PTSI

Épreuve de Mathématiques 2

Correction

PROBLÈME 1.

On considère la fonction $f : x \longmapsto x^2 \text{ sh}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. *Domaine de définition et domaine d'étude.*

   (a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.

   La fonction sh étant définie sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $f(x)$ existe si et seulement si $x \neq 0$. Donc $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*.}$

   (b) Étudier la parité de la fonction f sur $\mathcal{D}_f$; en déduire un domaine plus restreint sur lequel il suffit d'étudier f. Expliquer comment toute la courbe peut alors être obtenue sur $\mathcal{D}_f$.

   Tout d'abord, $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ on peut donc calculer

   $$f(-x) = (-x)^2 \text{ sh}\left(\frac{1}{-x}\right) = x^2 \text{ sh}\left(-\frac{1}{x}\right) = -x^2 \text{ sh}\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

   car sh est impaire sur $\mathbb{R}$.

   Ainsi, la fonction $\boxed{f \text{ est impaire sur } \mathcal{D}_f.}$ Il suffit donc de $\boxed{\text{l'étudier sur } \mathbb{R}_+^*}$ puis toute la courbe sera obtenue en faisant $\boxed{\text{une symétrie de centre } O}$ (l'origine du repère).

2. *Étude de la dérivée de f.*

   On pose $\varphi : t \longmapsto \dfrac{\text{sh}(t)}{\text{ch}(t)} - \dfrac{t}{2}$.

   (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et que l'on a

   $$\forall x \in \mathcal{D}_f,\quad f'(x) = 2x \text{ ch}\left(\frac{1}{x}\right)\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$$

   Posons $u : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto \frac{1}{x}$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (fonction inverse) et à valeurs dans $\mathbb{R}$; par composition avec la fonction sh qui est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction de référence), on en déduit que $\text{sh}(u)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Enfin, par multiplication avec la fonction $x \mapsto x^2$ (dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}^*$), on peut affirmer que $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^*}$ et

   $$\begin{aligned}
   \forall x \in \mathbb{R}^*,\quad f'(x) &= 2x \text{ sh}\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\text{ ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\
   &= 2x \text{ sh}\left(\frac{1}{x}\right) - \text{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\\
   &= 2x \text{ ch}\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{\text{sh}\left(\frac{1}{x}\right)}{\text{ch}\left(\frac{1}{x}\right)} - \frac{1}{2x}\right)\\
   &= \boxed{2x \text{ ch}\left(\frac{1}{x}\right)\varphi\left(\frac{1}{x}\right).}
   \end{aligned}$$

(b) Faire l'étude de la fonction φ sur $]0;+\infty[$.

D'abord, φ est définie $\mathbb{R}$, donc sur $]0;+\infty[$, car ch ne s'annule jamais. Par quotient de sh et ch (qui ne s'annule jamais), et par somme avec un polynôme, φ est dérivable sur $]0;+\infty[$. Sa dérivée est donnée par :

$$\forall t\in]0;+\infty[,\quad \varphi'(t)=\frac{\mathrm{sh}'(t)\,\mathrm{ch}(t)-\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{ch}'(t)}{\mathrm{ch}^2(t)}-\frac{1}{2}=\frac{\mathrm{ch}^2(t)-\mathrm{sh}^2(t)}{\mathrm{ch}^2(t)}-\frac{1}{2}=\frac{1}{\mathrm{ch}^2(t)}-\frac{1}{2}.$$

Étudions maintenant le signe de φ'.

On peut dériver à nouveau, ou alors on résout directement l'inéquation $\varphi'(t)>0$.

$$\begin{aligned}\varphi'(t)>0 \iff \mathrm{ch}^2 t<2 &\iff \mathrm{ch}\, t<\sqrt{2} && \text{(car ch}\, t>0 \text{ et } u\mapsto\sqrt{u} \text{ strict. croiss.)}\\ &\iff \mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}<2\sqrt{2}\\ &\iff \mathrm{e}^{2t}-2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^t+1<0\\ &\iff x^2-2\sqrt{2}\,x+1<0 && \text{en posant } x=\mathrm{e}^t.\end{aligned}$$

Déterminons les racines du polynôme $x\mapsto x^2-2\sqrt{2}\,x+1$. Après calcul du discriminant, on trouve $x_1=\sqrt{2}-1$ et $x_2=\sqrt{2}+1$. Entre ces racines, le trinôme est négatif donc

$$x^2-2\sqrt{2}\,x+1<0 \iff x\in]\sqrt{2}-1;\sqrt{2}+1[$$

Reprenons, compte tenu du fait que $x=\mathrm{e}^t$:

$$\begin{aligned}\varphi'(t)>0 &\iff \sqrt{2}-1<\mathrm{e}^t<\sqrt{2}+1\\ &\iff \ln(\sqrt{2}-1)<t<\ln(\sqrt{2}+1) && \text{(car ln est strict. croiss. sur } \mathbb{R}_+^*)\\ &\iff 0<t<\ln(\sqrt{2}+1) && \text{(car } \ln(\sqrt{2}-1)<0 \text{ alors que } t\in\mathbb{R}_+^*).\end{aligned}$$

Posons $t_0=\ln(\sqrt{2}+1)$; on peut maintenant dresser le tableau de variations de φ :

t	0		t_0		$+\infty$
$\varphi'(t)$		$+$	0	$-$	
φ	0	$\nearrow$	$\varphi(t_0)$	$\searrow$	$-\infty$

(c) En déduire qu'il existe un unique $\alpha>0$ tel que $\varphi>0$ sur $]0;\alpha[$ et $\varphi<0$ sur $]\alpha;+\infty[$.

