Les Nombres Complexes I

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Avril 2024

Sommaire I

Sommaire II

On suppose l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels muni de ces deux opérations $+_{\mathbb{R}}$ et $\times_{\mathbb{R}}$ connu et on construit un nouvel ensemble.

I. L'ensemble des nombres complexes

Définition 1 (L'ensemble des nombres complexes) :

On appelle ensemble des nombre complexes, noté $\mathbb{C}$, l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des opérations $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ définies par :

- $(a\,;b) +_{\mathbb{C}} (a'\,;b') = (a +_{\mathbb{R}} a'\,;b +_{\mathbb{R}} b')$,
- $(a\,;b) \times_{\mathbb{C}} (a'\,;b') = (a \times_{\mathbb{R}} a' -_{\mathbb{R}} b \times_{\mathbb{R}} b'\,;a \times_{\mathbb{R}} b' +_{\mathbb{R}} a' \times_{\mathbb{R}} b)$.

On note :

$$1_{\mathbb{C}} = (1\,;0) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{i} = (0\,;1)\,.$$

L'application $i_{\mathbb{R}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ a & \longmapsto & (a\,;0) \end{array}$ est une injection qui permet alors de considérer que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et d'identifier tout réel x au complexe $(x\,;0)$.

Proposition I (Identification des lois de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$) :

1. Soient $z = (a\,;b)$ et $z' = (a'\,;b')$ deux nombres complexes.

$$z =_{\mathbb{C}} z' \iff \begin{cases} a & =_{\mathbb{R}} & a' \\ b & =_{\mathbb{R}} & b' \end{cases}$$

2. Les lois $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ prolongent celles de $\mathbb{R}$:
3. Les lois $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ sont associatives et commutatives.
4. $\times_{\mathbb{C}}$ est distributive sur $+_{\mathbb{C}}$.

Proposition 1 (Identification des lois de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$) :

5. La loi $+_{\mathbb{C}}$ possède un **élément neutre** $0_{\mathbb{C}} = (0\,;0)$ que l'on notera encore 0. Tout nombre complexe $z = (a\,;b)$ possède un symétrique pour $+_{\mathbb{C}}$ appelé **opposé de z** et noté $-z$ et tel que :

$$-z = (-a\,;-b)\,.$$

6. La loi $\times_{\mathbb{C}}$ possède un **élément neutre** $1_{\mathbb{C}} = (1\,;0)$ que l'on notera encore 1. Tout nombre complexe $z = (a\,;b)$ non nul possède symétrique pour $\times_{\mathbb{C}}$ appelé **inverse de z** et noté $\dfrac{1}{z}$ et tel que :

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}\,;-\frac{b}{a^2+b^2}\right).$$

Proposition I (Identification des lois de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$) :

7. Enfin, le nombre $(0\,;1)$ est tel que $(0\,;1)^2 = (-1\,;0)$. On le notera i.
En particulier, on a :
$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

L'assertion (2) permet de noter, par abus de langage, les lois $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ plus simplement par $+$ et $\times$.

Proposition I (Identification des lois de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$) :

7. Enfin, le nombre $(0\,;1)$ est tel que $(0\,;1)^2 = (-1\,;0)$. On le notera i.
En particulier, on a :
$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

L'assertion (2) permet de noter, par abus de langage, les lois $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ plus simplement par $+$ et $\times$.

Si cela était au programme, la proposition (1) pourrait simplement se résumer en disant que $\big(\mathbb{C}, +, \times\big)$ est un corps commutatif.

En particulier, on retrouve que :

$$\forall\, z, z' \in \mathbb{C}, \quad zz' = 0 \iff z = 0 \quad \text{ou} \quad z' = 0.$$

Définition/Théorème 2 (Forme algébrique) :

Tout nombre complexe $z = (a\,;b)$ peut s'écrire de manière unique la forme :

$$z = a + \mathrm{i}\,b, \qquad \text{avec } (a\,;b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \mathrm{i}^{\,2} = -1.$$

- Le nombre réel a s'appelle la partie réelle de z notée $\mathrm{Re}\,(z)$.
  Si $\mathrm{Re}\,(z) = 0$, on dit que z est un imaginaire pur et on note $\mathrm{i}\,\mathbb{R}$ leur ensemble.
- Le nombre réel b s'appelle la partie imaginaire de z notée $\mathrm{Im}\,(z)$.
  Si $\mathrm{Im}\,(z) = 0$, le nombre complexe z est réel dont l'ensemble est noté $\mathbb{R}$
- L'écriture $z = a + \mathrm{i}\,b$ est appelée la forme algébrique de z.

Remarques : $\mathrm{Im}\,(z) = 0 \iff z \in \mathbb{R}$. En particulier, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Globalement, comprenez que $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$, que les opérations possèdent les mêmes propriétés que celles de $\mathbb{R}$ à la différence près que l'on remplacera i^2 par -1 et que l'on regroupera les réels et les réels facteurs de i pour obtenir la forme algébrique d'un nombre complexe.

Globalement, comprenez que $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$, que les opérations possèdent les mêmes propriétés que celles de $\mathbb{R}$ à la différence près que l'on remplacera i^2 par -1 et que l'on regroupera les réels et les réels facteurs de i pour obtenir la forme algébrique d'un nombre complexe.

Exemples 1 :

- $z_1 = 4 + 7\mathrm{i} - (2 + 4\mathrm{i}) = 4 + 7\mathrm{i} - 2 - 4\mathrm{i} = 2 + 3\mathrm{i}$.
- $z_2 = (2 + \mathrm{i})(3 - 2\mathrm{i}) = 6 - 4\mathrm{i} + 3\mathrm{i} - 2\mathrm{i}^2 = 6 - \mathrm{i} + 2 = 8 - \mathrm{i}$.
- $z_3 = (4 - 3\mathrm{i})^2 = 16 - 24\mathrm{i} + (3\mathrm{i})^2 = 7 - 24\mathrm{i}$.

Globalement, comprenez que $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$, que les opérations possèdent les mêmes propriétés que celles de $\mathbb{R}$ à la différence près que l'on remplacera i^2 par -1 et que l'on regroupera les réels et les réels facteurs de i pour obtenir la forme algébrique d'un nombre complexe.

Exemples 1 :

- $z_1 = 4 + 7\mathrm{i} - (2 + 4\mathrm{i}) = 4 + 7\mathrm{i} - 2 - 4\mathrm{i} = 2 + 3\mathrm{i}$.
- $z_2 = (2 + \mathrm{i})(3 - 2\mathrm{i}) = 6 - 4\mathrm{i} + 3\mathrm{i} - 2\mathrm{i}^2 = 6 - \mathrm{i} + 2 = 8 - \mathrm{i}$.
- $z_3 = (4 - 3\mathrm{i})^2 = 16 - 24\mathrm{i} + (3\mathrm{i})^2 = 7 - 24\mathrm{i}$.

Exemple 2 :

- $\mathrm{Re}\left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\right) = \sqrt{3}$ et $\mathrm{Im}\left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\right) = -1$.
- $\mathrm{Re}\,(4\mathrm{i}) = 0$ et $\mathrm{Im}\,(4\mathrm{i}) = 4$.

Méthode 1 :

Pour montrer qu'un nombre complexe est réel ou imaginaire pur :

1. On l'écrit sous sa forme algébrique.
2. On écrit que sa partie imaginaire ou réelle est nulle suivant les cas.
3. On résout l'équation ainsi écrite.

Exercice 1 :

Soit la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = z^2.$$

1. Donner la forme algébrique de $f(z)$.
2. Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M du plan dont l'affixe remplie la condition demandée

   1. $f(z) \in \mathbb{R}$
   2. $f(z)$ imaginaire pur
   3. $\mathrm{Im}\,(f(z)) = 2$
   4. $\mathrm{Re}\,(f(z)) = \mathrm{Im}\,(z)$

Corollaire I.1 :

- Deux nombres complexes z et z' sont égaux si, et seulement si leur partie imaginaire et réelle sont égales.

$$z = z' \iff \begin{cases} \mathrm{Re}\,(z) & = & \mathrm{Re}\,(z') \\ \mathrm{Im}\,(z) & = & \mathrm{Im}\,(z') \end{cases}$$

- Soient $z = a + \mathrm{i}\,b$ et $z' = a' + \mathrm{i}\,b'$ deux nombres complexes.

