$

Exemple 18 : Pour $a \in \mathbb{C}$ et $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{a x}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = a^n\, \mathrm{e}^{a x} = a^n\, f(x)$.

Exercice 20 : Dériver les fonctions complexes $t \longmapsto e^{e^{\mathrm{i}\, t}}$ et $t \longmapsto e^{\arccos(t) + \mathrm{i}\, \arcsin(t)}$.

V Applications à la trigonométrie

Exemple 19 (Expression de $\cos \frac{\pi}{12}$) : Il suffit de remarquer que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$.

D'où :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{12}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\, \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \mathrm{i}\, \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on trouve :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

V.1 Formule d'Euler et de Moivre

Commençons par réécrire une des assertions du théorème (5) :

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\quad \mathrm{Re}\,(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\,(z) = \frac{z - \overline{z}}{2\,\mathrm{i}}.$$

Proposition 29 (Formule d'Euler) :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R},\quad \cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}}{2\,\mathrm{i}}.$$

Exercice 21 : Développer $\mathrm{A} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} - 1\right)^3$ et $\mathrm{B} = \left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)^4$.

Théorème 30 (Formules de Moivre) : Soient θ un nombre réel et n un entier.

$$\Big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\, \sin(\theta)\Big)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\, \sin n\theta.$$

Exemple 20 (Duplication des angles) : À l'aide des formules de Moivre, on peut retrouver les formules de duplication de $\cos 2\theta$ et $\sin 2\theta$:

D'une part, $\left(\cos(\theta) + \mathrm{i}\, \sin(\theta)\right)^2 = \cos(2\theta) + \mathrm{i}\, \sin(2\theta)$.

D'autre part, en développant, $\left(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\right)^2 = \left(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\right) + 2\,\mathrm{i}\cos(\theta)\sin(\theta)$.
En identifiant, parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \qquad \text{et} \qquad \sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

Proposition 31 (Formule d'addition) : Pour tous réels a et b, on a :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b). \qquad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b). \qquad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b).$$

V.2 Linéarisation des puissances de cosinus et sinus

Méthode 5 (Linéarisation de $\cos^k x \sin^\ell x$) :

1. On utilise les formules d'Euler de la proposition (29) pour changer $\cos x$ et $\sin x$ en somme de termes avec $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x}$.
2. On développe complètement, avec le binôme de Newton [1].
3. On regroupe les termes deux à deux conjugués pour reconnaître des $\cos(\alpha x)$ ou $\sin(\beta x)$.

Exercice 22 : Linéariser $\cos^5(x)$ et $\cos^2(x)\sin^3(x)$.

V.3 Factorisation par l'angle de l'arc moitié

Méthode 6 (Factorisation par l'angle de l'arc moitié) :
Pour factoriser une expression du type $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'}$:

1. On factorise par l'angle moitié, c'est à dire par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta+\theta'}{2}}$.
2. On utilise ensuite les formules d'Euler de la proposition (29)

Exercice 23 : Factoriser les expressions suivantes :

1. $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$ et $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$.
2. (a) Soient p et g des réels. Montrer que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,p} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,q} = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{p+q}{2}} \cos\dfrac{p-q}{2}$.
   (b) En déduire des formules plus aisées pour $\cos(p)+\cos(q)$, $\cos(p)-\cos(q)$, $\sin(p)+\sin(q)$ et $\sin(p)-\sin(q)$ avec $(p\,;q) \in \mathbb{R}^2$.

Proposition 32 (Formule de factorisation par l'angle moitié) : Soient p et q deux réels :

[1]. $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

- $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
- $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
- $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
- $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

Exercice 24 : Mettre $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ sous forme exponentielle.

V.4 Calculs de sommes de cosinus et sinus

Exercice 25 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On pose :

$$\mathrm{A}_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}, \quad \text{le noyau de Dirichlet, et} \quad \mathrm{B}_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{A}_k(t).$$

Montrer que $\mathrm{A}_n(t) = \dfrac{\sin\frac{(2n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$ et $\mathrm{B}_n(t) = \left(\dfrac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$.

V.5 « Délinéarisation » ou Polynômes de Tchebychev

Méthode 7 (Délinéarisation de $\cos nx$ et $\sin nx$) :

1. On écrit $\cos(nx) = \mathrm{Re}\left(\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^n\right) = \mathrm{Re}\left((\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n\right)$.
2. On développe avec le binôme de Newton.
3. On ne garde que la partie réelle (ou imaginaire dans le cas d'un sinus).

Exercice 26 : Exprimer $\cos(6x)$ en fonction de $\cos(x)$.

V.6 Factorisation de sommes de cosinus et de sinus

Proposition 33 (Transformation de Fresnel) : Si $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,;0)\}$ et ω un réel, il existe $(\mathrm{A}\,;\varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$a\cos\omega t + b\sin\omega t = \mathrm{A}\cos(\omega t + \varphi).$$

En particulier, $\boxed{\mathrm{A} = 2r = \sqrt{a^2+b^2}}$ et $\boxed{\varphi = -\arg(a + \mathrm{i}\,b).}$

Exercice 27 : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

1. Simplifier l'expression $\sqrt{2}\cos(\theta) + \sqrt{6}\sin(\theta)$.
2. Donner une interprétation physique de ce résultat.
3. Même question avec $\sqrt{3}\cos(\theta) - \sin(\theta)$.