IX

Primitives et calculs d'intégrales

Un jour un cosinus va dans un bar où il n'y a que des sinus. Il reste tout seul dans son coin, à l'extrémité du comptoir.

Un sinus s'approche de lui et lui demande pourquoi il reste dans sa solitude. Le cosinus répond :

— *« Ben, je suis le seul cosinus dans un bar de sinus ! »*

Et le sinus de répondre :

— *« Eh bien, intègre-toi ! »*

Dès l'aube du calcul différentiel et la formalisation de la dérivée d'une fonction f, les mathématiciens se sont naturellement posé la question de l'existence d'une fonction F dont f serait la dérivée. La notion de *primitive* était née.

La « primitivisation » apparaît alors comme l'opération « réciproque » de la dérivation. Ce nouvel outils va, en fait, devenir incontournable pour calculer des aires un peu moins triviales que celle d'un rectangle : l'aire délimitée par une portion de courbe par exemple.

Difficile a priori, ce problème trouve une solution élégante et triviale lorsque le lien avec les primitives est prouvé.

Comme demandé par le programme de PTSI, le point de vue adopté dans ce chapitre est exclusivement pratique. On y apprend essentiellement à faire du calcul exact de primitives et d'intégrales. La notion d'intégrale sera définie proprement en fin d'année et nous démontrerons alors tous les théorèmes énoncés dans les pages qui suivent.

Contenu

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ est l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I et J sont des intervalles.

I Primitives

I.1 Primitives d'une fonction de la variable réelle

Définition 1 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{K}$ une fonction.

On dit que $\mathrm{F} : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{K}$ est une *primitive de f sur* I, notée $\displaystyle\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$, si F est dérivable sur I et de dérivée égale à f :

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{F}'(x) = f(x).$$

Notations : Le symbole $\displaystyle\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$, introduit par Leibniz [1], désigne une primitive quelconque de f. Elle est définie à une constante additive près.

On ne parle donc pas de LA primitive, mais DES primitives de f.

Exemples 1 :

- $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto x+2$ sont des primitives de $x \longmapsto 1$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction F définie par $\mathrm{F}(x) = \ln(x)$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $\mathrm{F}'(x) = \dfrac{1}{x}$.

  Donc F est une primitive de $\dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.
- Une primitive de $x \longmapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \longmapsto \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ si $\alpha \neq -1$, $x \longmapsto \ln(x)$ si $\alpha = -1$.
- Une primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^{\omega x}$ est $x \longmapsto \dfrac{1}{\omega}\mathrm{e}^{\omega x}$ pour $\omega \in \mathbb{C}^*$.
- La fonction S définie par $\mathrm{S}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et $\mathrm{S}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

[1]. **Gottfried Wilhelm Leibniz**, né à Leipzig le 1er juillet 1646 et mort à Hanovre le 14 novembre 1716, est un philosophe, scientifique, mathématicien, logicien, diplomate, juriste, bibliothécaire et philologue allemand.

Esprit polymathe [2], personnalité importante de la période Frühaufklärung, il occupe une place primordiale dans l'histoire de la philosophie et l'histoire des sciences (notamment des mathématiques) et est souvent considéré comme le dernier « génie universel ».

En philosophie, Leibniz est, avec **René Descartes** et **Baruch Spinoza**, l'un des principaux représentants du rationalisme. Au principe de non-contradiction, il ajoute trois autres principes à la base de ses réflexions : le principe de raison suffisante, le principe d'identité des indiscernables et le principe de continuité.

Concevant les pensées comme des combinaisons de concepts de base, il théorise la caractéristique universelle, une langue hypothétique qui permettrait d'exprimer la totalité des pensées humaines, et qui pourrait résoudre des problèmes par le calcul grâce au *calculus ratiocinator*, anticipant l'informatique de plus de trois siècles.

En métaphysique, il invente le concept de monade. Enfin, en théologie, il établit deux preuves de l'existence de Dieu, appelées preuves ontologique et cosmologique. Au contraire de Spinoza, qui pensait Dieu immanent, Leibniz le conçoit transcendant, à la manière traditionnelle des religions monothéistes. Pour concilier l'omniscience, l'omnipotence et la bienveillance de Dieu avec l'existence du mal, il invente, dans le cadre de la théodicée, terme qu'on lui doit, le concept de meilleur des mondes possibles, qui sera raillé par Voltaire dans le conte philosophique Candide. Il aura une influence majeure sur la logique moderne développée à partir du XIXème siècle ainsi que sur la philosophie analytique au XXèmesiècle.

En mathématiques, la contribution principale de Leibniz est l'invention du *calcul infinitésimal* (calcul différentiel et calcul intégral). Si la paternité de cette découverte a longtemps fait l'objet d'une controverse l'opposant à **Isaac Newton**, les historiens des mathématiques s'accordent aujourd'hui pour dire que les deux mathématiciens l'ont développé plus ou moins indépendamment.

Il travaille également sur le système binaire comme remplaçant du système décimal, s'inspirant de vieux travaux chinois. Par ailleurs, il introduit la notation qui porte son nom et travaille également sur la *topologie*.

Écrivant en permanence, principalement en latin, français et allemand, il lègue un immense patrimoine littéraire, *Nachlass* en allemand, conservé à la bibliothèque de Hanovre. Il est composé d'environ 50 000 documents dont 15 000 lettres avec plus de mille correspondants différents, et n'est toujours pas entièrement publié.