  - $z + z' = (a + a') + \mathrm{i}\,(b + b')$.
  - $-z = -a - \mathrm{i}\,b$.
  - $zz' = (aa' - bb') + \mathrm{i}\,(a'b + ab')$.
  - Si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a - \mathrm{i}\,b}{a^2 + b^2}$

Une égalité entre deux nombres complexes pourra toujours se traduire, si nécessaire, par deux équations entre réels.

ATTENTION

Il n'existe pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$ compatible avec ses opérations.

En effet, si c'était le cas et si $\ll$ était une telle relation d'ordre et si on pouvait trouver deux complexes z et z' tels que : $z \ll z'$ alors on aurait

- soit $\mathrm{i}\,z \ll \mathrm{i}\,z' \iff -z \ll -z' \iff z' \ll z \implies z = z'$ par anti-symétrie.
- soit $\mathrm{i}\,z' \ll \mathrm{i}\,z \iff -z \ll -z' \iff z' \ll z \implies z = z'$ par anti-symétrie.

Conclusion, tous les nombres complexes comparables seraient égaux ce qui n'est pas possible.

Proposition 2 (Identités remarquables dans $\mathbb{C}$) :

Soient a et b deux nombres complexes.

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.
- $(a+\mathrm{i}\,b)^2 = a^2 + 2ab\,\mathrm{i} - b^2$.
- $(a-\mathrm{i}\,b)^2 = a^2 - 2ab\,\mathrm{i} - b^2$.
- $(a-\mathrm{i}\,b)(a+\mathrm{i}\,b) = a^2 + b^2$.

Exemple 3 :

Trouver la forme algébrique du nombre complexe $z = \dfrac{2 - \mathrm{i}}{3 + 2\,\mathrm{i}}$.

L'idée est de faire disparaître les nombres imaginaires du dénominateur. On utilise la même idée qu'avec les « $\sqrt{}$ » sachant que $\mathrm{i}^2 = -1$.

D'après la proposition (2) , $(a + \mathrm{i}\,b)(a - \mathrm{i}\,b) = a^2 + b^2$. On va donc multiplier numérateur et dénominateur par $3 - 2i$:

$$z = \frac{(2 - \mathrm{i})(3 - 2\,\mathrm{i})}{(3 + 2\,\mathrm{i})(3 - 2\,\mathrm{i})} = \frac{4 - 7\,\mathrm{i}}{13} = \frac{4}{13} - \mathrm{i}\,\frac{7}{13}.$$

Définition 3 (Conjugué d’un complexe) :

Soit $z = a + \mathrm{i}\, b$ un nombre complexe.

On appelle **conjugué** de z, noté $\overline{z}$, le nombre $\overline{z} = a - \mathrm{i}\, b$.

Exemples 4 :

- $3 - 2\,\mathrm{i}$ est le conjugué de $3 + 2\,\mathrm{i}$.
- $\overline{7} = 7$. Le conjugué d’un réel est lui-même.
- $\overline{3\,\mathrm{i}} = -3\,\mathrm{i}$. Le conjugué d’un imaginaire pur est son opposé.

Exercice 2 :

Calculer les conjugués des nombres complexes suivants

1. $z_1 = \dfrac{3}{7} - \mathrm{i}\sqrt{7}$
2. $z_2 = \sqrt{2} - 3$
3. $z_3 = \sqrt{7} + \mathrm{i}\,\pi$

Proposition 3 :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad z\overline{z} \in \mathbb{R}_+.$$

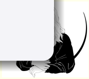
Méthode 2 :

Pour trouver la forme algébrique d'un quotient, il suffit de multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Exercice 3 :

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \dfrac{1}{1+i}$
2. $z_2 = \dfrac{1+i}{1-i}$
3. $z_3 = \dfrac{7}{\mathrm{i}}$



Proposition 4 (Propriétés du conjugué) :

Soit z et z' deux nombres complexes, alors :

1. $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
2. $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
3. $\overline{\overline{z}} = z$
4. $\forall\, z \neq 0,\ \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$
5. $\forall\, z' \neq 0,\ \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

En particulier, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\boxed{\overline{z^n} = \overline{z}^n.}$

Proposition 4 (Propriétés du conjugué) :

Soit z et z' deux nombres complexes, alors :

1. $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
2. $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
3. $\overline{\overline{z}} = z$
4. $\forall\, z \neq 0,\ \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$
5. $\forall\, z' \neq 0,\ \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

En particulier, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\boxed{\overline{z^n} = \overline{z}^n.}$

Une fois n'est pas coutume, remarquez que l'opération « passer au conjugué » est compatible avec l'addition **et** la multiplication. Fait exceptionnel !

Exercice 4 :

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe, déterminer les conjugués des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = z + 5 - \mathrm{i}$
2. $z_2 = \mathrm{i}\, z + 2$
3. $z_3 = z + \dfrac{1}{\bar{z}}$
4. $z_4 = z + \mathrm{i}\, \bar{z}$

Théorème 5 (Fondamental) :

$\forall\, z \in \mathbb{C}$,

- $\mathrm{Re}\,(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$.
- $\mathrm{Im}\,(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.
- $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$.
- $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$.

Remarque : On retiendra qu'un nombre complexe est réel si, et seulement si il est égal à son conjugué ou encore si, et seulement si le point d'affixe $\mathrm{M}(z)$ appartient à l'axe des abscisses.

Méthode 3 :

1. Pour montrer qu'un nombre z est réel il faut et il suffit de montrer que $\bar{z} = z$ ou $\operatorname{Im}(z) = 0$. On pourra, par exemple, calculer $z - \overline{z}$.
2. Pour montrer qu'un nombre z est imaginaire pur il faut et il suffit de montrer que $\bar{z} = -z$ ou $\operatorname{Re}(z) = 0$. On pourra, par exemple, calculer $z + \overline{z}$.

Exercice 5 :

Soit $z = a + \mathrm{i}\, b \in \mathbb{C}$ tel que $a^2 + b^2 = 1$.

Montrer que si $z \neq 1$, alors $\dfrac{1+z}{1-z}$ est un imaginaire pur.

Théorème 6 (Équation du second degré à coefficients réels) :

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

On considère l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad (\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}})$$

L'équation $(\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}})$ admet toujours des solutions dans $\mathbb{C}$.

On appelle discriminant de l'équation $(\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}})$, noté Δ, le nombre réel défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$, $(\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}})$ possède une unique solution : $\quad z = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, $(\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}})$ possède deux solutions réelles : $\quad z = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, $(\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}})$ possède deux solutions complexes conjuguées :

$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

ATTENTION

Pour l’instant, faites bien attention que ce théorème ne s’applique qu’à des équations à coefficients réels. Seules les solutions sont complexes.

Exemple 5 :

Soit l'équation $z^2 - z + 1 = 0$. On a $\Delta = -3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$.

Les solutions sont donc $z_1 = \dfrac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

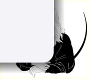
Et, on, la forme factorisée :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad z^2 - z + 1 = \left(z - \frac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right).$$

Exercice 6 (À savoir faire absolument !) :

Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

1. $z^2 - 7z = 0$.
2. $z^2 - 4z + 5 = 0$.
3. $-8 = 3z^2$.



Théorème 7 :

Soit $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$ un polynôme à coefficients réels.

$\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P si, et seulement si $\overline{\alpha}$ est une racine de P.

Théorème 7 :

Soit $\mathrm{P(X)} = a_n \mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \ldots + a_1 \mathrm{X} + a_0$ un polynôme à coefficients réels.

$\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P si, et seulement si $\overline{\alpha}$ est une racine de P.

Exercice 7 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^4 + 4z^2 - 21 = 0$.

II. Nombres et Plan complexes

II. Nombres et Plan complexes

Théorème 8 :

L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longmapsto & \mathbb{C} \\ (a\,;b) & & z = a + \mathrm{i}\, b \end{array}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$.

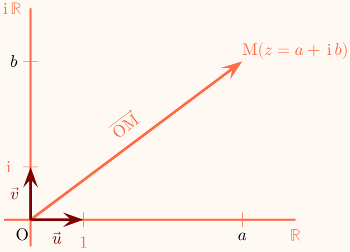
Cette bijection permet d'identifier l'ensemble des nombres complexes au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ appelé plan complexe.

Le théorème (8) permet donc d'associer à $z = a + \mathrm{i}\, b \in \mathbb{C}$ un unique point M du plan de coordonnées $(a\,;b)$, et un unique vecteur $\overrightarrow{\varphi(\mathrm{M})}$ tel que $\overrightarrow{\varphi(\mathrm{M})} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$.