En appliquant le corollaire du TVI à la fonction φ continue et strictement décroissante sur $]t_0;+\infty[$, on en déduit qu'il existe un unique $\alpha\in]t_0;+\infty[$ (donc $\alpha>0$) tel que $\varphi>0$ sur $[t_0;\alpha[$ et $\varphi<0$ sur $]\alpha;+\infty[$. Finalement, compte tenu du signe positif de φ sur $[0;t_0]$, on a bien $\boxed{\varphi>0 \text{ sur }]0;\alpha[\text{ et } \varphi<0 \text{ sur }]\alpha;+\infty[.}$

(d) Conclure quant aux variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Dresser un tableau de variation, que l'on complétera après avoir traité la question 3.

On a : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \ f'(x)=2x\ \mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$. Comme $2x>0$ et $\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)>0$ on en déduit que $f'(x)$ est du signe de $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$. D'après la question précédente, on obtient :

$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right)>0 \iff \frac{1}{x}<\alpha \iff x>\frac{1}{\alpha}.$$

On obtient le tableau de variation :

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

3. *Limites aux bords du domaine d'étude.*

   (a) Calculer $\lim\limits_{u\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sh}(u)}{u^2}$ puis en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. *(Compléter le tableau de variation).*

   Si $u \neq 0$, on a $\dfrac{\operatorname{sh} u}{u^2} = \dfrac{1}{u} \times \frac{\operatorname{sh} u}{u}$. Comme $\dfrac{\operatorname{sh}(u)}{u} \xrightarrow[u\to 0_+]{} 1$ (taux d'accroissement connu) et $\dfrac{1}{u} \xrightarrow[u\to 0_+]{} +\infty$ alors par produit $\lim\limits_{u\to 0_+} \dfrac{\operatorname{sh}(u)}{u^2} = +\infty$.

   Revenons à $f(x)$ en posant $u = \dfrac{1}{x}$: comme $x \to +\infty$ alors $u \to 0_+$. Ainsi,

   $$f(x) = x^2 \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\operatorname{sh}(u)}{u^2}$$

   Par composition des limites on a alors $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$

   (b) Calculer $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sh}(u)}{u^2}$ puis en déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. *(Compléter le tableau de variation).*

   Par définition de sh on a, pour $u > 0$, $\dfrac{\operatorname{sh}(u)}{u^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mathrm{e}^u}{u^2} - \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u^2}\right)$. D'une part, par croissances comparées on sait que $\dfrac{\mathrm{e}^u}{u^2} \xrightarrow[u\to+\infty]{} +\infty$. D'autre part, par produit on peut affirmer que $\dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u^2} = \dfrac{1}{u^2} \times \mathrm{e}^{-u} \xrightarrow[u\to+\infty]{} 0$. Revenons à $f(x)$ en posant $u = \frac{1}{x}$ comme précédemment (sauf qu'ici $u \to +\infty$ lorsque $x \to 0_+$). Par composition des limites, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = +\infty.}$

4. *Branches infinies.*

   (a) Que peut-on dire de la courbe représentative de f au voisinage de l'origine ?

   D'après (3b) on peut affirmer que la courbe admet une $\boxed{\text{asymptote verticale d'équation } x = 0.}$

   On introduit à présent la fonction auxiliaire $\psi : t \longmapsto \dfrac{t^3}{3} + t - \operatorname{sh}(t)$ pour $t \in [0;1]$.

   (b) Justifier que ψ est trois fois dérivable sur $[0;1]$. En déduire que $\forall\, t \in [0;1],\quad \psi(t) \geq 0$.
   Indication : on pourra utiliser le fait que $\operatorname{ch}(1) < 2$.

   Comme ψ est la somme d'un polynôme et de la fonction sh (elle même combinaison linéaire d'exponentielles), on peut affirmer que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est encore de la même forme, donc encore dérivable, et ainsi de suite ; donc ψ est trois fois dérivable (et même dérivable une infinité de fois...) sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0;1]$. On étudie les variations de ψ en dérivant autant de fois que nécessaire :

   $$\begin{aligned} \forall\, t \in [0;1], \quad \psi'(t) &= t^2 + 1 - \operatorname{ch} t \\ \psi''(t) &= 2t - \operatorname{sh} t \\ \psi'''(t) &= 2 - \operatorname{ch} t. \end{aligned}$$

   Remarque : on est contraint de dériver 3 fois, car on ne sait pas étudier algébriquement le signe de $\psi'(t)$ ni de $\psi''(t)$...heureusement l'énoncé nous donnait cette indication !