[2]. La polymathie est la connaissance approfondie d'un grand nombre de sujets différents, en particulier dans le domaine des arts et des sciences. Le substantif associé est polymathe, parfois également nommé « personne d'esprit universel ».

Donc S est une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ sur $]1\,;+\infty[$.

ATTENTION Il existe des fonctions n'admettant pas de primitives comme $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$.

Exercice 1 : Montrer qu'une primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$ est $\mathrm{F} : x \longmapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Proposition 1 (Unicité et linéarité) : Soit $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{K}$ une fonction.

- Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f sur I, alors elles sont égales sur I à une constante près :
$$\exists c \in \mathbb{K}, \quad \forall\, x \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{F}_1(x) = \mathrm{F}_2(x) + c.$$
- Si f admet une primitive F sur I, alors elle en admet une infinité. En notant $\mathscr{P}_f$ l'ensemble de ses primitives sur I, on a :
$$\mathscr{P}_f = \{\mathrm{F} + c \,/\, c \in \mathbb{K}\}.$$
- Soient $a \in \mathrm{I}$ et $b \in \mathbb{K}$.

  Si f admet une primitive F sur I, alors il existe une unique primitive de f sur I qui prend la valeur b en a.

Preuve : Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f sur I alors :
$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ (\mathrm{F}_1 - \mathrm{F}_2)'(x) = \mathrm{F}_1'(x) - \mathrm{F}_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$
Donc la fonction $\mathrm{F}_1 - \mathrm{F}_2$ est constante sur I.

Remarques :

— Autrement dit, les primitives de f sur I sont exactement toutes les fonctions de la forme $\mathrm{F} + c$ où $c \in \mathbb{K}$ est une constante dite de « primitivation ».

— La courbe d'une primitive s'obtient donc par translation selon l'axe des ordonnées de celle de n'importe quelle autre primitive.

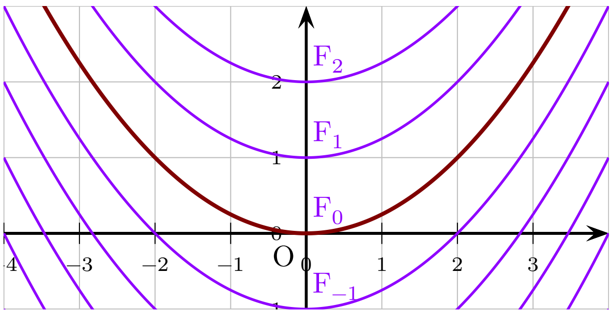


Figure IX.1 – Primitives de $x \longmapsto \dfrac{x}{2}$.

— Sans condition de valeur en un point, on ne peut donc pas parler de la primitive de f, mais d'UNE primitive de f. En revanche, on peut parler de LA primitive de f prenant une valeur donnée en un point donné.

— En notant F une primitive de f sur I, la fonction $\mathrm{F}_b : x \longmapsto \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a) + b$ est l'unique primitive de f sur I telle que $\mathrm{F}_b(a) = b$. Les physiciens parlent de *conditions initiales.*

Exemples 2 :

- Les primitives de $x \longmapsto x^2$ sont les fonctions de la forme $x \longmapsto \dfrac{1}{3}x^3 + Cte$.
- La fonction ln est l'unique primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1.

Proposition 2 (Linéarité) : Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{K}$, $g : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{K}$ deux fonctions et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si F et G sont respectivement des primitives de f et g sur I alors $\lambda\mathrm{F} + \mathrm{G}$ est une primitive de $\lambda f + g$ sur I.

On dit que la primitivation est une opération *linéaire* ou encore *compatible* avec les combinaisons linéaires.

ATTENTION Pas plus que pour la dérivée, sauf cas particuliers, une primitive d'un produit (resp. inverse, quotient, puissance, composée) de fonctions ne s'obtient pas par produit (resp. inverse, quotient, puissance, composée) de primitives.

Exemples 3 :

- $f : x \longmapsto 3x^2 + \cos(7x)$ est du type $u' + v'$ de primitive $u + v$.

  Donc, $x \longmapsto x^3 + \dfrac{1}{7}\sin(7x)$ est une primitive de f sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.
- **Cas des fonctions polynomiales :**

$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \text{ admet pour primitive } x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

Corollaire 2.1 (Fonction de la variable réelle à valeurs complexes) : Soit $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes.

$$f \text{ admet une primitive sur I si, et seulement si } \mathrm{Re}\,(f) \text{ et } \mathrm{Im}\,(f) \text{ aussi sur I.}$$

Dans ce cas, si $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2 : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ sont à valeurs réelles, alors $\mathrm{F}_1 + \mathrm{i}\,\mathrm{F}_2$ est une primitive de f si, et seulement si F_1 et F_2 sont, respectivement, des primitives de $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$.

Autrement dit, sur I :

$$\mathrm{Re}\left(\int^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int^x \mathrm{Re}\left(f(t)\right)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\left(\int^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int^x \mathrm{Im}\left(f(t)\right)\mathrm{d}t.$$

Exemple 4 : Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto 1 + \mathrm{i}\,x$ est $x \longmapsto x + \mathrm{i}\,\dfrac{x^2}{2}$.

Exercice 2 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x}$
2. $x \longmapsto x^2 + \mathrm{i}\,\cos(x)$.