Plus précisément,

Proposition 9 :

- À tout nombre $z = a + \mathrm{i}\, b$ on peut faire correspondre, de manière unique, un point M de coordonnées $(a\,;b)$ d'un plan orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.
- Réciproquement, tout point $\mathrm{M}\,(a\,;b)$ d'un plan orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ peut être associé, de manière unique, à un nombre complexe $z = a + \mathrm{i}\, b$.

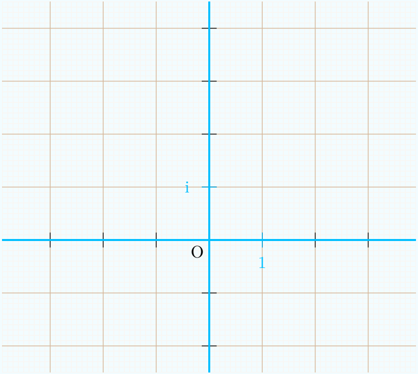


1. Le plan $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ est appelé plan complexe.
2. Le nombre complexe z est appelé l'affixe du point M ou du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et on écrit $\mathrm{M}(z)$ ou $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(z)$.

Remarques : L'axe des abscisses est alors naturellement appelé l'axe des réels et l'axe des ordonnées celui des imaginaire purs.

Exemple 6 :

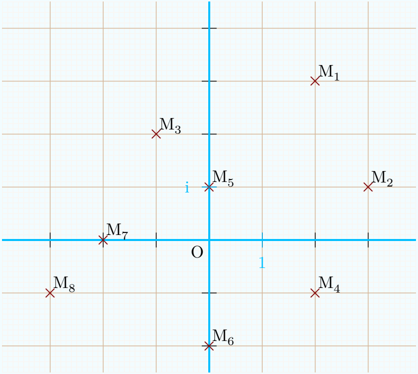
1. $z_1 = 2 + 3\,\mathrm{i}$
2. $z_2 = 3 + \mathrm{i}$
3. $z_3 = -1 + 2\,\mathrm{i}$
4. $z_4 = 2 - \mathrm{i}$
5. $z_5 = \mathrm{i}$
6. $z_6 = -2i$
7. $z_7 = -2$
8. $z_8 = -\mathrm{i} - 3$



Remarques : L'axe des abscisses est alors naturellement appelé l'axe des réels et l'axe des ordonnées celui des imaginaire purs.

Exemple 6 :

1. $z_1 = 2 + 3\,\mathrm{i}$
2. $z_2 = 3 + \mathrm{i}$
3. $z_3 = -1 + 2\,\mathrm{i}$
4. $z_4 = 2 - \mathrm{i}$
5. $z_5 = \mathrm{i}$
6. $z_6 = -2i$
7. $z_7 = -2$
8. $z_8 = -\mathrm{i} - 3$



Exercice 8 :

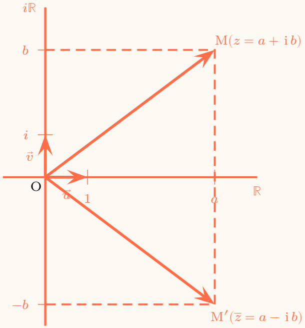
Dans chacun des cas suivants, déterminer et représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité proposée :

1. $\mathrm{Re}\,(z) = -2$
2. $\mathrm{Im}\,(z) = 1$
3. $\mathrm{Re}\,(z) \geqslant 1$ et $\mathrm{Im}\,(z) \geqslant 1$
4. $\mathrm{Im}\,\left(z^2\right) = 0$
5. $\mathrm{Im}\,\left(z^2\right) = 2$
6. $\mathrm{Re}\,\left((z-1)^2\right) = 0$

Proposition 10 (Point d'affixe conjuguée) :

Soit $z = a + \mathrm{i}\,b$ un nombre complexe et $\mathrm{M}(z)$ un point du plan complexe $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ d'affixe z.

Le point M' d'affixe $\overline{z} = a - \mathrm{i}\,b$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.



Exercice 9 :

On pose $\mathrm{j} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

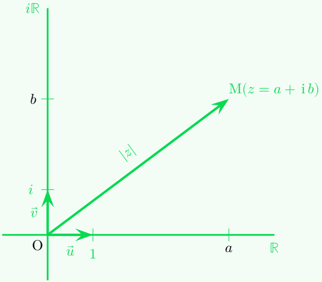
Dans le plan complexe, placer les points d'affixe respective 1, $\overline{1}$, i, $\overline{\mathrm{i}}$, j et $\bar{\mathrm{j}}$.

Définition 4 :

Soit $z = a + \mathrm{i}\, b$ un nombre complexe et $\mathrm{M}(z)$ un point du plan complexe $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ d'affixe z.

On appelle module de z, noté $|z|$, la distance OM *i.e.* le réel positif tel que :

$$|z| = \left\|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right\| \\ = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



Exercice 10 :

Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 3 + 4\,\mathrm{i}$
2. $z_2 = 1 - \mathrm{i}$
3. $z_3 = -5 - 2\,\mathrm{i}$
4. $z_4 = -5$
5. $z_5 = 9\,\mathrm{i}$

Proposition II :

Soient $z = a + \mathrm{i}\, b$ et z' deux nombres complexes.

- $z\overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$.
  En particulier, si $z \neq 0$ alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.
- $|z| = 0_{\mathbb{R}} \quad \iff \quad z = 0_{\mathbb{C}}$
- $|-z| = |z|$ et $|\overline{z}| = |z|$.
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.

  En particulier, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$.
- $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$, avec $z \neq 0$.
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$, avec $z' \neq 0$.

  En particulier, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $|z^n| = |z|^n$.
- $|\mathrm{Re}\,(z)| \leqslant |z|$.
- $|\mathrm{Im}\,(z)| \leqslant |z|$.

Remarque : Si a est un réel, $|a| = \sqrt{a\ \overline{a}} = \sqrt{aa} = \sqrt{a^2}$ car $\overline{a} = a$. La notion de module dans $\mathbb{C}$ généralise donc celle de valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

Exercice II :

Dans chacun des cas suivants, déterminer le module du nombre complexe proposé :

1. $z_1 = \left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\right)(-1 - \mathrm{i})$
2. $z_2 = \mathrm{i}\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)$
3. $z_3 = \left(\dfrac{-3\,\mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^2$
4. $z_4 = \dfrac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{6} + \mathrm{i}\sqrt{2}}$

Proposition 12 (Inégalité triangulaire) :

Pour tout z_1, z_2 de $\mathbb{C}$ on a :

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

En particulier, $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff z_2 = 0$ ou $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_1 = \alpha z_2$ *i.e.* les points d'affixe z_1 et z_2 sont alignés avec l'origine sur une même demi-droite.

Proposition 12 (Inégalité triangulaire) :

Pour tout z_1, z_2 de $\mathbb{C}$ on a :

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

En particulier, $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff z_2 = 0$ ou $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_1 = \alpha z_2$ *i.e.* les points d'affixe z_1 et z_2 sont alignés avec l'origine sur une même demi-droite.

Remarque : En remplaçant z_2 par $-z_2$, on a aussi :

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 - z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

L'inégalité triangulaire peut s'interpréter géométriquement de la manière suivante : si z et z' représentent les affixes de deux vecteurs $\vec{\mathrm{U}}$ et $\vec{\mathrm{V}}$ alors :

$$\left\|\vec{\mathrm{U}}+\vec{\mathrm{V}}\right\| \leqslant \left\|\vec{\mathrm{U}}\right\| + \left\|\vec{\mathrm{V}}\right\|.$$

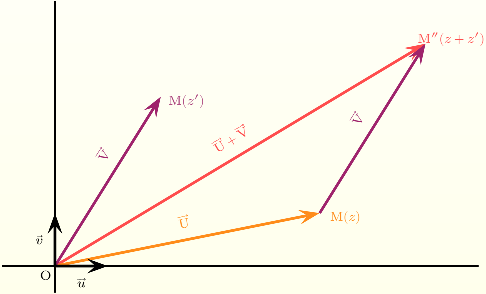


Figure 1 – Inégalité triangulaire pour les normes de vecteurs.

