Fonctions circulaires

1 ⓐ La fonction arctan est continue sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

ⓑ La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

En particulier, arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

ⓒ La fonction arctan est impaire .

En particulier, la courbe représentative de tan admet deux asymptotes en l'infini d'équation $y = \pm\frac{\pi}{2}$ et la première bissectrice comme tangente à l'origine .

2 Compléter :

ⓐ $\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan(x)) = x$.

ⓑ $\forall\, x \in [-1\,;1]$, $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.

3 Sans se préoccuper du domaine de dérivabilité, déterminer et simplifier la fonction dérivée f' de f avec $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

Pour tout x réel, $x \leqslant |x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{1+x^2}$ donc $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \in \left]-1\,;1\right[$: la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} = \frac{\frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}}{\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}} = \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Remarque : On en déduit que $f(x) = \arctan(x) + \mathrm{K}$ puis $f(1) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} = \arctan(1)$ entraîne $\mathrm{K} = 0$.

Donc, $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \arctan(x)$.

4 ⓐ Montrer que, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Comme $\frac{k}{k+1} \in [0\,;1[$ alors $0 \leqslant \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) < \frac{\pi}{4}$.

Pour les mêmes raisons, $\frac{k-1}{k} \in [0\,;1[\implies 0 \leqslant \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right) < \frac{\pi}{4}$ ou encore $-\frac{\pi}{4} < -\arctan\left(\frac{k-1}{k}\right) \leqslant 0$.

En sommant membres à membres ces inégalités, on a :

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} < \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right) < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}.$$

Commentaires : On ne peut pas soustraire des inégalités. Seulement additionner ! Pour ce faire, il est nécessaire de multiplier tous les membres d'une de ces inégalités par -1...et changer le sens de celle-ci !

L'exercice était gentil et vous laissait beaucoup de latitude. Cela l'aurait été beaucoup moins si on vous avez demandé de prouver que $\arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right) \in \left]-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right[$.

En conclusion,

$$\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[.}$$

b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right)$.

D'après la question précédente, on peut calculer :

$$\begin{aligned}
\tan\left(\arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right)\right) &= \frac{\tan\left(\arctan\left(\frac{k}{k+1}\right)\right) - \tan\left(\arctan\left(\frac{k-1}{k}\right)\right)}{1+\tan\left(\arctan\left(\frac{k}{k+1}\right)\right)\tan\left(\arctan\left(\frac{k-1}{k}\right)\right)} \\
&= \frac{\frac{k}{k+1} - \frac{k-1}{k}}{1+\frac{k}{k+1}\times\frac{k-1}{k}} \\
&= \frac{\frac{\cancel{k^2} - (\cancel{k^2} - 1)}{\cancel{k(k+1)}}}{\frac{2k^2}{\cancel{k(k+1)}}} = \frac{1}{2k^2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right)$ est l'angle de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut $\frac{1}{2k^2}$ i.e.

$$\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right).}$$

Commentaires :
- Non ! tan n'est pas compatible avec l'addition et il faut se battre un peu pour calculer $\tan(a+b)$.
- Sans la première question, nous n'aurions pas l'égalité mais seulement l'égalité modulo π.

c) En déduire la limite de la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$.

D'après la question précédente, on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right)$$

On reconnaît une somme télescopique :

$$= \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right) - \arctan(0)$$
$$= \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

D'après les théorèmes sur les limites de composées, on obtient donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = \frac{\pi}{4}}$$

Commentaires : On note $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Remarquez que l'on peut très bien avoir $\lim\limits_{k\to+\infty} \arctan\left(\dfrac{1}{2k^2}\right) = 0$ sans que la limite de la somme soit nulle. Nous verrons que la convergence du terme général vers 0 n'est qu'une condition nécessaire à la convergence de la série.

Fonctions circulaires

1 (a) La fonction tan est impaire.

(b) La fonction tan est π-périodique.