I.2 Primitives des fonctions de référence

La lecture du tableau des primitive se fait en lisant celui des dérivées « à l'envers ».
Les fonctions f suivantes sont définies, dérivables sur l'intervalle I, n est un entier relatif non nul différent de -1. On note F une primitive de f sur I.

— Polynômes et fractions rationnelles :

$f(x)$	$\mathrm{F}(x)$	I
$x^n\ (n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{1}{n+1}\,x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$\dfrac{1}{x^n}\ (n \in \mathbb{N}\setminus\{1\})$	$-\dfrac{1}{n-1}\times\dfrac{1}{x^{n-1}}$	

Exemples 5 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x-\alpha}$: Sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas α, on a :

$$\int^x \frac{1}{t-\alpha}\,\mathrm{d}t = \ln\lvert x-\alpha\rvert = \begin{cases} \ln(x-\alpha) & \text{sur tout intervalle contenu dans }]\alpha\,;+\infty[\\ \ln(\alpha-x) & \text{sur tout intervalle contenu dans }]-\infty\,;\alpha[\,. \end{cases}.$$

ATTENTION $\displaystyle\int^x \frac{1}{t-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}t = \int^x \frac{t+\mathrm{i}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\lvert x^2+1\rvert + \mathrm{i}\arctan(x).$

Primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-\alpha)^k}$, $k>1$: Sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas α, on a :

$$\int^x \frac{1}{(t-\alpha)^k}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{k-1}\,\frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}}.$$

Remarque : Pour les polynômes x^n ou les fraction rationnelles $\dfrac{1}{x^n}$, une seule formule suffit à condition que $n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$:

$f(x)$	$\mathrm{F}(x)$	I
x^n	$\dfrac{1}{n+1}\,x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$
		$\mathbb{R}^*$ si $n \leqslant -2$

Exemple 6 : Une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^8} = x^{-8}$ est $\mathrm{F}(x) = -\dfrac{1}{7x^7}$.

— Fonctions usuelles :

$f(x)$	$\mathrm{F}(x)$	I
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
e^x	e^x [3]	$\mathbb{R}$
$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$a^x,\ a \in \mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$	$\dfrac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$x\ln(x)-x$	$\mathbb{R}_+^*$

— Fonctions circulaires :

$f(x)$	$\mathrm{F}(x)$	I
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	
$\cos(ax+b)$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$	
$1+\tan^2(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan(x)$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[\ (k\in\mathbb{Z})$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$]-1\,;1[$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$]-a\,;a[$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$\dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$	

— Fonctions hyperboliques :

$f(x)$	$\mathrm{F}(x)$	I
$\mathrm{sh}\,(x)$	$\mathrm{ch}\,(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}\,(x)$	$\mathrm{sh}\,(x)$	
$\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$	$\dfrac{\mathrm{sh}\,(x)}{\mathrm{ch}\,(x)}$	
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$	
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$	$]1\,;+\infty[$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$	$]-1\,;1[$
$\dfrac{1}{a^2-x^2}$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left(\dfrac{a+x}{a-x}\right)$	$]-a\,;a[$

[3]. Bouhouhou !

Remarques :

— Ces tableaux ne donnent qu'UNE primitive de la fonction f. Pour obtenir toutes les primitives de f, il suffit de rajouter une constante c à F.

— Il est tout à fait hors-programme de vous dire que les fonctions définies par $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $\dfrac{1}{1-x^2}$ sont, respectivement, les dérivées des fonctions réciproques de sh, ch et th notées argsh, argch et argth. C'est dommage ! Cela aurait mis un peu plus d'homogénéité dans les formules de primitives.

Méthode 1 (Trouver une primitive) :
D'une manière générale, pour trouver une primitive F *d'une fonction f, on revisite son tableau des fonctions dérivées à l'envers et on conjecture la forme de la fonction* F *puis on complète avec des coefficients multiplicateurs afin de simplifier ceux qui apparaîtraient en dérivant la fonction* F.

Proposition 3 : Soient $u : \mathrm{I} \longmapsto \mathrm{J}$ et $\mathrm{F} : \mathrm{J} \longmapsto \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables.

$$\mathrm{F} \circ u \text{ est une primitive de } u' \times (\mathrm{F}' \circ u) \text{ sur I.}$$

Corollaire 3.1 : Pour a, b deux réels avec $a \neq 0$ tels que $ax+b \in \mathrm{J}$ pour tout $x \in \mathrm{I}$, si F est primitive de f sur J, alors $x \longmapsto \dfrac{1}{a}\mathrm{F}(ax+b)$ est une primitive de $x \longmapsto f(ax+b)$ sur I.

Exemples 7 :

- Une primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax+b}$ est $x \longmapsto \dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{ax+b}$ sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.
- Une primitive de $x \longmapsto \sin(ax+b)$ est $x \longmapsto -\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)$ sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.
- Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{ax+b}$ est $x \longmapsto \dfrac{1}{a}\ln|ax+b|$ sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$.

À condition de reconnaître l'expression de u' en facteur, on pourra alors espérer retrouver des primitives de fonctions composées $u' \times f(u)$ que l'on écrira $\mathrm{F}(u)$ où F est une primitive de f sur un intervalle adéquat I.

