PTSI

Épreuve de Mathématiques 2

Vendredi 19 avril 2024

Durée : 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à **encadrer** les résultats de leurs calculs.

Lorsqu'un candidat ne sait pas montrer un résultat, il peut l'**admettre** en le précisant sur sa copie et l'utiliser pour **répondre aux questions suivantes**.

Le sujet est composé de 3 exercices indépendants.

PROBLÈME 1.

On considère la fonction $f : x \longmapsto x^2 \operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. *Domaine de définition et domaine d'étude.*

   (a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.

   (b) Étudier la parité de la fonction f sur $\mathcal{D}_f$; en déduire un domaine plus restreint sur lequel il suffit d'étudier f. Expliquer comment toute la courbe peut alors être obtenue sur $\mathcal{D}_f$.

2. *Étude de la dérivée de f.*

   On pose $\varphi : t \longmapsto \dfrac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)} - \dfrac{t}{2}$.

   (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et que l'on a

   $$\forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ \ f'(x) = 2x \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$$

   (b) Faire l'étude de la fonction φ sur $]0; +\infty[$.

   (c) En déduire qu'il existe un unique $\alpha > 0$ tel que $\varphi > 0$ sur $]0; \alpha[$ et $\varphi < 0$ sur $]\alpha; +\infty[$.

   (d) Conclure quant aux variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Dresser un tableau de variation, que l'on complétera après avoir traité la question 3.

3. *Limites aux bords du domaine d'étude.*

   (a) Calculer $\displaystyle\lim_{u \to 0^+} \frac{\operatorname{sh}(u)}{u^2}$ puis en déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$. *(Compléter le tableau de variation).*

   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{u \to +\infty} \frac{\operatorname{sh}(u)}{u^2}$ puis en déduire $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x)$. *(Compléter le tableau de variation).*

4. *Branches infinies.*

   (a) Que peut-on dire de la courbe représentative de f au voisinage de l'origine ?

   On introduit à présent la fonction auxiliaire $\psi : t \longmapsto \dfrac{t^3}{3} + t - \operatorname{sh}(t)$ pour $t \in [0; 1]$.

   (b) Justifier que ψ est trois fois dérivable sur $[0; 1]$. En déduire que $\forall\, t \in [0; 1],\ \ \psi(t) \geq 0$.
   Indication : on pourra utiliser le fait que $\operatorname{ch}(1) < 2$.

   (c) Prouver que $\forall\, t \in [0; 1],\ \ 0 \leq \operatorname{sh}(t) - t \leq \dfrac{t^3}{3}$.

   (d) En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} \frac{\operatorname{sh}(t) - t}{t^2}$.

   (e) Conclure quant à la nature de la branche infinie de la courbe représentative de f en $+\infty$.

5. Tracer l'allure de la courbe dans un repère orthonormé, sur papier millimétré.

   On prendra 2 cm pour 1 unité en se restreignant à $x \in [-4; 4]$ *et* $y \in [-4; 4]$. *On donne également les approximations* $\frac{1}{\alpha} \simeq 0{,}52$ *et* $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \simeq 0{,}91$.

EXERCICE 2.

On considère la fonction $\varphi : x \longmapsto \dfrac{\text{sh}\,(\sin(x))}{\text{ch}\,((\sin(x))}$

1. Déterminer le domaine de définition de φ.
2. Étudier la périodicité et la parité de φ.
3. Étudier les variations de φ.

   On pourra, moyennant une justification, restreindre l'étude de φ à un domaine plus petit que le domaine de définition.
4. Démontrer que φ établit une bijection d'un intervalle $I = [-\alpha; \alpha]$ (avec α que l'on choisira maximal) sur un intervalle $J = [-\beta; \beta]$. On explicitera les valeurs exactes des réels α et β.
5. Étudier la dérivabilité de φ^{-1} sur un domaine à préciser inclus dans J.
6. Calculer $\left(\varphi^{-1}\right)'(0)$. Donner l'équation de la tangente à φ^{-1} en 0.
7. *Bonus.* Peut-on expliciter $\varphi^{-1}(y)$ en fonction de y ?

PROBLÈME 3.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in [\![0; n]\!]$, on s'intéresse à calculer

$$S(p, n) = \sum_{k=p}^{n} \binom{p}{k}$$

Partie A : Des résultats annexes

On fixe $n \in \mathbb{N}$.

1. Préciser la valeur de $S(0, n)$ et $S(1, n)$ et $S(2, n)$ pour $n \geqslant 2$.
2. En reconnaissant une somme triangulaire, calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} S(p, n)$.

Partie B : Méthode 1 et conséquences.

Soit $p \in \mathbb{N}$.

3. Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant p$, $S(p, n) = \dbinom{n+1}{p+1}$.
4. Retrouver alors le résultat de la question 2 .
5. Calculer pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $n \geqslant p$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{n-k+p}{p}$.
6. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $n \geqslant p$.
   (a) Soit $k \in [\![p; n]\!]$. Exprimer $(k+1)\dbinom{k}{p}$ en fonction de $\dbinom{k+1}{p+1}$.
   (b) En déduire $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} (k+1)\binom{k}{p}$.

Partie C : Méthode 2 par un factoriel décroissant

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$A_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} (x-k).$$

On pose également par convention $A_0(x) = 1$ et on fixe dans toute cette partie $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

7. Calculer $A_5\left(\frac{3}{2}\right)$.
8. Préciser $A_n(-1)$ en fonction de n!
9. (a) Préciser pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, $A_n(k)$.
   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_n(k) = n!\binom{k}{n}$
10. (a) Montrer que : $A_{n+1}(x) = (x-n)A_n(x)$.
    (b) A l'aide d'un changement d'indice, montrer que : $A_{n+1}(x) = xA_n(x-1)$.
11. Déduire de la question précédente que pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$A_{p+1}(x+1) - A_{p+1}(x) = (p+1)A_p(x)$$
12. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, montrer que :
$$\sum_{k=0}^{n} A_p(k) = \frac{A_{p+1}(n+1)}{p+1}$$
13. Retrouver alors les valeurs des sommes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$.
14. Soit $p \in [\![0; n]\!]$. Montrer à nouveau que :
$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

• FIN •