   Comme $0 \leq t \leq 1$, on a $\operatorname{ch}(0) \leq \operatorname{ch}(t) \leq \operatorname{ch}(1)$ car ch est croissante sur $[0;1]$. En particulier, on obtient $-\operatorname{ch}(t) \geq -\operatorname{ch}(1)$ donc $\psi'''(t) \geq 2 - \operatorname{ch}(1) > 0$ d'après l'indication donnée. On va donc pouvoir en déduire les variations de ψ'', puis on signe et « remonter » ainsi jusqu'à ψ :

t	0		1
$\psi'''(t)$		$+$	
ψ''	$\psi''(0) = 0$	$\nearrow$	

t	0	1
$\psi''(t)$	$+$	
ψ'	$\psi'(0) = 0$ $\nearrow$	

t	0	1
$\psi'(t)$	$+$	
ψ	$\psi(0) = 0$ $\nearrow$	

On en déduit donc que $\boxed{\forall t \in [0;1],\ \ \psi(t) \geq 0.}$

(c) Prouver que $\forall t \in [0;1],\ \ 0 \leq \mathrm{sh}(t) - t \leq \dfrac{t^3}{3}$.

D'après ce qui précède, on a pour $t \in [0;1]$, $\psi(t) \geq 0 \iff \mathrm{sh}(t) - t \leq \frac{t^3}{3}$. Montrons à présent que $\mathrm{sh}(t) - t \geq 0$. On étudie pour cela la fonction $h : t \mapsto \mathrm{sh}(t) - t$ définie sur $[0;1]$. Comme dans la question précédente, h est dérivable sur $[0;1]$ et on a $\forall t \in [0;1],\ \ h'(t) = \mathrm{ch}(t) - 1 \geq 0$. Ainsi, h est croissante sur $[0;1]$ donc en particulier, $\forall t \in [0;1],\ \ h(t) \geq h(0) = 0$, ce qu'on voulait montrer.

Conclusion : $\boxed{\forall t \in [0;1],\ \ 0 \leq \mathrm{sh}(t) - t \leq \frac{t^3}{3}.}$

(d) En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} \frac{\mathrm{sh}(t) - t}{t^2}$.

Si $t \neq 0$, divisons l'inégalité précédente par $t^2 > 0$: on obtient $0 \leq \frac{\mathrm{sh}(t)-t}{t^2} \leq \dfrac{t}{3}$. Comme $\dfrac{t}{3} \xrightarrow[t \to 0_+]{} 0$ alors par encadrement, on obtient $\boxed{\displaystyle\lim_{t \to 0_+} \frac{\mathrm{sh}(t) - t}{t^2} = 0.}$

(e) Conclure quant à la nature de la branche infinie de la courbe représentative de f en $+\infty$.

On sait déjà que $f(x) \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$. Étudions à présent la limite de $\frac{f(x)}{x}$:

$$\frac{f(x)}{x} = x\ \mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1,$$

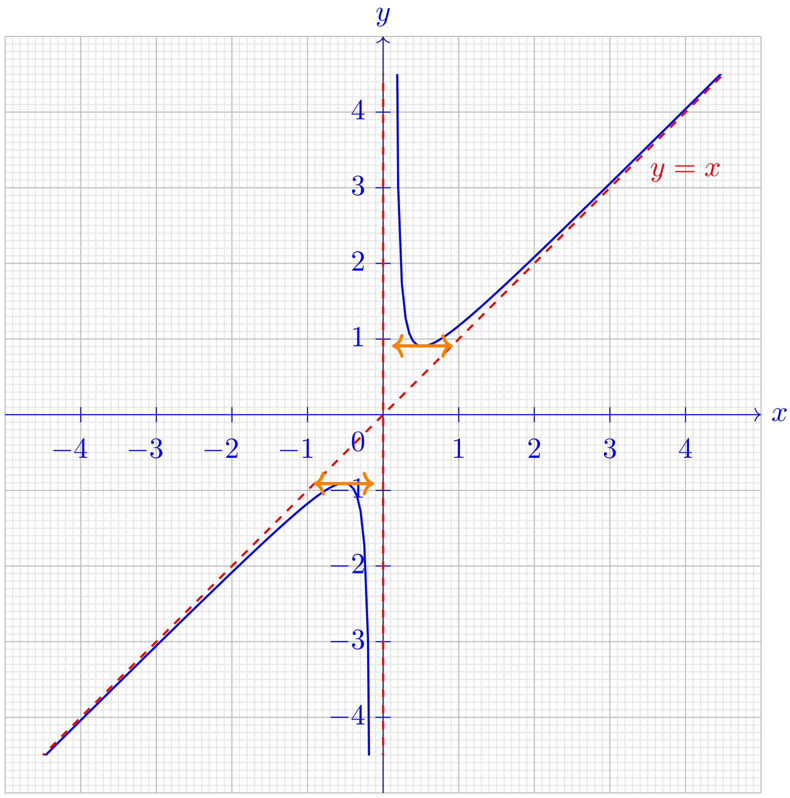
car $\displaystyle\lim_{u \to 0_+} \frac{\mathrm{sh}\, u}{u} = 1$. On cherche à présent la limite de $f(x) - 1 \times x$:

$$f(x) - x = x^2\ \mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) - x = x^2 \left(\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right) \quad \text{(factorisation du terme prépondérant)}$$
$$= \frac{\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x^2}}.$$

Posons $t = \frac{1}{x} \to 0_+$ lorsque $x \to +\infty$. Alors on a $f(x) - x = \dfrac{\mathrm{sh}(t) - t}{t^2}$ qui tend vers 0 lorsque $t \to 0_+$ d'après la question précédente. Conclusion : $\boxed{\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = 0}$ c'est-à-dire la courbe admet une $\boxed{\text{asymmptote oblique d'équation } y = x.}$

5. Tracer l'allure de la courbe dans un repère orthonormé, sur papier millimétré.

   On prendra 2 cm pour 1 unité en se restreignant à $x \in [-4;4]$ et $y \in [-4;4]$. On donne également les approximations $\frac{1}{\alpha} \simeq 0{,}52$ et $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \simeq 0{,}91$.



EXERCICE 2.

On considère la fonction $\varphi : x \longmapsto \dfrac{\text{sh}\,(\sin(x))}{\text{ch}\,((\sin(x))}$

1. Déterminer le domaine de définition de φ.

   Si $x \in \mathbb{R}$, on a $\text{ch}(\sin x) \geq 1$ (propriété de la fonction ch), donc $\varphi(x)$ existe toujours car le dénominateur ne s'annule jamais.

   $\boxed{\text{Le domaine de définition de } \varphi \text{ est donc } \mathbb{R}.}$

2. Étudier la périodicité et la parité de φ.

   On commence par observer que le domaine est centré en 0, par conséquent, pour tout x dans le domaine, $(-x)$ est encore dans le domaine et on peut écrire :

$$\varphi(-x) = \frac{\text{sh}\,(\sin(-x))}{\text{ch}\,((\sin(-x))} = \frac{\text{sh}\,(-\sin(x))}{\text{ch}\,(-(\sin(x))} = -\frac{\text{sh}\,(\sin(x))}{\text{ch}\,((\sin(x))} = -\varphi(x)$$

   On en déduit que $\boxed{\varphi \text{ est une fonction impaire.}}$ Par ailleurs, sin étant 2π-périodique, on en déduit que $\boxed{\varphi \text{ est également } 2\pi\text{-périodique.}}$

3. Étudier les variations de φ.

On pourra, moyennant une justification, restreindre l'étude de φ à un domaine plus petit que le domaine de définition.

Par périodicité, on peut limiter l'étude de φ à l'intervalle $[-\pi;\pi]$. (par parité on pourrait encore restreindre l'étude à $[0;\pi]$, mais par la suite on nous demande un intervalle centré en 0).

La fonction $\mathrm{sh}\circ\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$), tout comme la fonction $\mathrm{ch}\circ\sin$ qui de plus ne s'annule jamais. Par quotient, φ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\begin{aligned}
\forall x\in\mathbb{R},\quad \varphi'(x) &= \frac{(\mathrm{sh}\circ\sin)'(x)\,\mathrm{ch}(\sin(x))-\mathrm{sh}(\sin(x))(\mathrm{ch}\circ\sin)'(x)}{\mathrm{ch}^2(\sin(x))}\\
&= \frac{[\cos(x)\,\mathrm{ch}(\sin(x))]\,\mathrm{ch}(\sin(x))-\mathrm{sh}(\sin(x))[\cos(x)\,\mathrm{sh}(\sin(x))]}{\mathrm{ch}^2(\sin(x))}\\
&= \frac{\cos(x)\left((\mathrm{ch}^2(\sin(x))-\mathrm{sh}^2(\sin(x))\right)}{\mathrm{ch}^2(\sin(x))}\\
&= \frac{\cos(x)}{\mathrm{ch}^2(\sin(x))}
\end{aligned}$$

grâce à la relation fondamentale $\mathrm{ch}^2-\mathrm{sh}^2=1$. En particulier, on remarque que $\varphi'(x)$ est du signe de $\cos(x)$ car le dénominateur est toujours strictement positif. On en déduit le tableau de variations de φ sur $[-\pi;\pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
φ	0	$\searrow$	$-\frac{\mathrm{sh}(1)}{\mathrm{ch}(1)}$	$\nearrow$	$\frac{\mathrm{sh}(1)}{\mathrm{ch}(1)}$	$\searrow$	0

4. Démontrer que φ établit une bijection d'un intervalle $I=[-\alpha;\alpha]$ (avec α que l'on choisira maximal) sur un intervalle $J=[-\beta;\beta]$. On explicitera les valeurs exactes des réels α et β.