La proposition (3) avec F fonction usuelle et $u : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ dérivable, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ s'écrit :

Fonction	Une primitive sur I	Condition
$u'u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	si $n<0$: $\forall\, x \in \mathrm{I},\ u(x) \neq 0$
$u'u^\alpha$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\forall\, x \in \mathrm{I},\ u(x) > 0$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$\forall\, x \in \mathrm{I},\ u(x) > 0$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$	$\forall\, x \in \mathrm{I},\ u(x) \neq 0$
$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin(u)$	$\forall\, x \in \mathrm{I} \quad u(x) \in]-1\,;1[$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$	$\ln\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)$	$\forall\, x \in \mathrm{I} \quad u(x) \in]1\,;+\infty[$
$\dfrac{u'}{1-u^2}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+u}{1-u}\right)$	$\forall\, x \in \mathrm{I} \quad u(x) \in]-1\,;1[$

Fonction	Une primitive sur I	Condition
$u'\,\mathrm{e}^u$	e^u	
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$	
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$	
$\dfrac{u'}{u^2+1}$	$\arctan(u)$	
$\dfrac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$	$\ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)$	

Exemples 8 :

- $x \longmapsto 2x(x^2-1)^5$ est du type $u'u^5$ de primitive $\dfrac{u^6}{6}$.

  Donc, $f : x \longmapsto \dfrac{(x^2-1)^6}{6}$ est une primitive de f sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.
- $f : x \longmapsto -3\,\mathrm{e}^{-3x-1}$ est du type $u'\,\mathrm{e}^u$ de primitive e^u.

  Donc, $x \longmapsto \mathrm{e}^{-3x-1}$ est une primitive de f sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.
- $f : x \longmapsto \dfrac{2x-1}{x^2-x-2}$ est du type $\dfrac{u'}{u}$ de primitive $\ln|u|$.

  Donc, $x \longmapsto \ln|x^2-x-2|$ est une primitive de f sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\,;2\}$.
- $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{3x+4}}$ est du type $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ de primitive $2\sqrt{u}$.

  Donc, $x \longmapsto \dfrac{2}{3}\sqrt{3x+4}$ est une primitive de f sur tout intervalle inclus dans $\left]-\dfrac{4}{3}\,;+\infty\right[$.

ATTENTION

- Trouver une primitive, je le redis, n'est pas toujours chose facile [4]. Remarquez bien que les tableaux et les exemples précédents réclament, exigent de reconnaître u' en facteur.

  On ne sait pas primitiver directement $u^n, u^\alpha, \cos(u)$, e^u !
- Des manipulations plus sophistiquées (par exemple pour les fonctions rationnelles ou les fonctions possédant des radicaux) sont parfois nécessaires pour déterminer une primitive (*cf.* le paragraphe (V)).
- Pire, parfois la primitive ne correspond à aucune fonction connue. Elle est alors uniquement définie par une intégrale [5].
- Contrairement à la dérivation qui est toujours techniquement possible, la recherche de primitives s'avère donc parfois impossible !...

Exercice 3 : Déterminer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int^x \mathrm{e}^{4t+3}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int^x \cos\left(3t+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int^x (3t-1)\left(3t^2-2t+3\right)^3\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int^x \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ sur $]1\,;+\infty[$
5. $\displaystyle\int^x \frac{\ln(t+3)}{t+3}\,\mathrm{d}t$ sur $]-3\,;+\infty[$
6. $\displaystyle\int^x \frac{\cos(t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$ sur $]0\,;\pi[$
7. $\displaystyle\int^x \frac{1}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ sur $]0\,;+\infty[$
8. $\displaystyle\int^x \frac{t+1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$
9. $\displaystyle\int^x \frac{1}{1+i+t}\,\mathrm{d}t$

II Intégrales

II.1 Notions d'intégrales

Le calcul d'intégrale répond à une question simple : comment définir une aire qui n'est pas celle d'une figure géométrique simple ?

Pour $a \leqslant b$ deux réels, la notion d'intégrale d'une fonction f continue sur un segment $[a\,;b]$ et à valeurs réelles a été introduite comme « aire algébrique » entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$: on compte l'aire positivement sur un intervalle où $f \geqslant 0$ et négativement sinon.

L'idée est de subdiviser $[a\,;b]$ suivant des bases de plus en plus fines

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

et de faire la somme des aires des rectangles obtenus avec des valeurs de f sur cette subdivision : c'est la méthode des rectangles qui conduit à l'approximation où $t_k \in [x_k\,;x_{k+1}]$:

$$\mathrm{R}_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(x_{k+1}-x_k\right) f\left(t_k\right).$$

On montre ensuite que, sous l'hypothèse f continue sur $[a\,;b]$, $(\mathrm{R}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge quand $n \to +\infty$ vers une limite indépendante de la subdivision $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ et les $t_k \in [x_k; x_{k+1}]$. C'est cette limite qu'on pose comme étant $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\mathrm{R}_n(f).$$

[5]. Par exemple, la primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

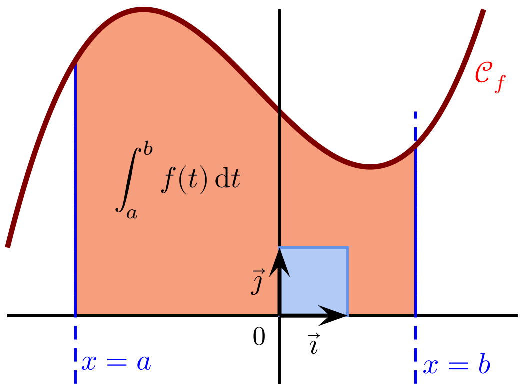


Figure IX.2 – $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ représente l'aire algébrique du domaine orangé en unité d'aire.

