Les Nombres Complexes I

Exercice 1 : Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants : *Vérifier vos résultats à la calculatrice.*

$z_1 = \left(1+\frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)+(3+\mathrm{i})$

$z_2 = (2-4\,\mathrm{i})-(2-3\,\mathrm{i})$

$z_3 = \left(2+\frac{1}{3}\,\mathrm{i}\right)+\left(-3+\frac{4}{3}\,\mathrm{i}\right)$

$z_4 = (2+\mathrm{i}\sqrt{5})+(3-2i\sqrt{5})$

$z_5 = (2-\mathrm{i})(\mathrm{i}+1)$

$z_6 = 2\,\mathrm{i}(3-2\,\mathrm{i})$

$z_7 = (\sqrt{2}+2\,\mathrm{i})(3-\sqrt{2}\,\mathrm{i})$

$z_8 = (7\,\mathrm{i}-3)(7-3\,\mathrm{i})$

$z_9 = i^4$

$z_{10} = i^5$

$z_{11} = (2\,\mathrm{i})^7$

$z_{12} = \mathrm{i}^{2n}$

$z_{13} = \mathrm{i}^{2n+1}$

$z_{14} = (1+\mathrm{i})^2$

$z_{15} = (1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$

$z_{16} = (5-2\,\mathrm{i})(5+2\,\mathrm{i})$

$z_{17} = (1+\mathrm{i}\sqrt{2})^2$

$z_{18} = (2+3i)^3$

$z_{19} = (1-2\,\mathrm{i})^3$

$z_{20} = \dfrac{1}{2+3\,\mathrm{i}}$

$z_{21} = \dfrac{1}{4\,\mathrm{i}-3}$

$z_{22} = \dfrac{1}{-3+\mathrm{i}}$

$z_{23} = \dfrac{1}{(1+i)^2}$

$z_{24} = \dfrac{i}{4-i}$

$z_{25} = \dfrac{1+\sqrt{2}\,\mathrm{i}}{1-\sqrt{2}\,\mathrm{i}}$

$z_{26} = \dfrac{(2-i)^2}{2i}$

$z_{27} = (3+\mathrm{i})\dfrac{3-2\,\mathrm{i}}{5-\mathrm{i}}$

$z_{28} = 1+\dfrac{3+10\,\mathrm{i}}{5-5\,\mathrm{i}}$

$z_{29} = \dfrac{5+\mathrm{i}}{5-\mathrm{i}}+\mathrm{i}$

$z_{30} = \dfrac{6-\mathrm{i}}{3-3\,\mathrm{i}}\times\dfrac{1-\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$

$z_{31} = \dfrac{\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}}$

$z_{32} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$

Exercice 2 : Soit $z\in\mathbb{C}$ un nombre complexe, déterminer les conjugués des nombres complexes suivants :

$z_1 = (3-5\,\mathrm{i})+\sqrt{2}$

$z_2 = (5-\mathrm{i})+\sqrt{2}+3\,\mathrm{i}$

$z_3 = 3z$

$z_4 = z^2+2z$

$z_5 = \dfrac{z+1}{3}$

$z_6 = \dfrac{\mathrm{i}-z}{z+1}$

$z_7 = \mathrm{Im}\,(z)+\mathrm{i}\,\mathrm{Re}\,(z)$

$z_8 = 2z-\bar{z}$

$z_9 = z^2+\bar{z}^2$

$z_{10} = \mathrm{i}\,\bar{z}$

$z_{11} = -2\bar{z}$

Exercice 3 : Soit $z\in\mathbb{C}^*$.

1. Montrer de deux façons différentes que $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{\bar{z}}$ est un réel.
2. Montrer de deux façons différentes que $\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{\bar{z}}$ est un imaginaire pur.

Exercice 4 : Déterminer l'ensemble des complexes z tels que :

1. $\dfrac{z-2}{2z+\mathrm{i}}\in\mathbb{R}$
2. $\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\in\mathrm{i}\mathbb{R}$

Exercice 5 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On donnera les solutions sous forme algébrique.