Le plus grand intervalle de $[-\pi;\pi]$, centré en 0, sur lequel φ est strictement monotone est $I=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Montrons que φ est bijective sur cet intervalle.

La fonction φ est **continue** et **strictement croissante** sur I avec $\varphi(-\frac{\pi}{2})=-\frac{\mathrm{sh}(1)}{\mathrm{ch}(1)}$ et $\varphi(\frac{\pi}{2})=\frac{\mathrm{sh}(1)}{\mathrm{ch}(1)}$.

Donc d'après le théorème de la bijection, $\boxed{\varphi \text{ est bijective de } I \text{ dans } J=f(I)=\left[-\frac{\mathrm{sh}(1)}{\mathrm{ch}(1)};\frac{\mathrm{sh}(1)}{\mathrm{ch}(1)}\right].}$

(Les réels α et β de l'énoncé sont donc $\alpha=\frac{\pi}{2}$ et $\beta=\frac{\mathrm{sh}(1)}{\mathrm{ch}(1)}$).

5. Étudier la dérivabilité de φ^{-1} sur un domaine à préciser inclus dans J.

Appliquons le théorème de dérivabilité d'une bijection réciproque :

(1) Le théorème de la bijection a montré que φ est bijective de I dans J ;

(2) la fonction φ est dérivable sur I,

donc φ^{-1} est dérivable sur J, privé des points $y=\varphi(x)$ où $x\in I$ vérifie $\varphi'(x)=0$, c'est-à-dire $\cos x=0$, d'où $x=\pm\frac{\pi}{2}$. On exclut donc $y=\varphi(\frac{\pi}{2})=\beta$ et $y=\varphi(-\frac{\pi}{2})=-\beta$, ce qui montre que $\boxed{\varphi^{-1} \text{ est dérivable sur } J'=\,]-\beta;\beta[\,=\left]-\frac{\mathrm{sh}(1)}{\mathrm{ch}(1)};\frac{\mathrm{sh}(1)}{\mathrm{ch}(1)}\right[.}$

6. Calculer $\left(\varphi^{-1}\right)'(0)$. Donner l'équation de la tangente à φ^{-1} en 0.

Le théorème de dérivabilité d'une bijection réciproque montre que :

$$\forall\, y \in J' = \left]-\tfrac{\mathrm{sh}(1)}{\mathrm{ch}(1)}; \tfrac{\mathrm{sh}(1)}{\mathrm{ch}(1)}\right[, \quad (\varphi^{-1})'(y) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))} = \frac{1}{\frac{\cos(\varphi^{-1}(y))}{\mathrm{ch}^2(\sin(\varphi^{-1}(y)))}} = \frac{\mathrm{ch}^2(\sin(\varphi^{-1}(y)))}{\cos(\varphi^{-1}(y))}.$$

Or, on a $\varphi(0) = 0$ donc $\varphi^{-1}(0) = 0$. Par conséquent,

$$(\varphi^{-1})'(0) = \frac{\mathrm{ch}^2(\sin(\varphi^{-1}(0)))}{\cos(\varphi^{-1}(0))} = \frac{\mathrm{ch}^2(0)}{\cos(0)} = 1.$$

On peut donc conclure que $\boxed{(\varphi^{-1})'(0) = 1}$ et l'équation de la tangente à φ^{-1} en 0 est :

$$y = (\varphi^{-1})'(0)(x-0) + \varphi^{-1}(0) \iff \boxed{y = x}$$

7. *Bonus.* Peut-on expliciter $\varphi^{-1}(y)$ en fonction de y ?

Soit $y \in [-\beta;\beta]$; il s'agit de résoudre l'équation $\varphi(x) = y$:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = y \iff \frac{\mathrm{sh}(\sin x)}{\mathrm{ch}(\sin x)} = y &\iff \frac{\mathrm{sh}\, X}{\mathrm{ch}\, X} = y && (\text{en posant } X = \sin x)\\
&\iff \frac{\mathrm{e}^X - \mathrm{e}^{-X}}{\mathrm{e}^X + \mathrm{e}^{-X}} = y\\
&\iff \mathrm{e}^X - \mathrm{e}^{-X} = y\,\mathrm{e}^X + y\,\mathrm{e}^{-X}\\
&\iff \mathrm{e}^{2X} - 1 = y\,\mathrm{e}^{2X} + y && (\text{multiplication par } \mathrm{e}^X \neq 0)\\
&\iff (1-y)\,\mathrm{e}^{2X} = 1 + y\\
&\iff \mathrm{e}^{2X} = \frac{1+y}{1-y} && (\text{car } 1 - y \neq 0 \text{ vu que } \beta < 1)\\
&\iff X = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\\
&\iff \sin x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).
\end{aligned}$$