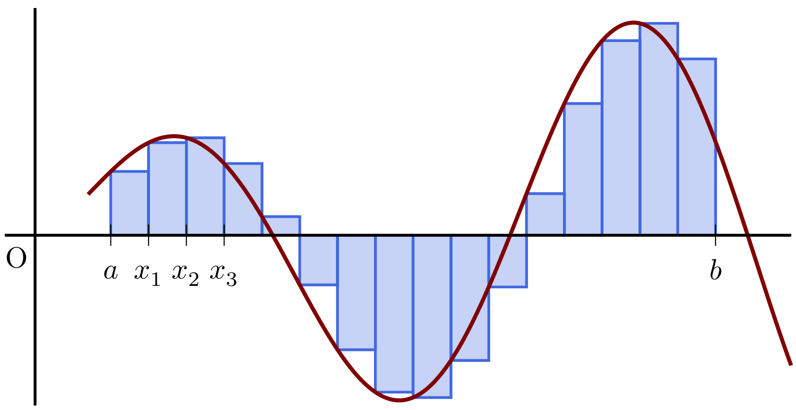


Figure IX.3 – Méthode des rectangles (à gauche).

En particulier, pour la subdivision régulière $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ et $t_k = x_k$ pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right). \qquad \text{(Méthode des rectangles à gauche)} \qquad \text{(IX.1)}$$

Exemples 9 : Soit f une fonction constante sur $[a\,;b]$ égale à $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors, $\dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda = \lambda(b-a)$.

Dans le cas ou $a \leqslant b$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$, on retrouve l'aire d'un rectangle de longueur $b-a$ et de largeur λ.

L'expression dans le second membre de (IX.1) porte le nom de *somme de Riemann* et permet, notamment, de prolonger la notion d'intégrale aux fonctions de la valeur réelle à valeurs complexes.

Définition 2 : Soient $f \in \mathscr{C}^o(\mathrm{I}\,;\mathbb{C})$ et a, $b \in \mathrm{I}$.

- si $a \leqslant b$, on définit $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}\,(f(t))\,\mathrm{d}t + \mathrm{i} \int_a^b \mathrm{Im}\,(f(t))\,\mathrm{d}t$.
- si $b \leqslant a$ on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

En particulier, cette définition entraîne :

$$\boxed{\forall\, a \in \mathrm{I},\ \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0.}$$

Vocabulaire :

— $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ se lit « somme de a à b de $f(t)\,\mathrm{d}t$ ».
— a et b s'appellent les *bornes d'intégration*.
— La fonction à intégrer s'appelle l'*intégrande*.
— Le t dans « $\mathrm{d}t$ » est la variable par rapport à laquelle on effectue les calculs. Elle est dite muette, d'autres lettres peuvent être utilisées :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z = \ldots$$

Théorème 4 : Soient $f,\, g \in \mathscr{C}^o(\mathrm{I}\,;\mathbb{C})$ et $a,\, b \in \mathrm{I}$.

Linéarité : $\forall\,\lambda \in \mathbb{C},\quad \displaystyle\int_a^b \Big(\lambda f(t) + g(t)\Big)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$

Relation de Chasles : $\forall\, c \in \mathrm{I},\quad \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t.$

Inégalité triangulaire : si $a \leqslant b$, $\quad\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$

À l'aide de la relation de Chasles, on démontre facilement que :

1. $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \implies \boxed{\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}.$

2. Soit $f \in \mathscr{C}^o(\mathrm{I}\,;\mathbb{C})$ et $a \in \mathrm{I}$.

$$\text{Si } \mathrm{F} : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ alors } \forall\, x, y \in \mathrm{I},\ \mathrm{F}(y) - \mathrm{F}(x) = \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(IX.3)}$$

$$= \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4 : À l'aide de l'inégalité triangulaire, pour tout x réel, montrer que $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

Correction : $\displaystyle |\sin(x)| = \left|\int_0^x \cos(t)\,\mathrm{d}t\right| \overset{\text{Parité}}{=} \left|\int_0^{|x|} \cos(t)\,\mathrm{d}t\right| \overset{|x|\geqslant 0}{\leqslant} \int_0^{|x|} |\cos(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{|x|} \mathrm{d}t = |x|.$

Les inégalités qui suivent n'ont donc de sens que pour des fonctions à valeurs **RÉELLES**.

Proposition 5 (Cas des fonctions à valeurs réelles) : Soient $f, g \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$ et $a,\, b \in \mathrm{I}$.

Positivité : Si $f \geqslant 0$ sur $[a\,;b]$ et $a \leqslant b$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$

Stricte positivité : Si $a < b$ et $f \geqslant 0$ sur $[a\,;b]$, alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \iff f = 0 \text{ sur } [a\,;b].$$

Si f est à valeurs strictement positives sauf éventuellement en un nombre fini de points et si $a < b$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$.

Croissance : Si $f(t) \leqslant g(t)$ pour tout $t \in [a\,;b]$ alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

En particulier, si $m \leqslant f(t) \leqslant \mathrm{M}$ pour tout $t \in [a\,;b]$ alors :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M}(b-a).$$

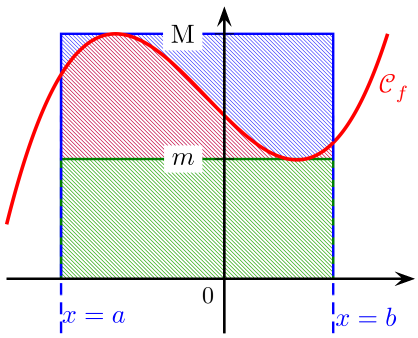


Figure IX.4 – D'un point de vue graphique, l'aire $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est encadrée par l'aire des deux rectangles inférieur et supérieur. L'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ ne peut donc faire n'importe quoi comme devenir infinie par exemple. Elle est bornée par le produit des extrema de la fonction par la longueur de l'intervalle.