1. $2\,\mathrm{i}\,z-1-\mathrm{i} = z+2\,\mathrm{i}$
2. $3+2z-2\,\mathrm{i} = \mathrm{i}\,z+\mathrm{i}+5$
3. $2i+3z=i(5-iz)$
4. $z=(2-\mathrm{i})z+3$
5. $(1+\mathrm{i})z=1-\mathrm{i}$
6. $\dfrac{2}{z}+3\,\mathrm{i} = -2-5\,\mathrm{i}$
7. $\dfrac{2z+1}{z-i}=1$
8. $\dfrac{\mathrm{i}\,z+1}{z-3\,\mathrm{i}}=2+\mathrm{i}$
9. $\dfrac{2\,\mathrm{i}\,z+\mathrm{i}}{z-1-\mathrm{i}}=3$
10. $(2z+1-\mathrm{i})(\mathrm{i}\,z+3)=0$
11. $(z-\mathrm{i})^2=(z+1+\mathrm{i})^2$
12. $\begin{cases} z+z' &= 2-5\,\mathrm{i} \\ z+3z' &= \mathrm{i}-1 \end{cases}$
13. $\begin{cases} z+\mathrm{i}\,z' &= 2 \\ 2z+2z' &= 2+3\,\mathrm{i} \end{cases}$
14. $(1+\mathrm{i})z+(2-\mathrm{i})\bar{z}=1-2\,\mathrm{i}$
15. $(1+\mathrm{i})z+(1-\mathrm{i})\bar{z}=2$
16. $(1+\mathrm{i})\bar{z}+2\,\mathrm{i}\,z=1-\mathrm{i}$
17. $(3+i)\bar{z}=(1-5i)z$
18. $-2z^2+6z+5=0$
19. $z^2+9=0$

20 $2z^2 = 3z - 2$

21 $-2z + z^2 + 2 = 0$

22 $3z^2 - 2z = 1$

23 $\dfrac{z^2+9}{3} = 0$

24 $2z^2 = z + 3$

25 $\dfrac{3+z}{3-z} = z$

26 $(z-2)^2 = -4$

27 $z^2 - 3z + 3 = 0$

28 $z^2 - \sqrt{3}z + 31 = 0$

29 $(z-2)^2 = (3+iz)^2$

30 $z^2 = 3\,\mathrm{i}\,z$

31 $z^2 - 3z + 18 = 0$

32 $-z^2+(1+\sqrt{3})z-\sqrt{3} = 0$

33 $(z^2+z-3)^2+(z^2-z+1)^2 = 0$

Exercice 6 : Pour θ nombre réel dans $[0\,;\pi]$, on considère l'équation :

$$z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0.$$

1 Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles l'équation admet une solution réelle.

2 Dans les autres cas, exprimer les solutions complexes en fonction de θ.

Exercice 7 : Soit l'équation dans $\mathbb{C}$:

$$z^3 - (4+\mathrm{i})z^2 + (13+4\,\mathrm{i})z - 13\,\mathrm{i} = 0. \tag{VII.1}$$

1 Montrer que i est solution de l'équation.

2 Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$z^3 - (4+\mathrm{i})z^2 + (13+4\,\mathrm{i})z - 13i = (z-\mathrm{i})(az^2+bz+c).$$

3 Résoudre alors l'équation (VII.1).

Exercice 8 :

1 Soient $a, b \in \mathbb{C}$.

Montrer que $|a-b| = |1-\overline{a}b| \iff |a| = 1$ ou $|b| = 1$.

Aide : On pourra développer intelligemment $\left(|a|^2-1)(|b|^2-1\right)$.

2 Montrer que pour $u, v \in \mathbb{C}$, on a $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2+|v|^2)$.

Cette relation est appelée *égalité du parallélogramme*. Pourquoi ?

Correction :

2 Soient $u, v \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
|u+v|^2 + |u-v|^2 &= (u+v)\left(\overline{u+v}\right) + (u-v)\left(\overline{u-v}\right)\\
&= (u+v)\left(\overline{u}+\overline{v}\right) + (u-v)\left(\overline{u}-\overline{v}\right)\\
&= [u\overline{u}+u\overline{v}+v\overline{u}+v\overline{v}] + [u\overline{u}-u\overline{v}-v\overline{u}+v\overline{v}]\\
&= 2\left(u\overline{u}+v\overline{v}\right)\\
&= 2(|u|^2+|v|^2)
\end{aligned}$$

Donc, $\quad |u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2+|v|^2)$

Dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.