L'inégalité triangulaire peut s'interpréter géométriquement de la manière suivante : si z et z' représentent les affixes de deux vecteurs $\vec{\mathrm{U}}$ et $\vec{\mathrm{V}}$ alors :

$$\left\|\vec{\mathrm{U}}+\vec{\mathrm{V}}\right\| \leqslant \left\|\vec{\mathrm{U}}\right\| + \left\|\vec{\mathrm{V}}\right\|.$$

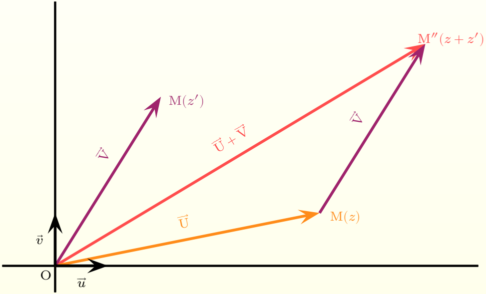


Figure 1 – Inégalité triangulaire pour les normes de vecteurs.

Le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire correspond donc au cas où les vecteurs $\vec{\mathrm{U}}$ et $\vec{\mathrm{V}}$ sont colinéaires de même sens.

III. L'exponentielle sur $i\mathbb{R}$

Définition 5 :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

On définit les fonctions :

- partie réelle de f : $\mathrm{Re}\,(f) : \begin{array}{ccl} \mathrm{I} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \mathrm{Re}\,(f)\,(x) = \mathrm{Re}\,(f(x))\,. \end{array}$
- et partie imaginaire de f :
  $\mathrm{Im}\,(f) : \begin{array}{ccl} \mathrm{I} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \mathrm{Im}\,(f)\,(x) = \mathrm{Im}\,(f(x))\,. \end{array}$

On a alors :

$$f : \begin{array}{ccl} \mathrm{I} & \longmapsto & \mathbb{C} \\ x & & f(x) = \mathrm{Re}\,(f)\,(x) + \mathrm{i}\ \mathrm{Im}\,(f)\,(x). \end{array}$$

En identifiant $\mathbb{C}$ au plan complexe $\mathbb{R}^2$, la fonction f est un exemple de fonctions, dites vectorielles.

En particulier, on peut également définir les fonctions $\overline{f}$ et $|f|$ par leurs valeurs sur I :

$\forall\, x \in \mathrm{I}$,

- $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$.
- $|f|(x) = |f(x)|$.

On retrouve alors les formules, dites d'Euler :

- $\mathrm{Re}\,(f) = \dfrac{f + \overline{f}}{2}$.
- $\mathrm{Im}\,(f) = \dfrac{f - \overline{f}}{2\,\mathrm{i}}$.

En identifiant $\mathbb{C}$ au plan complexe $\mathbb{R}^2$, la fonction f est un exemple de fonctions, dites vectorielles.

En particulier, on peut également définir les fonctions $\overline{f}$ et $|f|$ par leurs valeurs sur I :

$\forall\, x \in \mathrm{I}$,

- $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$.
- $|f|(x) = |f(x)|$.

On retrouve alors les formules, dites d'Euler :

- $\mathrm{Re}\,(f) = \dfrac{f + \overline{f}}{2}$.
- $\mathrm{Im}\,(f) = \dfrac{f - \overline{f}}{2\,\mathrm{i}}$.

Exercice 12 :

Soit $f : x \longmapsto \sin x + \mathrm{i}\,(x^2 - 1)$.

Définir les fonctions $\mathrm{Re}\,(f)\,, \mathrm{Im}\,(f)\,, \overline{f}$ et $|f|$.

Théorème 13 (Continuité) :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

f est continue sur I si, et seulement si $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ le sont.

Théorème 13 (Continuité) :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

f est continue sur I si, et seulement si $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ le sont.

Théorème 14 (Dérivabilité) :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

f est dérivable sur I si, et seulement si $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ le sont et on a :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ f'(x) = \mathrm{Re}\,(f)'\,(x) + \mathrm{i}\ \mathrm{Im}\,(f)'\,(x).$$

ATTENTION

Si f est une fonction à valeurs complexes, ce n'est pas encore à proprement parler, une fonction complexe car elle n'est pas encore « de la variable complexe » mais plutôt un cas particulier de fonctions vectorielles.

Augmenter le but, ne pose pas vraiment de problèmes et l'on pourrait tout aussi bien considérer une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathrm{I} \subset \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R}^n \\ x & & (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \end{array}.$$

Augmenter la source, demandera de redéfinir totalement les notions de continuité et de dérivabilité notamment à partir d'une topologie de $\mathbb{C}$ à définir aussi.

On parlera alors de fonctions holomorphes qui ont de très puissantes propriétés notamment leur analyticité.

To be continued...

Exemple 7 :

La fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{C} \\ x & & \sin(x) + \mathrm{i}\ \mathrm{e}^x. \end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'(x) = \cos(x) + \mathrm{i}\ \mathrm{e}^x.$$

Exemple 7 :

La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{C} \\ x & & \sin(x) + \mathrm{i}\ \mathrm{e}^x. \end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'(x) = \cos(x) + \mathrm{i}\ \mathrm{e}^x.$$

Exercice 13 :

Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \sin x + \mathrm{i}\,(x^2 - 1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer f'.

Un grand nombre de résultats concernant la dérivabilité des fonctions à valeurs réelles sont encore valables pour les fonctions à valeurs complexes.

Citons par exemple :

Proposition 15 :

Soient f et g deux fonctions à valeurs complexes définies sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$.

Alors, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, les fonctions $\lambda f + \mu g$, fg et $\dfrac{f}{g}$, si g ne s'annule pas sur I sont dérivables sur I et on a :

$$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg' \quad \text{et} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{C} \\ \theta & & f(\theta) = \cos(\theta) + \mathrm{i}\,\sin(\theta). \end{array}$$

1. Comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction f est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall\,\theta \in \mathbb{R},\; f'(\theta) = -\sin(\theta) + \mathrm{i}\,\cos(\theta) = \mathrm{i}\,f(\theta).$$

2. f vérifie $f(0) = 1$.
3. La fonction f est donc solution de problème de Cauchy :

$$(\mathcal{E}) \quad \begin{cases} y' = \mathrm{i}\,y \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

4. Par analogie avec les systèmes d'équations différentielles linéaires du premier ordre de la forme $\begin{cases} y' = a\,y \\ y(0) = 1. \end{cases}$ dont les solutions sont les fonctions de la forme $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}$, on pose comme définition : $\forall\,\theta \in \mathbb{R}, \quad f(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$.

Conclusion : $\boxed{\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{i\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\, \sin(\theta).}$

Cette notation est due à Euler à qui on doit la magnifique relation du même nom pour $\theta = \pi,\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} = \cos(\pi) + \mathrm{i}\ \sin(\pi) = -1.$

Conclusion : $\boxed{\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{i\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\, \sin(\theta).}$

Cette notation est due à Euler à qui on doit la magnifique relation du même nom pour $\theta = \pi$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} = \cos(\pi) + \mathrm{i}\ \sin(\pi) = -1$.

Théorème 16 (Relation d'Euler) :

Pour tout nombre réel θ, on a :

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} + 1 = 0.} \tag{Eul}$$

Proposition 17 :

Soient θ, $\theta' \in \mathbb{R}$.

Alors :

1. $e^{i0} = 1$.
2. $\left|e^{i\theta}\right| = 1$.
3. $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$.
4. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{ni\theta}$.
5. $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.
6. $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' \;[2\pi]$.

Définition 6 (Cercle trigonométrique) :

On appelle cercle trigonométrique et on note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1 \right\}.$$

Définition 6 (Cercle trigonométrique) :

On appelle **cercle trigonométrique** et on note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \left\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1\right\}.$$

Conséquence immédiate, $\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ e^{i\,\theta} \in \mathbb{U}$.

Définition 6 (Cercle trigonométrique) :

On appelle **cercle trigonométrique** et on note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1\}.$$

Conséquence immédiate, $\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \in \mathbb{U}$.

Proposition 18 :

Soient z et z' deux éléments de $\mathbb{U}$.

Stabilité par la multiplication : $zz' \in \mathrm{U}$.

Stabilité par l'inverse : $\dfrac{1}{z} = \overline{z} \in \mathbb{U}$.

Définition 6 (Cercle trigonométrique) :

On appelle cercle trigonométrique et on note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1\}.$$

Conséquence immédiate, $\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \in \mathbb{U}$.

Proposition 18 :

Soient z et z' deux éléments de $\mathbb{U}$.

Stabilité par la multiplication : $zz' \in \mathrm{U}$.