Une rapide étude de fonction permet de vérifier que $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$ appartient bien à $[-1;1]$ (car $y \in \left[-\frac{\mathrm{sh}\,1}{\mathrm{ch}\,1}; \frac{\mathrm{sh}(1)}{\mathrm{ch}(1)}\right]$), de sorte que l'on peut en considérer l'arcsinus. Ainsi,

$$\varphi(x) = y \iff x = \arcsin\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\right).$$

On en conclut que $\boxed{\forall\, y \in \left[-\frac{\mathrm{sh}(1)}{\mathrm{ch}(1)}; \frac{\mathrm{sh}(1)}{\mathrm{ch}(1)}\right],\ \varphi^{-1}(y) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\right).}$

PROBLÈME 3.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in [\![0; n]\!]$, on s'intéresse à calculer

$$S(p,n) = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$$

Partie A : Des résultats annexes

On fixe $n \in \mathbb{N}$.

1. Préciser la valeur de $S(0,n)$ et $S(1,n)$ et $S(2,n)$ pour $n \geqslant 2$.

   Soit $n \geqslant 2$. Par définition, on a

$$S(0,n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{0} = \sum_{k=0}^{n} 1 = \boxed{n+1}.$$

   De plus,

$$S(1,n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} = \sum_{k=1}^{n} k = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

   Enfin,

$$S(2,n) = \sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k!}{2!(k-2)!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{2}.$$

   car le terme pour $k = 1$ est nul. On en déduit :

$$\begin{aligned} S(2,n) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right) \\ &= \frac{n(n+1)}{12}(2n+1-3) \\ &= \boxed{\frac{(n-1)n(n+1)}{6}} \end{aligned}$$

2. En reconnaissant une somme triangulaire, calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} S(p,n)$.

   On reconnait (comme indiqué) une somme triangulaire dont on intervertit l'ordre de sommation :

$$\sum_{p=0}^{n} S(p,n) = \sum_{0 \leqslant p \leqslant k \leqslant n} \binom{k}{p} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} = \sum_{k=0}^{n} 2^k$$

   On obtient alors une somme géométrique de raison $2 \neq 1$,

$$\sum_{p=0}^{n} S(p,n) = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1} - 1.$$

   Conclusion : $\boxed{\displaystyle\sum_{p=0}^{n} S(p,n) = 2^{n+1} - 1}$

Partie B : Méthode 1 et conséquences.

Soit $p \in \mathbb{N}$.

3. Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant p$, $S(p,n) = \binom{n+1}{p+1}$.

   On pose pour tout $n \geqslant p$, $\mathscr{P}(n)$: « $S(p,n) = \left(\begin{array}{c} n+1 \\ p+1 \end{array}\right)$». Procédons par récurrence.

   Initialisation. Si $n = p$, alors

$$S(p,n) = S(p,p) = \sum_{k=p}^{p} \binom{p}{k} = \binom{p}{p} = 1.$$

   D'autre part,

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{p+1}{p+1} = 1.$$

   Donc dans ce cas, $S(p,n) = \binom{n+1}{p+1}$ et donc (p) est vraie.

   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant p$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et calculons :

$$\begin{aligned} S(p,n+1) = \sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} \\ &= \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \binom{n+2}{p+1} && \text{par la formule de Pascal} \end{aligned}$$

   Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est aussi vraie.

   Conclusion, pour tout $n \geqslant p, \mathscr{P}(n)$ est vraie : $\boxed{\forall n \geqslant p, \quad S(p,n) = \binom{n+1}{p+1}.}$

4. Retrouver alors le résultat de la question 2 .

   Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide de la question précédente, puisque dans la somme $p \leqslant n$, on a

$$\sum_{p=0}^{n} S(p,n) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n+1}{p+1}.$$

   Effectuons le changement d'indice $q = p+1$,

$$\sum_{p=0}^{n} S(p,n) = \sum_{q=1}^{n+1} \binom{n+1}{q} = \sum_{q=0}^{n+1} \binom{n+1}{q} - \binom{n+1}{0}. = 2^{n+1} - 1.$$

   On retrouve bien le résultat de la question 2 : $\boxed{\sum_{p=0}^{n} S(p,n) = 2^{n+1} - 1}$

5. Calculer pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $n \geqslant p$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{n-k+p}{p}$.

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2, n \geqslant p$. Effectuons l'inversion d'indice $\tilde{k} = n-k+p$:

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{n-k+p}{p} = \sum_{\tilde{k}=p}^{n} \binom{\tilde{k}}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} \quad \text{car l'indice de sommation est muet.}$$

On retrouve alors $S(p,n)$. Donc par la question 3. on conclut que

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n} \binom{n-k+p}{p} = \binom{n+1}{p+1}}$$

6. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $n \geqslant p$.