Exercice 9 : Soit $f : x \longmapsto (1+\mathrm{i}x)^2$.

Définir les fonctions $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$, $\overline{f}$ et $|f|$.

Exercice 10 : Déterminer z pour que z, $z-1$ et $\dfrac{1}{z}$ aient le même module.

Exercice 11 : Démontrer que, $\forall\, z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{U}$, $\left|\dfrac{1-z^n}{1-z}\right| \leqslant \dfrac{1-|z|^n}{1-|z|}$.

Correction : Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$.

$$\begin{aligned}\left|\frac{1-z^n}{1-z}\right| &= |1+z+z^2+\dots+z^{n-1}| \\ &\leqslant |1|+|z|+|z^2|+\dots+|z^{n-1}|, \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\ &\leqslant 1+|z|+|z|^2+\dots+|z|^{n-1} \\ &\leqslant \frac{1-|z|^n}{1-|z|} \quad \text{car } |z|\neq 1\end{aligned}$$

Donc, $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{U}$, $\left|\dfrac{1-z^n}{1-z}\right| \leqslant \dfrac{1-|z|^n}{1-|z|}$

Exercice 12 : Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi) \qquad z_3 = \frac{2}{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$z_2 = 3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) \qquad z_4 = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$

$z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}+1$

$z_2 = 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

$z_3 = 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

$z_4 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$

$z_5 = 2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi}$

$z_6 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

$z_7 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$

$z_8 = 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}(1+4k)}$, $k\in\mathbb{Z}$

$z_9 = 5e^{-i\pi}$

$z_{10} = \left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^5$

$z_{11} = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$

$z_{12} = \dfrac{1+ib}{2b+(b^2-1)\,i}$ où $(b\in\mathbb{R})$.

Exercice 13 : Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

$z_1 = -2+2\,\mathrm{i}$

$z_2 = 1+\mathrm{i}$

$z_3 = -3-3\,\mathrm{i}$

$z_4 = \sqrt{3}+\mathrm{i}$

$z_5 = 3\,\mathrm{i}$

$z_6 = 3$

$z_7 = -\mathrm{i}$

$z_8 = 2+2\,\mathrm{i}\sqrt{3}$

$z_9 = 3-3\,\mathrm{i}$

$z_{10} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{i}}{2}$

$z_{11} = -\sqrt{6}+\mathrm{i}\sqrt{2}$

$z_{12} = -7$

$z_{13} = \dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{3}$

$z_{14} = \mathrm{i}\sqrt{2}$

$z_{15} = 1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

$z_{16} = -4+3\,\mathrm{i}$

$z_{17} = -257$

$z_{18} = 2\,\mathrm{i}$

$z_{19} = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{3}$

$z_{20} = \sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{6}$

$z_{21} = \mathrm{i}\sqrt{3}+1$

$z_{22} = -9\,\mathrm{i}$

$z_{23} = -2+2\,\mathrm{i}\sqrt{3}$

$z_{24} = \dfrac{1}{3}-\dfrac{\mathrm{i}}{3}$

$z_{25} = 5\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

$z_{26} = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\times 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

$z_{27} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\times(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi})$

$z_{28} = \dfrac{8\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$

$z_{29} = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}$

$z_{30} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$

$z_{31} = \dfrac{8\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}\times\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$

$z_{32} = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}{2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\times 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$

$z_{33} = \dfrac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^2}{(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi})^2}$

$z_{34} = \mathrm{i}\,(1+\mathrm{i})$

$z_{35} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$

$z_{36} = \dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$

$z_{37} = \left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^3$

$z_{38} = (1+\mathrm{i}\sqrt{3})^3$

$z_{39} = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$

$z_{40} = \dfrac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}$

Exercice 14 : Simplifier $\dfrac{e^{\mathrm{i}\theta}-1}{e^{\mathrm{i}\theta}+1}$ pour $\theta\in\,]-\pi\,;\pi[$.