Stabilité par l'inverse : $\dfrac{1}{z} = \overline{z} \in \mathbb{U}$.

Remarque : Tout élément de $\mathbb{U}$ admet donc un symétrique (inverse) pour la multiplication. Le produit de deux éléments de $\mathbb{U}$ est encore un élément de $\mathbb{U}$ et $1 \in \mathbb{U}$. Ces trois propriétés font dire de $\mathbb{U}$ qu'il est un groupe multiplicatif à l'instar de $\mathbb{R}^*$.

Exercice 14 :

Démontrer que, $\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\dfrac{1+z}{1-z} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \iff z \in \mathbb{U}$.

Théorème 19 :

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta},\ \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Théorème 19 :

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta},\ \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Corollaire 19.1 :

1. La fonction $\theta \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$.
   Plus précisément, c'est une bijection de tout intervalle $[\alpha\,;\alpha+2\pi[$ sur $\mathbb{U}$.
2. La fonction $(r\,;\theta) \longmapsto r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi\,;\pi]$ sur $\mathbb{C}^*$.

IV. Forme polaire

Définition/Théorème 7 :

1. Pour tout nombre complexe z non nul, il existe un unique réel strictement positif r et un unique $\theta \in \mathbb{R}$ modulo 2π tel que :

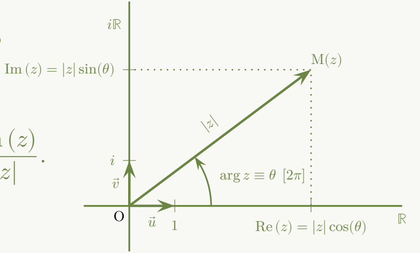
$$\begin{aligned} z &= r\,\mathrm{e}^{i\theta} \qquad \text{avec } r = |z| & \text{(forme exponentielle)} \\ &= r\big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\,\sin(\theta)\big). & \text{(forme trigonométrique)} \end{aligned}$$

   Cette écriture s'appelle la forme trigonométrique/exponentielle/polaire de z.

2. Tout réel θ de ce type s'appelle un argument de z et est défini modulo 2π par les relations :

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{Re}\,(z)}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{Im}\,(z)}{|z|}.$$

   On note alors $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$.



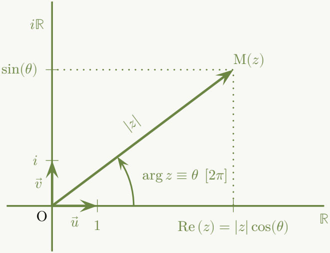
Définition/Théorème 7 :

1. Pour tout nombre complexe z non nul, il existe un unique réel strictement positif r et un unique $\theta \in \mathbb{R}$ modulo 2π tel que :

$$\begin{aligned} z &= r\ \mathrm{e}^{i\theta} \qquad \text{avec } r = |z| && \text{(forme exponentielle)} \\ &= r\big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\ \sin(\theta)\big). && \text{(forme trigonométrique)} \end{aligned}$$

Cette écriture s'appelle la forme trigonométrique/exponentielle/polaire de z.

3. Dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, $\arg(z)$ est une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ où M est le point du plan d'affixe z.



4. L'unique mesure de cet angle dans $]-\pi\,;\pi]$ définit l'argument principal de z, noté $\arg(z)$.

ATTENTION

Le réel r correspond au module, on fera donc toujours bien attention à ce qu'il soit un nombre réel positif.

Par exemple, -1 n'est pas le module de $-\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} = 1$.

ATTENTION

Le réel r correspond au module, on fera donc toujours bien attention à ce qu'il soit un nombre réel positif.

Par exemple, -1 n'est pas le module de $-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} = 1$.

Remarques :

- On ne peut pas définir d'argument pour 0, mais son module suffit à le caractériser.
- On a vu que si θ_0 est un argument de z, l'ensemble de ses arguments est de la forme $\left\{\theta_0 + 2k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Le réel θ est unique si on impose $\theta \in [0\,;2\pi[$ ou $\theta \in]-\pi\,;\pi]$.
- Connaissant la forme algébrique d'un nombre complexe, on peut donc obtenir son module et son argument à partir de ses parties réelles et imaginaires.
  On obtiendra alors une mesure exacte de θ si $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont des valeurs connues comme $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 1, ... Sinon, on obtiendra une valeur approchée à l'aide de la calculatrice.

Théorème 20 (Caractérisation d'un réel, d'un imaginaire pur) :

Soit z un nombre complexe non nul.

- $z \in \mathbb{R} \iff \arg z \equiv 0 \text{ ou } \pi \ [2\pi] \iff \arg z \equiv 0 \ [\pi]$.
- $z \in i\mathbb{R} \iff \arg z \equiv \pm\frac{\pi}{2} \ [2\pi] \iff \arg z \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi]$.

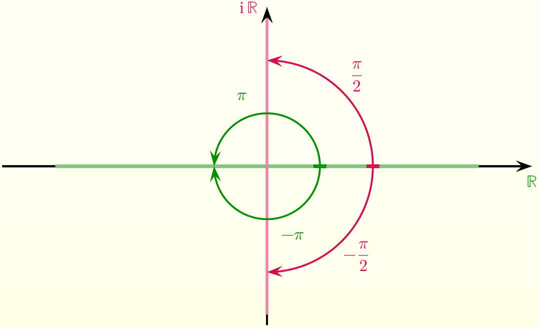


Figure 2 – Réels et imaginaires purs caractérisés par leur argument.

Un nombre complexe peut donc s'écrire sous trois formes bien distinctes : algébrique, trigonométrique et exponentielle. Chacune d'elles sera à préférer aux autres suivant le type de calculs à effectuer. Pensez-y !

Exemple 8 :

Différentes écritures du nombre complexe $1 + i\sqrt{3}$:

Forme exponentielle	Forme trigonométrique	Forme algébrique
$2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}$	$2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$	$1 + \mathrm{i}\,\sqrt{3}$

Un nombre complexe peut donc s'écrire sous trois formes bien distinctes : algébrique, trigonométrique et exponentielle. Chacune d'elles sera à préférer aux autres suivant le type de calculs à effectuer. Pensez-y !

Exemple 8 :

Différentes écritures du nombre complexe $1+i\sqrt{3}$:

Forme exponentielle	Forme trigonométrique	Forme algébrique
$2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}$	$2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\,\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$	$1+\mathrm{i}\,\sqrt{3}$

Exercice 15 :

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 5\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\,\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$
2. $z_2 = \cos(\pi)+\mathrm{i}\,\sin(\pi)$

Exemples 9 :

Quelques exemples classiques à retenir ou à savoir retrouver :

- $e^{i\,0} = e^{i\,2\pi} = 1.$
- $e^{i\,\frac{\pi}{2}} = i\,.$
- $e^{i\,\pi} = e^{-i\,\pi} = -1.$
- $$2\,e^{i\,\dfrac{\pi}{3}} = 2\cos\frac{\pi}{3} + i\,2\sin\frac{\pi}{3} = 1 + i\,\sqrt{3}.$$
- $$\sqrt{2}\,e^{i\,\dfrac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{3} + i\,\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = 1 + i\,.$$
- $$2\,e^{i\,\dfrac{\pi}{6}} = 2\cos\frac{\pi}{6} + i\,2\sin\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} + i\,.$$

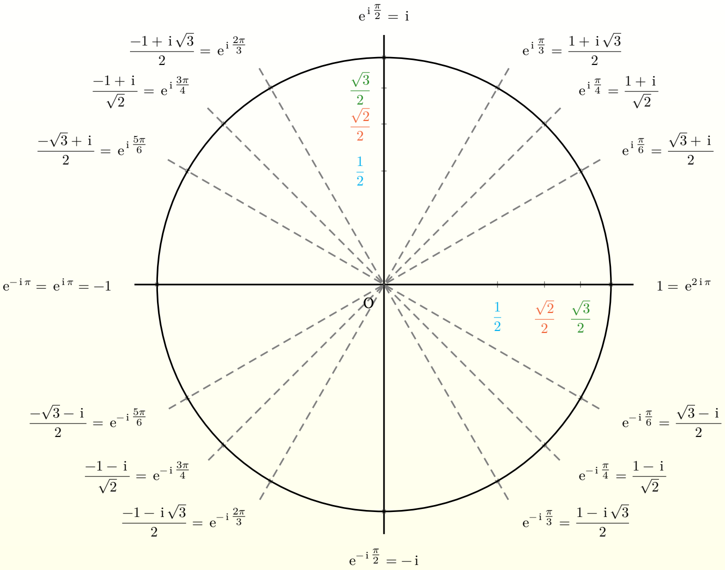


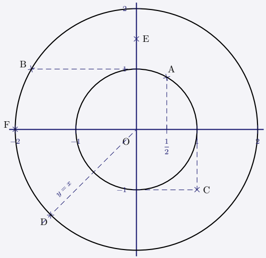
Figure 3 – Formes exponentielles remarquables

Exemple 10 (Forme exponentielle, trigonométrique et algébrique) :

$$
\begin{aligned}
z &= 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{4}} && \text{(Forme exponentielle)}\\
&= 4\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] && \text{(Forme trigonométrique)}\\
&= 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
&= -2\sqrt{2} + 2\,\mathrm{i}\,\sqrt{2}. && \text{(Forme algébrique)}
\end{aligned}
$$

Exercice 16 :

Déterminer la forme exponentielle de l'affixe de chacun des points A, B, C, D, E et F placés dans le repère donné ci-contre :



Exemple 11 :

Quelle est la forme algébrique de $z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)$?