(c) La fonction tan est continue et dérivable sur tout intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ où $k \in \mathbb{Z}$ et on a :

$$\forall\, x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[,\ \tan'(x) = 1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

En particulier, la fonction tan est strictement croissante sur tout intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[,\ k \in \mathbb{Z}$.

2 Compléter :

(a) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \tan(\arctan(x)) = x$.

(b) $\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = signe(x) \times \frac{\pi}{2}$.

3 Sans se préoccuper du domaine de dérivabilité, déterminer et simplifier la fonction dérivée f' de f avec $f(x) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ avec $x > 0$.

Pour tout x réel, $1 < \sqrt{1+x^2}$ donc $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \in]-1\,;1[$: la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'(x) = -\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} = \frac{\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Remarque : On en déduit que $f(x) = \arctan(x) + \mathrm{K}$ puis $f(1) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} = \arctan(1)$ entraîne $\mathrm{K} = 0$.

Donc, $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \arctan(x)$.

4 (a) Montrer que, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Comme $\frac{k}{k+1} \in [0\,;1[$ alors $0 \leqslant \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) < \frac{\pi}{4}$.

Pour les mêmes raisons, $\frac{k-1}{k} \in [0\,;1[\implies 0 \leqslant \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right) < \frac{\pi}{4}$ ou encore $-\frac{\pi}{4} < -\arctan\left(\frac{k-1}{k}\right) \leqslant 0$.

En sommant membres à membres ces inégalités, on a :

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} < \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right) < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}.$$

Commentaires : On ne peut pas soustraire des inégalités. Seulement additionner ! Pour ce faire, il est nécessaire de multiplier tous les membres d'une de ces inégalités par -1...et changer le sens de celle-ci !
L'exercice était gentil et vous laissait beaucoup de latitude. Cela l'aurait été beaucoup moins si on vous avez demandé de prouver que $\arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right) \in \left]-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right[$.

En conclusion,

$$\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[.}$$

(b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right)$.

D'après la question précédente, on peut calculer :

$$\begin{aligned}
\tan\left(\arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right)\right) &= \frac{\tan\left(\arctan\left(\frac{k}{k+1}\right)\right) - \tan\left(\arctan\left(\frac{k-1}{k}\right)\right)}{1+\tan\left(\arctan\left(\frac{k}{k+1}\right)\right)\tan\left(\arctan\left(\frac{k-1}{k}\right)\right)}\\
&= \frac{\dfrac{k}{k+1} - \dfrac{k-1}{k}}{1+\dfrac{k}{k+1}\times\dfrac{k-1}{k}}\\
&= \frac{\dfrac{\cancel{k^2} - (\cancel{k^2}-1)}{\cancel{k(k+1)}}}{\dfrac{2k^2}{\cancel{k(k+1)}}} = \frac{1}{2k^2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right)$ est l'angle de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut $\frac{1}{2k^2}$ i.e.

$$\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\quad \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right).}$$

Commentaires :
- Non ! tan n'est pas compatible avec l'addition et il faut se battre un peu pour calculer $\tan(a+b)$.
- Sans la première question, nous n'aurions pas l'égalité mais seulement l'égalité modulo π.

(c) En déduire la limite de la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$.

D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad \mathrm{S}_n &= \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right)
\end{aligned}$$

On reconnaît une somme télescopique :

$$\begin{aligned}
&= \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right) - \arctan(0)\\
&= \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{4}$.
D'après les théorèmes sur les limites de composées, on obtient donc :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathrm{S}_n = \frac{\pi}{4}}$$

Commentaires : On note $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Remarquez que l'on peut très bien avoir $\lim\limits_{k \to +\infty} \arctan\left(\dfrac{1}{2k^2}\right) = 0$ sans que la limite de la somme soit nulle. Nous verrons que la convergence du terme général vers 0 n'est qu'une condition nécessaire à la convergence de la série.