Exercice 15 : Trouver la forme trigonométrique des complexes suivants :

$z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$

$z_2 = (1+i\sqrt{3})^6$

$z_3 = \dfrac{1+i\tan\varphi}{1-i\tan\varphi}$, où $\varphi\in\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

$z_4 = \left(\dfrac{1+\sqrt{2}+i}{1-\sqrt{2}-i}\right)^n$

$z_5 = 1+\cos(\alpha)+\mathrm{i}\sin(\alpha)$

$z_6 = (1+\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)^n$

Correction :

$z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

$z_2 = (1+i\sqrt{3})^6 = \left(2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^6 = 2^6$.

$z_3 = \dfrac{1+i\tan\varphi}{1-i\tan\varphi} = \dfrac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi} = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\varphi}$.

$$z_4 = \left(\frac{1+\sqrt{2}+i}{1-\sqrt{2}-i}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)}\right)^n = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}+1}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}-1}\right)^n = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\,\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{-2\,\mathrm{i}\,\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}\right)^n$$

$$= \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\,\frac{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}\right)^n = \underbrace{\tan^n\left(\frac{\pi}{8}\right)}_{\geqslant 0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3n\pi}{4}}.$$

$$z_5 = 1+\cos(\alpha)+\mathrm{i}\,\sin(\alpha) = 1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha} = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}} = \begin{cases} 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}} & \text{si } \alpha \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} [(4k-1)\pi\,;(4k+1)\pi] \\ 2\left|\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\alpha}{2}+\pi\right)} & \text{si } \alpha \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} [(4k+1)\pi\,;(4k+3)\pi] \end{cases}.$$

$$z_6 = (1+\cos\theta - \mathrm{i}\,\sin\theta)^n = \begin{cases} 2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\theta}{2}} & \text{si } \theta \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} [(4k-1)\pi\,;(4k+1)\pi] \\ 2^n\left|\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{n\theta}{2}+\pi\right)} & \text{si } \theta \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} [(4k+1)\pi\,;(4k+3)\pi] \end{cases}$$

Exercice 16 : Déterminer le module et l'argument de $z = \dfrac{1}{1+i\tan a}$ avec $a \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Quel est l'ensemble des points d'affixe z quand a décrit $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$?

En déduire une construction simple du point A d'affixe $\dfrac{1}{1+\mathrm{i}\,\tan\frac{7\pi}{8}}$.

Exercice 17 : Déterminer la dérivée n-ième des fonctions suivantes :

1. $x \longmapsto e^x\cos(x)$
2. $x \longmapsto e^{-x}\sin(x)$
3. $x \longmapsto \mathrm{e}^x\,\sin\left(\sqrt{3}x\right)$

Correction :

3. $f = \mathrm{Im}\,(g)$ où $g(x) = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{3}x} = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})x}$ avec $g^{(n)}(x) = (1+\mathrm{i}\sqrt{3})^n g(x) = 2^n\,\mathrm{e}^{\frac{n\,\mathrm{i}\,\pi}{3}}g(x)$.

   Donc $f^{(n)}(x) = 2^n\,\mathrm{e}^x\,\sin\left(n\dfrac{\pi}{3}+\sqrt{3}x\right)$.

Exercice 18 : En utilisant les formules d'Euler, établir les identités suivantes :

1. $\cos^2(\theta) = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$
2. $\sin^2(\theta) = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$
3. $\sin^2(\theta)\cos^2(\theta) = \dfrac{1-\cos 4\theta}{8}$
4. $\cos^3(\theta) = \dfrac{3\cos(\theta)+\cos 3\theta}{4}$

Exercice 19 : À l'aide des formules de Moivre :

1. Linéariser $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$.
2. En déduire une expression de $\tan(3\theta)$.
3. Linéariser $\cos^3(2\theta)\sin^4(\theta)$.

Exercice 20 :

1. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$ est $\dfrac{2\pi}{3}$-périodique.
2. Trouver une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto \cos^3 x$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}\sin(x)$.

3 Calculer l'aire, exprimée en unité d'aire, de la surface délimitée par l'axe des abscisses, la courbe représentant la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\cos(3x)$, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{6}$.

Exercice 21 :

1 Linéariser $\sin^6(x)$. En déduire $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^6(x)\,\mathrm{d}x$.

2 Proposer une méthode plus efficace pour le calcul de $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^5(x)\,\mathrm{d}x$.