   (a) Soit $k \in [\![p;n]\!]$. Exprimer $(k+1)\binom{k}{p}$ en fonction de $\binom{k+1}{p+1}$.

   Soit $k \in [\![p;n]\!]$. On a par définition,

$$\begin{aligned}
(k+1)\binom{k}{p} &= (k+1)\frac{k!}{p!(k-p)!} \\
&= \frac{(k+1)!}{p!(k-p)!} \\
&= \frac{(k+1)!}{\frac{1}{p+1}(p+1)!(k-p)!} \\
&= (p+1)\frac{(k+1)!}{(p+1)!(k+1-p-1)!} \\
&= (p+1)\binom{k+1}{p+1}.
\end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{(k+1)\binom{k}{p} = (p+1)\binom{k+}{p+1}}$.

   (b) En déduire $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}(k+1)\binom{k}{p}$.

   Par la question précédente,

$$\sum_{k=p}^{n}(k+1)\binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \underbrace{(p+1)}_{\text{indépendant de } k} \binom{k+1}{p+1} = (p+1)\sum_{k=p}^{n}\binom{k+1}{p+1}.$$

   Posons $\tilde{k} = k+1$:

$$\sum_{k=p}^{n}(k+1)\binom{k}{p} = (p+1)\sum_{\tilde{k}=p+1}^{n+1}\binom{\tilde{k}+1}{p+1} = (p+1)S(p+1,n+1).$$

   Donc par la question 3 : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=p}^{n}(k+1)\binom{k}{p} = (p+1)\binom{n+2}{p+2}}$

Partie C : Méthode 2 par un factoriel décroissant

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$A_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} (x-k).$$

On pose également par convention $A_0(x) = 1$ et on fixe dans toute cette partie $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

7. Calculer $A_5\left(\frac{3}{2}\right)$.

   Par définition,

   $$A_5\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)\left(\frac{3}{2}-3\right)\left(\frac{3}{2}-4\right) = \frac{3}{2}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{45}{32}.$$

   Conclusion : $\boxed{A_5\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{45}{32}.}$

8. Préciser $A_n(-1)$ en fonction de $n!$

   On a

   $$A_n(-1) = \prod_{k=0}^{n-1}(-1-k) = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1}(k+1).$$

   Posons $i = k+1$,

   $$A_n(-1) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} i = (-1)^n n!$$

   Conclusion : $\boxed{A_n(-1) = (-1)^n n!}$

9. (a) Préciser pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, $A_n(k)$.

   Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$, on a

   $$A_n(k) = \prod_{i=0}^{n-1}(k-i) = \prod_{i=0}^{k-1}(k-i) \times 0 \times \prod_{i=k+1}^{n-1} i = 0.$$

   Conclusion : $\boxed{\forall k \in [\![0; n-1]\!], \quad A_n(k) = 0.}$

   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_n(k) = n!\binom{k}{n}$

   Soit $k \in \mathbb{N}$.

   Premier cas : $k \in [\![0; n-1]\!]$. Alors par la question précédente $A_n(k) = 0$, mais puisque $n > k$ par convention, $\binom{k}{n} = 0$. Dans ce cas,

   $$A_n(k) = 0 = \binom{k}{n} k!$$

   Second cas : $k \geqslant n$. Alors,

   $$A_n(k) = \prod_{i=0}^{n-1}(k-i).$$

   Effectuons l'inversion d'indice $j = k - i$,

   $$A_n(k) = \prod_{j=k-n+1}^{k} j = \frac{\prod_{j=1}^{k} j}{\prod_{j=1}^{k-n} j} \quad \text{avec la convention } \prod_{j=1}^{k-n} j = 1 \text{ si } k = n$$

Ainsi,

$$A_n(k) = \frac{k!}{(k-n)!} = n!\frac{k!}{n!(k-n)!} = n!\binom{k}{n}.$$

Conclusion : $\boxed{A_n(k) = n!\binom{k}{n}}$

10. (a) Montrer que : $A_{n+1}(x) = (x-n)A_n(x)$.

Soit $n \geqslant 1$, on a directement :

$$A_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^{n}(x-k) = (x-n)\prod_{k=0}^{n-1}(x-k) = (x-n)A_n(x).$$

Conclusion : $\boxed{A_{n+1}(x) = (x-n)A_n(x).}$

(b) A l'aide d'un changement d'indice, montrer que : $A_{n+1}(x) = xA_n(x-1)$.