Il suffit de calculer et développer :

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\,\mathrm{i}\,.$$

Méthode 4 :

Soit $z = a + \mathrm{i}\, b$ un nombre complexe sous sa forme algébrique. Pour trouver sa forme trigonométrique :

1. On calcule $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. On cherche l'angle θ tel que $\cos(\theta) = \dfrac{a}{|z|}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{b}{|z|}$.

Au pire, si $a \neq 0$, $\theta \equiv \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) \ [2\pi] & \text{si } a > 0 \\ \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) + \pi \ [2\pi] & \text{si } a < 0 \text{ et } b > 0 \\ \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) - \pi \ [2\pi] & \text{si } a < 0 \text{ et } b < 0 \end{cases}$

Une autre méthode est, le module trouvé, de factoriser par celui-ci et de reconnaître directement $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ dans l'expression

$$z = |z| \left(\frac{a}{|z|} + \mathrm{i}\, \frac{b}{|z|} \right).$$

Exemples 12 :

- $\arg(3+2\,\mathrm{i}) \equiv \arctan\left(\dfrac{2}{3}\right) \ [2\pi]$.
- $\arg(-1+\ \mathrm{i}) \equiv \arctan(-1)+\pi = \dfrac{3\pi}{4} \ [2\pi]$.
- $\arg\left(-3-\ \mathrm{i}\sqrt{3}\right) \equiv \arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)-\pi = \dfrac{5\pi}{6} \ [2\pi]$.

Exemples 13 :

Déterminer la forme trigonométrique des nombres suivants :

- $z_1 = 1 - i$: $\begin{cases} |1-i| &= \sqrt{2} \\ \cos(\theta) &= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) &= -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

  D'où $r = \sqrt{2}$, $\theta \equiv -\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et $z_1 = 1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

  $$= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}.$$

- $z_2 = -\sqrt{3} + i$: $\begin{cases} \left|-\sqrt{3}+i\right| &= 2 \\ \cos\theta &= -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) &= \dfrac{1}{2} \end{cases}$

  D'où $r = 2$, $\theta \equiv -\dfrac{\pi}{6}$ et $z_2 = -\sqrt{3} + i = 2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$

  $$= 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}}.$$

Exercice 17 :

Trouver un argument des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = -2 + 2\,\mathrm{i}$.
2. $z_2 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

Exemples 14 (Factorisation directe) :

Quelle est la forme trigonométrique de $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$?

1. Tout d'abord, on calcule $|z| = \left|1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{1+3} = 2$.
2. Puis, on factorise l'expression de z par $|z|$:

$$z = 2\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

3. On cherche, sur le cercle trigonométrique quel est l'angle qui a pour cosinus $\dfrac{1}{2}$ et pour sinus $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. C'est $\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

D'où, $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}$.

Remarque : Dans certains cas, il est inutile de faire tous les calculs : la forme trigonométrique se « voit » :

- $1 = \cos 0 + i \sin 0$ donc $|1| = 1$ et $\arg(1) = 0$
- $i = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ donc $|i| = 1$ et $\arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$

Théorème 21 :

$$\forall\, z, z' \in \mathbb{C}^*, \quad z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) \equiv \arg\,(z') \;\; [2\pi] \end{cases}$$

Théorème 21 :

$$\forall\, z, z' \in \mathbb{C}^*, \quad z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) \equiv \arg\,(z') \;\; [2\pi] \end{cases}$$

Autrement dit, deux nombres complexes sous forme exponentielle sont égaux si, et seulement si ils ont même module et même argument modulo 2π.

Proposition 22 :

Soient $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ et $z' = r'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'}$ deux nombres complexes sous leur forme exponentielle avec $r, r' \neq 0$ et n un nombre entier :

- Produit : $r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \times r'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'} = rr'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\theta+\theta')}$.
- Puissance : $\left(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)^n = r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\theta}$.
- Conjugué : $\overline{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}} = r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}$.
- Quotient : $\dfrac{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}{r'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'}} = \dfrac{r}{r'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\theta-\theta')}$.
- Inverse : $\dfrac{1}{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}} = \dfrac{1}{r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}$.

Proposition 22 :

Soient $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ et $z' = r'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'}$ deux nombres complexes sous leur forme exponentielle avec $r, r' \neq 0$ et n un nombre entier :

- Produit : $r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \times r'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'} = rr'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\theta+\theta')}$.
- Puissance : $\left(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)^n = r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\theta}$.
- Conjugué : $\overline{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}} = r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}$.
- Quotient : $\dfrac{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}{r'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'}} = \dfrac{r}{r'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\theta-\theta')}$.
- Inverse : $\dfrac{1}{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}} = \dfrac{1}{r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}$.

Moralité :

- Les formes trigonométriques et exponentielles sont adaptées aux produits de complexes.
- Les formes algébriques sont adaptées aux sommes de complexes.

Exemples 15 :

On considère les nombres complexes $z_1 = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = 2\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}}$:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 2 \times 2\sqrt{3} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}} \\ &= 4\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)} \\ &= 4\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {z_2}^4 &= \left(2\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}}\right)^4 \\ &= \left(2\sqrt{3}\right)^4 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,4\frac{\pi}{6}} \\ &= 144\,\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{3}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_2}{z_1} &= \frac{2\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}}}{2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)} \\ &= \sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}}. \end{aligned}$$

Exercice 18 :

Établir l'égalité suivante :

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)\left(\frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)(1+\mathrm{i}) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{84}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{5\pi}{84}\right)\right).$$

Proposition 23 (Propriétés algébriques) :

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

- $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' \ \ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv \arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) \ \ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' \ \ [2\pi]$

En particulier, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\boxed{\arg\left(z^n\right) = n\arg z.}$

Proposition 23 (Propriétés algébriques) :

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

- $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' \ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv \arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) \ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' \ [2\pi]$

En particulier, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\boxed{\arg(z^n) = n\arg z.}$

ATTENTION $\arg(-z) \equiv \pi + \arg z \ [2\pi]$.

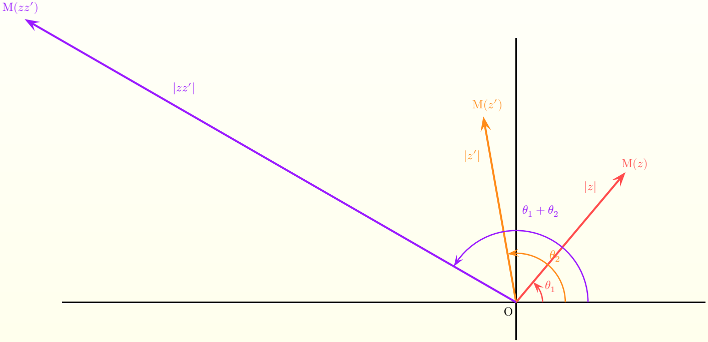


Figure 4 – Dans la multiplication de deux nombres complexes, les modules se multiplient et les arguments s'ajoutent.