Remarque : La croissance de l'intégrale est une simple conséquence de la positivité. Il suffit d'appliquer le premier résultat à la fonction positive $g - f$.

II.2 Lien avec les primitives

Ce qui suit montre le lien de réciprocité entre la dérivation et l'intégration de fonctions, et fournit un moyen effectif de calculer une intégrale à l'aide de primitives, et réciproquement.

Théorème 6 (Fondamental) : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction continue et $a, b \in \mathrm{I}$.

(i) $\mathrm{F}_a : \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longmapsto & \mathbb{C} \\ x & & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

(ii) Pour toute primitive F de f sur I : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$, noté $\Big[\mathrm{F}(t)\Big]_a^b$.

En particulier, la valeur de l'intégrale est indépendante du choix de F.

Preuve : Soit $f \in \mathscr{C}^0([a\,;b]\,;\mathbb{R})$.

(i) On ne va démontrer, pour l'instant, ce théorème que dans le cas où f est continue et monotone, par exemple, croissante sur I. Nous donnerons une démonstration complète au deuxième semestre.

Il est déjà clair que $\mathrm{F}_a(a) = \displaystyle\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Si elle existe, cette primitive sera donc unique.

Soit x_0 quelconque dans l'intervalle I.

Montrons tout d'abord que F_a est continue en x_0.

Considérons alors $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x_0 + h \in \mathrm{I}$.

$$|\mathrm{F}_a(x_0+h) - \mathrm{F}_a(x_0)| = \left|\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Comme f est croissante sur $[x_0\,;x_0+h]$ ou $[x_0+h\,;x_0]$ suivant le signe de h,

$|f(t)| \leqslant \mathrm{M}_{x_0} = \max\left(|f(x_0)|\,;|f(x_0+h)|\right)$.

D'où,

$$= \mathrm{M}_{x_0}\int_{x_0}^{x_0+h} \mathrm{d}t = \mathrm{M}_{x_0} \times h \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

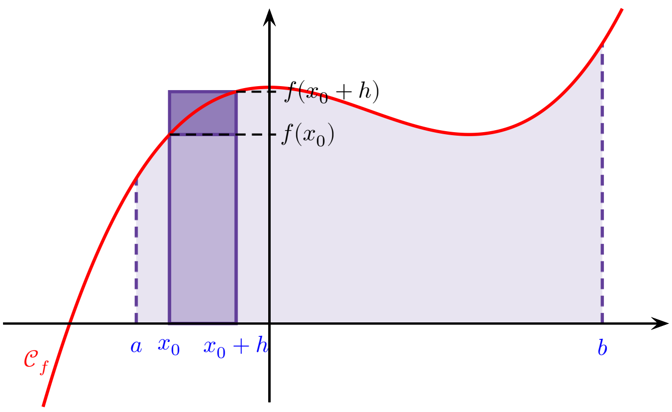
Donc, $\displaystyle\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$ i.e. f est continue en $x_0 \in \mathrm{I}$ quelconque i.e. $f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I})$.

Montrons alors que F_a est dérivable en x_0 de dérivée $f(x_0)$.

Cas $h > 0$: D'après la relation de Chasles,

$$\mathrm{F}_a(x_0+h) - \mathrm{F}_a(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0+h}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or, la fonction f étant croissante sur I, elle l'est en particulier sur $[x_0\,;x_0+h]$. Pour tout t compris entre x_0 et x_0+h on a donc :



$$f(x_0) \leqslant f(t) \leqslant f(x_0+h).$$

Comme la fonction f est continue sur $[x_0\,;x_0+h]$, on peut intégrer sur celui-ci et, par croissance de l'intégrale, on a :

$$h \times f(x_0) \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant h \times f(x_0+h)$$
$$hf(x_0) \leqslant \mathrm{F}_a(x_0+h) - \mathrm{F}_a(x_0) \leqslant hf(x_0+h)$$

En divisant l'inégalité par $h>0$, on obtient alors un encadrement du taux de variation de F_a en x_0 :

$$f(x_0) \leqslant \frac{\mathrm{F}_a(x_0+h) - \mathrm{F}_a(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$$

Comme f est continue en x_0, alors $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$.

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\mathrm{F}_a(x_0+h) - \mathrm{F}_a(x_0)}{h} = f(x_0).$$

Cas $h<0$: Le même raisonnement conduit successivement à :

$$h \times f(x_0+h) \leqslant \mathrm{F}_a(x_0+h) - \mathrm{F}_a(x_0) \leqslant h \times f(x_0).$$

Puis, $f(x_0+h) \geqslant \dfrac{\mathrm{F}_a(x_0+h) - \mathrm{F}_a(x_0)}{h} \geqslant f(x_0)$ $\qquad$ ($h<0\,!$).

Et enfin, $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{\mathrm{F}_a(x_0+h) - \mathrm{F}_a(x_0)}{h} = f(x_0)$.