On commence par extraire cette fois-ci le premier terme (possible car $n \geqslant 1$) :

$$A_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^{n}(x-k) = x\prod_{k=1}^{n}(x-k)$$

Posons $i = k-1$, on obtient

$$A_{n+1}(x) = x\prod_{i=0}^{n-1}(x-(i+1)) = x\prod_{i=0}^{n-1}(x-1-i) = xA_n(x-1).$$

Conclusion : $\boxed{A_{n+1}(x) = xA_n(x-1).}$

11. Déduire de la question précédente que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$A_{p+1}(x+1) - A_{p+1}(x) = (p+1)A_p(x)$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Par la question 10.b avec $\tilde{x} = x+1$ et $n = p \in \mathbb{N}^*$ (important !!) on a

$$A_{p+1}(x+1) - A_{p+1}(x) = (x+1)A_p(x) - A_{p+1}(x).$$

Par la question 10.a, on obtient

$$A_{p+1}(x+1) - A_{p+1}(x) = (x+1)A_p(x) - (x-n)A_p(x) = (x+1-x+p)A_p(x) = (p+1)A_p(x).$$

Si $p = 0$, on a

$$A_{p+1}(x+1) - A_{p+1}(x) = A_1(x+1) - A_1(x) = x+1-x = 1 = (0+1)A_0(x) \quad \text{par définition.}$$

Conclusion, dans tous les cas : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad A_{p+1}(x+1) - A_{p+1}(x) = (p+1)A_p(x).}$

12. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} A_p(k) = \frac{A_{p+1}(n+1)}{p+1}$$

Soit $p \in \mathbb{N}$. Par la question précédente avec $x = k$, puisque $p+1 \neq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} A_p(k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{p+1}(k+1) - A_{p+1}(k)}{p+1} = \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{n} A_{p+1}(k+1) - A_{p+1}(k).$$

On reconnait une somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^{n} A_p(k) = \frac{1}{p+1}\left(A_{p+1}(n+1) - A_{p+1}(0)\right).$$

Or $A_{p+1}(0) = \prod_{i=0}^{p}(0-i) = 0$. Conclusion :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} A_p(k) = \frac{A_{p+1}(n+1)}{p+1}.}$$

13. Retrouver alors les valeurs des sommes : $\sum_{k=0}^{n} k$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2$.

Prenons $p=1$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} A_p(k) = \sum_{k=0}^{n} A_1(k) = \sum_{k=0}^{n}\prod_{i=0}^{0}(k-i) = \sum_{k=0}^{n} k.$$

Donc par la question précédente,

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{A_2(n+1)}{2} = \frac{\prod_{i=0}^{1}(n+1-i)}{2} = \frac{(n+1)n}{2}.$$

De même, en prenant $p=2$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} A_p(k) = \sum_{k=0}^{n} A_2(k) = \sum_{k=0}^{n}\prod_{i=0}^{1}(k-i) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) = \sum_{k=0}^{n} k^2 - \sum_{k=0}^{n} k.$$

Donc par ce qui précède,

$$\sum_{k=0}^{n} A_2(k) = \sum_{k=0}^{n} k^2 - \frac{n(n+1)}{2}.$$

D'autre part, par la question précédente,

$$\sum_{k=0}^{n} A_2(k) = \frac{A_3(n+1)}{3} = \frac{\prod_{i=0}^{2}(n+1-i)}{3} = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} \iff \sum_{k=0}^{n} k^2 &= \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{n(n+1)}{6}(2(n-1)+3)\\ &= \frac{n(n+1)}{6}(2n+1).\end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

14. Soit $p \in [\![0; n]\!]$. Montrer à nouveau que :

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

Soit $p \in [\![0; n]\!]$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $p \neq 0$, par la question 9.b on observe que

$$\binom{k}{p} = \frac{A_p(k)}{p!}.$$

Si $p = 0$, on a $\displaystyle\binom{k}{p} = \binom{k}{0} = 1 = \frac{A_0(k)}{0!} = \frac{A_p(k)}{p!}$ par définition. Donc dans tous les cas,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \binom{k}{p} = \frac{A_p(k)}{p!}.$$

En sommant sur k entre p et n :

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \frac{1}{p!} \sum_{k=p}^{n} A_p(k).$$

Si $p = 0$, on obtient que

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \frac{1}{0!} \sum_{k=0}^{n} A_0(k) = n+1 = \binom{n+1}{1} = \binom{n=1}{p+1}$$

Si $p \geqslant 1$, par la relation de Chasles,

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \frac{1}{p!} \left(\sum_{k=0}^{n} A_p(k) - \sum_{k=0}^{p-1} A_p(k) \right).$$

Donc par la question 12. appliquée à $\tilde{n} = n$ d'une part et $\tilde{n} = p - 1$ d'autre part,

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \frac{1}{p!} \left(\frac{A_{p+1}(n+1)}{p+1} - \frac{A_{p+1}(p-1+1)}{p+1} \right) = \frac{1}{p!} \left(\frac{A_{p+1}(n+1)}{p+1} - \frac{A_{p+1}(p)}{p+1} \right).$$

Or $p < p+1$ donc par la question 9.a, $A_{p+1}(p) = 0$. Ainsi, par la question 9.b :

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \frac{A_{p+1}(n+1)}{(p+1)!} = \frac{(p+1)!\binom{n+1}{p+1}}{(p+1)!} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Dans tous les cas, on retrouve à nouveau que

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.}$$

• FIN •