Exemples 16 :

En reprenant les notations de l' **exemple** (??) , on obtient, sans calculs :

- $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z_1}\right) \equiv -\arg z_1 \equiv -\frac{\pi}{3} \ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \equiv \arg z_2 - \arg z_1 \equiv \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{6} \ [2\pi]$

Définition 8 :

Pour tout nombre complexe z, on appelle exponentielle de z, noté $\exp(z)$ ou e^z, le nombre défini par :

$$\exp(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ \mathrm{Im}(z)}.$$

Définition 8 :

Pour tout nombre complexe z, on appelle exponentielle de z, noté $\exp(z)$ ou e^z, le nombre défini par :

$$\exp(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)}.$$

Exemple 17 :

$$\mathrm{e}^{2+\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} = \mathrm{e}^2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} = \mathrm{e}^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\mathrm{e}^2}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^2}{\sqrt{2}}.$$

Définition 8 :

Pour tout nombre complexe z, on appelle exponentielle de z, noté $\exp(z)$ ou e^z, le nombre défini par :

$$\exp(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)}.$$

Exemple 17 :

$$\mathrm{e}^{2+\frac{\mathrm{i}\,\pi}{4}} = \mathrm{e}^2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{4}} = \mathrm{e}^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\mathrm{e}^2}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^2}{\sqrt{2}}.$$

Si z est réel ou imaginaire pur, on retrouve respectivement l'exponentielle réelle et l'exponentielle définie sur les imaginaires purs au paragraphe (III) . Cette définition prolonge donc ces deux définitions.

En particulier, si $z \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$ alors $\mathrm{e}^z \in \mathbb{U}$.

Théorème 24 (Morphisme) :

Soit $(z\,;z') \in \mathbb{C}^2$.

$$\mathrm{e}^{z} \times \mathrm{e}^{z'} = \mathrm{e}^{z+z'}.$$

Théorème 24 (Morphisme) :

Soit $(z\,;z') \in \mathbb{C}^2$.

$$\mathrm{e}^{z} \times \mathrm{e}^{z'} = \mathrm{e}^{z+z'}.$$

Proposition 25 (Forme algébrique et polaire) :

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- $\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{z}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} \cos\left(\mathrm{Im}\left(z\right)\right)$.
- $\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{z}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} \sin\left(\mathrm{Im}\left(z\right)\right)$.
- $\left|\mathrm{e}^{z}\right| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}$.
- $\arg \mathrm{e}^{z} \equiv \mathrm{Im}\left(z\right) \ [2\pi]$.
- $\overline{\mathrm{e}^{z}} = \mathrm{e}^{\overline{z}}$.
- $\forall\, z \in \mathbb{C},\ \mathrm{e}^{z} \neq 0$ et $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{z}} = \mathrm{e}^{-z}$.

Théorème 26 (Noyau de l'exponentielle) :

Soit $(z\,;z') \in \mathbb{C}^2$.

$$\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{z'} \iff \begin{cases} \mathrm{Re}\,(z) & = & \mathrm{Re}\,(z') \\ \mathrm{Im}\,(z) & \equiv & \mathrm{Im}\,(z')\ [2\pi] \end{cases}$$
$$\iff z \equiv z' \ [2\,\mathrm{i}\,\pi].$$

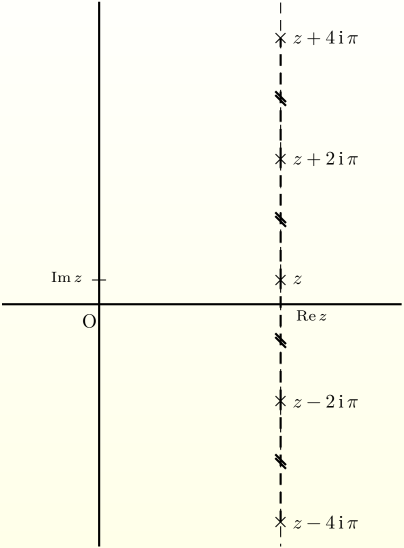


Figure 5 – Nombres complexes ayant la même exponentielle.

Théorème 27 (Image réciproque) :

Soit $\omega \in \mathbb{C}$ un nombre complexe.

- Si $\omega = 0$, l'équation $\mathrm{e}^z = \omega$ n'a pas de solution.
- Si $\omega \neq 0$, l'équation $\mathrm{e}^z = \omega$ a une infinité de solutions définies par :

$$\mathrm{Re}\,(z) = \ln|\omega| \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\,(z) \equiv \arg(\omega) \ [2\pi]\,.$$

Exercice 19 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $e^z = 2 + i$.

Théorème 28 (Dérivée de composées) :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I.

Alors la fonction $f = \exp \circ \varphi = \mathrm{e}^{\varphi}$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall\, t \in \mathrm{I},\ f'(t) = \varphi'(t) \times \mathrm{e}^{\varphi(t)}.$$

Théorème 28 (Dérivée de composées) :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I.

Alors la fonction $f = \exp \circ \varphi = \mathrm{e}^{\varphi}$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall\, t \in \mathrm{I},\ f'(t) = \varphi'(t) \times \mathrm{e}^{\varphi(t)}.$$

Exemple 18 :

Pour $a \in \mathbb{C}$ et $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = a^n\ \mathrm{e}^{ax} = a^n\, f(x)$.

Théorème 28 (Dérivée de composées) :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I.

Alors la fonction $f = \exp \circ \varphi = \mathrm{e}^{\varphi}$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall\, t \in \mathrm{I},\ f'(t) = \varphi'(t) \times \mathrm{e}^{\varphi(t)}.$$

Exemple 18 :

Pour $a \in \mathbb{C}$ et $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}$, $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = a^n\ \mathrm{e}^{ax} = a^n\ f(x)$.

Exercice 20 :

Dériver les fonctions complexes $t \longmapsto e^{e^{\mathrm{i}\,t}}$ et $t \longmapsto e^{\arccos(t) + \mathrm{i}\,\arcsin(t)}$.

V. Applications à la trigonométrie

V. Applications à la trigonométrie

Les théorèmes et propriétés qui suivent illustrent bien le potentiel de la forme exponentielle en simplifiant un certain nombre de calculs liés à la trigonométrie. Nous présentons ci-dessous quelques méthodes à connaître.

V. Applications à la trigonométrie

Les théorèmes et propriétés qui suivent illustrent bien le potentiel de la forme exponentielle en simplifiant un certain nombre de calculs liés à la trigonométrie. Nous présentons ci-dessous quelques méthodes à connaître.

Exemple 19 (Expression de $\cos \frac{\pi}{12}$) :

Il suffit de remarquer que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$.

D'où :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{12}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on trouve :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Proposition 29 (Formule d'Euler) :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}}{2\,\mathrm{i}}.$$

Proposition 29 (Formule d'Euler) :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

En particulier, les fonctions sin et cos sont respectivement les parties réelles et imaginaires de la fonction $\theta \longmapsto e^{i\theta}$.

Proposition 29 (Formule d'Euler) :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}}{2\,\mathrm{i}}.$$

En particulier, les fonctions sin et cos sont respectivement les parties réelles et imaginaires de la fonction $\theta \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$.

Exercice 21 :

Développer $\mathrm{A} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} - 1\right)^3$ et $\mathrm{B} = \left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)^4$.

Remarque : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}\,(\mathrm{i}\,x) = \cos(x) \quad \mathrm{sh}\,(\mathrm{i}\,x) = \mathrm{i}\,\sin(x)$

$$\cos(\mathrm{i}\,x) = \mathrm{ch}\,(x) \quad \sin(\mathrm{i}\,x) = \mathrm{i}\,\mathrm{sh}\,(x).$$

Remarque : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}\,(\,\mathrm{i}\,x) = \cos(x) \quad \mathrm{sh}\,(\,\mathrm{i}\,x) = \,\mathrm{i}\,\sin(x)$
$\cos(\,\mathrm{i}\,x) = \mathrm{ch}\,(x) \quad \sin(\,\mathrm{i}\,x) = \,\mathrm{i}\,\mathrm{sh}\,(x).$

Il est alors aisé de retrouver les formules trigonométriques hyperboliques à partir de leurs homologues circulaires.