Conclusion : $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\mathrm{F}_a(x_0+h) - \mathrm{F}_a(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{\mathrm{F}_a(x_0+h) - \mathrm{F}_a(x_0)}{h} = f(x_0)$.

La fonction F_a est donc dérivable en tout x_0 de I et $\mathrm{F}_a'(x_0) = f(x_0)$. La fonction F est donc dérivable sur I et telle que $\mathrm{F}' = f$: c'est une primitive de f sur I.

Comme $\mathrm{F}_a(a) = 0$, c'est bien l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Remarque : On vient de définir une primitive de f sur I à partir de son intégrale.

(ii) Soit F est une primitive de f sur I. on sait que les primitives d'une même fonction sur le même intervalle diffèrent d'une constante i.e.

$$\exists\, c \in \mathbb{R} \;/\; \forall\, x \in \mathrm{I},\; \mathrm{F}_a(x) = \mathrm{F}(x) + c.$$

Or, $\mathrm{F}_a(a) = 0$.

D'où $c = -\mathrm{F}(a)$ i.e. $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a)$.

Pour $x=b$, on obtient bien $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$ que l'on note :

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \Big[\mathrm{F}(t)\Big]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).}$$

Remarque : Réciproquement, à partir d'une primitive de f sur I, on peut définir son intégrale. C'est là toute la force de ce théorème de lier deux notions apparemment très différentes : primitivation et intégration.

ATTENTION

Quand on calcule une primitive $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ d'une fonction continue f, le choix du réel a importe peu car deux choix différents conduisent au même résultat à une constante additive près. On omet ainsi souvent la borne inférieure de l'intégrale quand on calcule une primitive.

La notation des intégrales sans borne inférieure nous permet de faire du calcul À CONSTANTE ADDITIVE PRÈS. Le symbole d'égalité $=$ qui y figure n'est pas un vrai symbole d'égalité, c'est plutôt un symbole de congruence $\equiv$ modulo l'ensemble des fonctions constantes.

Exemples 10 :

- $\forall\,\alpha \in \mathbb{R}_+,\ \displaystyle\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}$.

  En particulier, retenez que, $\forall\,n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.
- Il faudra également être capable de reconnaître immédiatement les dérivées de composées les plus classiques, qui permettent de calculer directement des intégrales pas toujours évidentes à repérer. Ainsi,
  - $\displaystyle\int_0^\pi \cos(t)\sin^3(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4}\sin^4(t)\right]_0^\pi = 0$.
  - $\displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}e^{t^2}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e}-1}{2}$.

Exercice 5 : Déterminer $\displaystyle\int^x \mathrm{e}^{-t}\sin(t)\,\mathrm{d}t$.

Correction :

$$\begin{aligned}\int^x \mathrm{e}^{-t}\sin(t)\,\mathrm{d}t &= \int^x \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})t}\right)\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int^x \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}}{-1+\mathrm{i}}\right) = -\mathrm{Im}\left(\frac{(1+\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}\\ &= -\left(\sin(x)+\cos(x)\right)\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}.\end{aligned}$$

À l'instar de la démonstration précédente, la croissance de l'intégrale est une propriété puissante dont nous nous servirons beaucoup en fin d'année. À ce stade, elle nous permet, par exemple, de redémontrer élégamment nos petites inégalités classiques de convexité.

Exemple 11 : $\forall\,x \in \mathbb{R},\quad \mathrm{e}^x \geqslant 1+x$.

Preuve : $\forall\,t \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^t \geqslant 1 \iff t \geqslant 0$.

Donc, $\forall\,x \geqslant 0,\ \mathrm{e}^x - 1 = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^x \mathrm{d}t = x$ et,

$\forall\,x \leqslant 0,\ 1-\mathrm{e}^x = \displaystyle\int_x^0 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^0 \mathrm{d}t = -x \iff \mathrm{e}^x - 1 \geqslant x$.

Dans tout les cas, on a le résultat escompté.

Corollaire 6.1 : Toute fonction continue sur I possède des primitives sur I.

Autrement dit, soit f une fonction continue sur un intervalle I, la fonction F définie par $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I pour tout $a \in \mathrm{I}$. C'est LA primitive de f sur I qui s'annule en a.

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ \left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(x).$$

Un type d'exercices très classique (et donc à maîtriser) consiste à faire étudier une fonction définie par une intégrale à bornes variables. Même si on ne sait pas intégrer la fonction sur l'intervalle, on pourra toujours réussir à calculer explicitement sa dérivée et ainsi trouver son comportement, comme dans les exercices suivants.

Exercice 6 : Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et des fonctions $f : \mathrm{J} \longmapsto \mathbb{R}$ continue et $a, b : \mathrm{I} \longmapsto \mathrm{J}$ dérivables.

1. Montrer que $\mathrm{H} : x \longmapsto \displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur I et exprimer sa dérivée.
2. Étudier la fonction définie par $x \longmapsto \displaystyle\int_{x^2}^{2x^2} \ln(1+t)\,\mathrm{d}t$

   (définition, dérivabilité, variations).

Le théorème (6) ramène donc le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ à la recherche d'une primitive F de f sur $[a\,;b]$. Il est important de faire le parallèle avec la résolution des équations et la nécessité de les factoriser : la résolution d'une équation dépend de sa factorisation, le calcul d'une intégrale dépend de la connaissance d'une primitive de l'intégrande.