Aide : Poser $u = \cos(x)$

Exercice 22 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi\,;\pi]$:

1 $\cos(2x) + \sin(2x) = 0$

2 $\cos(2x) - 2\cos(x) = -\dfrac{3}{2}$

3 $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) - \sqrt{2} = 0$

4 $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) - \sqrt{2} \leqslant 0$

5 $2\sin^2(x) + 3\sin(x) - 2 \leqslant 0$

6 $\cos\left(\dfrac{x}{4}\right) = \sin\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right)$

Exercice 23 : On se propose dans cet exercice de calculer la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

1 Démontrer que pour tout nombre complexe $z \neq 1$:

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{1 - z^5}{1 - z}.$$

2 En utilisant la valeur $z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{5}}$ dans la formule précédente, démontrer que :

$$\left(z_0^2 + \frac{1}{z_0^2}\right) + \left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right) + 1 = 0.$$

3 Démontrer que $\left(z_0^2 + \dfrac{1}{z_0^2}\right) = \left(z_0 + \dfrac{1}{z_0}\right)^2 - 2$ et que $\left(z_0 + \dfrac{1}{z_0}\right) = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

4 En déduire que $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ est solution d'une équation du second degré que l'on précisera, puis calculer la valeur exacte cherchée.

Exercice 24 : Calculer les sommes suivantes :

1 $\mathrm{A}_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$.

2 $\mathrm{B}_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

3 $\mathrm{C}_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k x}$.

Correction : Pour θ non congru à 0 modulo 2π, on a :

$$\mathrm{A}_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left((n+1)\dfrac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$$

et

$$\mathrm{B}_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left((n+1)\dfrac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$$

Exercice 25 : Montrer que $\cos\dfrac{\pi}{11} + \cos\dfrac{3\pi}{11} + \cos\dfrac{5\pi}{11} + \cos\dfrac{7\pi}{11} + \cos\dfrac{9\pi}{11} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 26 :

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3^n}\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right)$.

2. En déduire $\displaystyle \mathrm{D}_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(kx)$.

Correction : L'idée est de se ramener à un binôme de Newton.

On le cherche sous la forme $\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^n$ ou plutôt, pour reprendre des méthodes sur les complexes efficaces, sous la forme $\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^n$.

Or, $\displaystyle\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{ik\frac{\pi}{3}}$.

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)=\mathrm{Re}\left(\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^n\right)$.

Il ne reste plus qu'à trouver la partie réelle de $\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^n$ directement.

On sait que $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\times 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

D'où, $\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^n=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\times\sqrt{3}\right)^n=\mathrm{e}^{n\,\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\times\left(\sqrt{3}\right)^n$.

En conclusion, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)=\mathrm{Re}\left(\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^n\right)=\sqrt{3^n}\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{n\,\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)=\sqrt{3^n}\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right)$.

Exercice 27 :

1. Calculer de deux manières $(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n$.

2. En déduire $\displaystyle\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\ldots$ et $\displaystyle\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\ldots$

Correction :

1. D'une part,

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n&=\left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^n+\left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^n=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}}\right)\\&=\left(\sqrt{2}\right)^{n+2}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

D'autre part, avec le binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{i}^k+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-\mathrm{i})^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+(-1)^k\right)\mathrm{i}^k\\&=2\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}\mathrm{i}^{2k}=2\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}(-1)^k.\end{aligned}$$

2. En identifiant, on obtient :

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots+(-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}(-1)^k=\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Pour calculer la deuxième somme, il nous faudra calculer $(1+\mathrm{i})^n - (1-\mathrm{i})^n$ de deux manières. Le raisonnement est identique et l'on trouve :

$$(1+\mathrm{i})^n - (1-\mathrm{i})^n = \mathrm{i}\left(\sqrt{2}\right)^{n+2} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Puis,

$$(1+\mathrm{i})^n - (1-\mathrm{i})^n = 2\,\mathrm{i} \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2k+1} (-1)^k.$$

Enfin,

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots + (-1)^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2k+1} (-1)^k = \left(\sqrt{2}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$