Par exemples :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos^2(\,\mathrm{i}\,x) + \sin^2(\,\mathrm{i}\,x) = 1 \iff \mathrm{ch}\,(x)^2 - \mathrm{sh}\,^2(x) = 1.$$

$$\begin{aligned}\forall\, a,\ b \in \mathbb{R}, \cos\,(\,\mathrm{i}\,(a+b)) &= \cos(\,\mathrm{i}\,a)\cos(\,\mathrm{i}\,b) - \sin(\,\mathrm{i}\,a)\sin(\,\mathrm{i}\,b) \\ &\iff \mathrm{ch}\,(a+b) = \mathrm{ch}\,(a)\mathrm{ch}\,(b) + \mathrm{sh}\,(a)\mathrm{sh}\,(b).\end{aligned}$$

Théorème 30 (Formules de Moivre) :

Soient θ un nombre réel et n un entier.

$$\Big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\,\sin(\theta)\Big)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\,\sin n\theta.$$

Théorème 30 (Formules de Moivre) :

Soient θ un nombre réel et n un entier.

$$\Big(\cos(\theta)+\mathrm{i}\,\sin(\theta)\Big)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\,\sin n\theta.$$

Exemple 20 (Duplication des angles) :

À l'aide des formules de Moivre, on peut retrouver les formules de duplication de $\cos 2\theta$ et $\sin 2\theta$:

D'une part, $\big(\cos(\theta)+\mathrm{i}\,\sin(\theta)\big)^2=\cos(2\theta)+\mathrm{i}\,\sin(2\theta)$.

D'autre part, en développant,
$\big(\cos(\theta)+\mathrm{i}\,\sin(\theta)\big)^2=\big(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)\big)+2\,\mathrm{i}\,\cos(\theta)\sin(\theta)$.

En identifiant, parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\cos(2\theta)=\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)\qquad\text{et}\qquad\sin(2\theta)=2\sin(\theta)\cos(\theta).$$

À l'aide de la forme exponentielle, on peut très facilement retenir et redémontrer les formules d'addition des sinus et cosinus :

Proposition 31 (Formule d'addition) :

Pour tous réels a et b, on a :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b).$$

Les formules d'Euler permettent, comme on l'a déjà vu, de linéariser les expressions en $\cos^2$ et $\sin^2$.

D'une manière générale, pour linéariser une expression trigonométrique $\cos^k x \sin^\ell x$ (en combinaison linéaire de termes en $cos(\alpha x)$ ou $\sin(\beta x)$, on procède comme suit :

Méthode 5 :

1. On utilise les formules d'Euler de la proposition (29) pour changer $\cos x$ et $\sin x$ en somme de termes avec $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x}$.
2. On développe complètement, avec le binôme de Newton.
3. On regroupe les termes deux à deux conjugués pour reconnaître des $\cos(\alpha x)$ ou $\sin(\beta x)$.

Exercice 22 :

Linéariser $\cos^5(x)$ et $\cos^2(x)\sin^3(x)$.

V. Applications à la trigonométrie

3. Factorisation par l'angle de l'arc moitié

Méthode 6 :

Pour factoriser une expression du type $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'}$:

1. On factorise par l'angle moitié, c'est à dire par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta+\theta'}{2}}$.
2. On utilise ensuite les formules d'Euler de la proposition (29)

Méthode 6 :

Pour factoriser une expression du type $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'}$:

1. On factorise par l'angle moitié, c'est à dire par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta+\theta'}{2}}$.
2. On utilise ensuite les formules d'Euler de la proposition (29)

Exercice 23 :

Factoriser les expressions suivantes :

1. $\forall\, t\in\mathbb{R}$, $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$ et $1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$.
2.
   1. Soient p et g des réels. Montrer que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,p}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,q}=2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{p+q}{2}}\cos\dfrac{p-q}{2}$.
   2. En déduire des formules plus aisées pour $\cos(p)+\cos(q)$, $\cos(p)-\cos(q)$, $\sin(p)+\sin(q)$ et $\sin(p)-\sin(q)$ avec $(p\,;q)\in\mathbb{R}^2$.

V. Applications à la trigonométrie

3. Factorisation par l'angle de l'arc moitié

Cette méthode, appelée aussi principe de symétrisation des arguments, permet d'exprimer une somme ou une différence de deux exponentielles à l'aide des fonctions trigonométriques. C'est notamment intéressant pour obtenir la partie réelle et la partie imaginaire sous forme factorisée.

Soient a et b deux réels. Alors :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,a}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,b}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{a+b}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{a-b}{2}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{a-b}{2}}\right)=2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{a+b}{2}}.$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,a}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,b}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{a+b}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{a-b}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{a-b}{2}}\right)=2\,\mathrm{i}\,\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{a+b}{2}}.$$

Cette méthode, appelée aussi principe de symétrisation des arguments, permet d'exprimer une somme ou une différence de deux exponentielles à l'aide des fonctions trigonométriques. C'est notamment intéressant pour obtenir la partie réelle et la partie imaginaire sous forme factorisée.

Soient a et b deux réels. Alors :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,a} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,b} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{a+b}{2}} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{a-b}{2}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{a-b}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{a+b}{2}}.$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,a} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,b} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{a+b}{2}} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{a-b}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{a-b}{2}}\right) = 2\,\mathrm{i}\,\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{a+b}{2}}.$$

Exercice 24 :

Mettre $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}$ sous forme exponentielle.

Proposition 32 (Formule de factorisation par l'angle moitié) :

Soient p et q deux réels :

- $\cos(p)+\cos(q)=2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.
- $\cos(p)-\cos(q)=-2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.
- $\sin(p)+\sin(q)=2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.
- $\sin(p)-\sin(q)=2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$.

Exercice 25 :

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On pose :

$$\mathrm{A}_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kt}, \text{ le noyau de Dirichlet, et } \quad \mathrm{B}_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{A}_k(t).$$

Montrer que $\mathrm{A}_n(t) = \dfrac{\sin \frac{(2n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}$ et $\mathrm{B}_n(t) = \left(\dfrac{\sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}\right)^2$.

Il s'agit du cheminement inverse, consistant à écrire $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en fonction des puissances de $\cos(x)$ et/ou $\sin(x)$.

La méthode repose sur les formules de Moivre de la proposition (30) .

Pour transformer $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en un polynôme en cos ou en sin, on procède comme à l' exemple (20) *i.e.* :

Méthode 7 :

Délinéarisation de $\cos nx$ et $\sin nx$:

1. On écrit $\cos(nx) = \mathrm{Re}\left(\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\right)^n\right) = \mathrm{Re}\left((\cos x + \mathrm{i}\,\sin x)^n\right)$.
2. On développe avec le binôme de Newton.
3. On ne garde que la partie réelle (ou imaginaire dans le cas d'un sinus).

Il s'agit du cheminement inverse, consistant à écrire $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en fonction des puissances de $\cos(x)$ et/ou $\sin(x)$.

La méthode repose sur les formules de Moivre de la proposition (30) .

Pour transformer $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en un polynôme en cos ou en sin, on procède comme à l' exemple (20) *i.e.* :

Méthode 7 :

Délinéarisation de $\cos nx$ et $\sin nx$:

1. On écrit $\cos(nx) = \mathrm{Re}\left(\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\right)^n\right) = \mathrm{Re}\left((\cos x + \mathrm{i}\,\sin x)^n\right)$.
2. On développe avec le binôme de Newton.
3. On ne garde que la partie réelle (ou imaginaire dans le cas d'un sinus).

Exercice 26 :

Exprimer $\cos(6x)$ en fonction de $\cos(x)$.

Proposition 33 (Transformation de Fresnel) :

Si $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,;0)\}$ et ω un réel, il existe $(\mathrm{A}\,;\varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$a\cos\omega t + b\sin\omega t = \mathrm{A}\cos(\omega t + \varphi).$$

En particulier, $\boxed{\mathrm{A} = 2r = \sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\boxed{\varphi = -\arg(a + \mathrm{i}\,b).}$

Proposition 33 (Transformation de Fresnel) :

Si $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,;0)\}$ et ω un réel, il existe $(\mathrm{A}\,;\varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$a\cos\omega t + b\sin\omega t = \mathrm{A}\cos(\omega t + \varphi).$$

En particulier, $\boxed{\mathrm{A} = 2r = \sqrt{a^2+b^2}}$ et $\boxed{\varphi = -\arg(a + \mathrm{i}\,b).}$

Remarque : Une telle fonction $t \longmapsto a\cos\omega t + b\sin\omega t$ est appelée signal sinusoïdal.

Physiquement, le réel A représente son amplitude, et φ son déphasage. Comme vu dans la preuve, l'amplitude est alors le module de $a + \mathrm{i}\,b$ et la phase son argument.

Exercice 27 :

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

1. Simplifier l'expression $\sqrt{2}\cos(\theta) + \sqrt{6}\sin(\theta)$.
2. Donner une interprétation physique de ce résultat.
3. Même question avec $\sqrt{3}\cos(\theta) - \sin(\theta)$.