Là est toute la difficulté. Cela semble simple sur des exemples élémentaires mais ne croyez pas que ce le soit. Nombre de fonctions pourtant simples en apparence n'ont pas de primitives explicites comme $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

Exemple 12 : $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est la primitive de $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ qui s'annule en zéro.

Méthode 2 (Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive) :
Soit $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *une intégrale d'une fonction* f *continue sur un intervalle* $[a\,;b]$ *à calculer.*

1. *On cherche une primitive* F *de* f *sur* $[a\,;b]$.
2. *On écrit et calcule :* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\mathrm{F}(t)\Big]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$.
3. *C'est tout !...*

Exercice 7 : Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\cos(t)} \sin(t)\,\mathrm{d}t$

Définition 3 (Fonction de classe $\mathscr{C}^1$) : Soit A un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

Une fonction $f : \mathrm{A} \longmapsto \mathbb{C}$ est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur A si f est dérivable sur A et f' est continue sur A.

On note $\mathscr{C}^1(\mathrm{A}\,;\mathrm{B})$ l'ensemble des fonctions définies sur A à valeurs dans B de classe $\mathscr{C}^1$ sur A.

Il est clair que $\mathscr{C}^1(\mathrm{A}\,;\mathrm{B})$ est stable par somme, produit et quotient de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

On transposera également les propriétés de stabilité par composition.

Corollaire 6.2 : Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{I}\,;\mathbb{C})$.

Alors, pour tous réels $a, b \in \mathrm{I}$, $\quad f(b) - f(a) = \displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t.$

III TECHNIQUES ÉLÉMENTAIRES DE CALCULS D'INTÉGRALES

ATTENTION

En accord avec le **théorème** (6), avant toute manipulation d'intégrales ou de primitives, on s'assurera de l'existence de l'objet en précisant bien que l'intégrande est continue sur l'intervalle d'intégration *i.e.* on commencera toujours par écrire :

La fonction … est continue[6] *sur l'intervalle … et on a …*

III.1 Intégration par parties

Proposition 7 (Intégration par parties) : Soient u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,;b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

En terme de primitives, on écrira simplement :

$$\int^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = u(x)v(x) - \int^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Preuve : Comme produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,;b]$, la fonction uv l'est également. En particulier uv est dérivable sur $[a\,;b]$ et on a :

$$\forall\, t \in [a\,;b]\,,\ \Big(uv\Big)'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t).$$

[6]. ou de classe $\mathscr{C}^1$ pour une intégration par parties.

La fonction $(uv)'$, $u'v$ et uv' sont également continues sur $[a\,;b]$ donc admettent des primitives d'après le théorème (6) fondamental.

$$\text{D'où, } \int_a^b \Big(uv\Big)'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b u'(t)v(t) + u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\Big[u(t)v(t)\Big]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cette formule sera très souvent utilisée dans le cas d'un calcul d'intégrale de produit peu évident, que l'on souhaite transformer un produit plus simple.

Il faut bien comprendre que lors d'une intégration par parties, souvent abrégée en « IPP », l'une des deux fonctions du produit est dérivée et l'autre intégrée.

On essaiera donc de prendre pour v des fonctions qui se simplifient en dérivant (par exemple $v(t) = t$, ou $v(t) = ln(t)$), et pour u' des fonctions qui ne se compliquent pas trop quand on intègre (par exemple $u'(t) = \mathrm{e}^t$).

Retenez que l'intégration par parties sera particulièrement utile pour :

- intégrer des fonctions dont la primitive n'est pas triviale.
- obtenir des relations de récurrence entre des intégrales dépendant d'un entier naturel.

Exercice 8 : Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

1. $x \longmapsto \ln(x)$.
2. $x \longmapsto \arctan(x)$.
3. $x \longmapsto \arcsin(x)$.

Correction :

1. Il n'y a pas de produit, ce qui peut sembler rédhibitoire pour une « IPP ».

Ce n'est en fait pas un problème, on pose simplement $v(t) = \ln(t)$ et $u'(t) = 1$, ce qui donne $v'(t) = \dfrac{1}{t}$ et $u(t) = t$ soit $u(t)v'(t) = \dfrac{t}{t} = 1$, pas trop difficile à intégrer.

Les fonctions u et v étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, l'intégration par parties s'écrit :

$$\int^x \ln(t)\,\mathrm{d}t = x\ln(x) - \int^x t \times \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = x\ln(x) - \int^x 1\,\mathrm{d}t = x\ln(x) - x.$$

2. Pour $x \longmapsto \arctan(x)$, le raisonnement est analogue en posant $u : x \longmapsto x$ et $v : x \longmapsto \arctan(x)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$:

$$\int^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int^x \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\underbrace{\left(1+x^2\right)}_{>0}.$$

3. Sur $]-1\,;1[$ les fonctions $u : x \longmapsto x$ et $v : x \longmapsto \arcsin(x)$ de classe $\mathscr{C}^1$ et une IPP s'écrit :

$$\int^x \arcsin(t)\,\mathrm{d}t = x\arcsin(x) - \int^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}.$$

On aura pris garde à $1 - t^2 > 0$, $\forall\, t \in\,]-1\,;1[$ avant d'intégrer.

ATTENTION

Bien vérifier que tous les facteurs du produit sont bien de classe $\mathscr{C}^1$.

Une rédaction correcte commencera toujours en le précisant même rapidement :

« Les fonction $x \longmapsto u(x)$ et $x \longmapsto v(x)$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,;b]$, on effectue une IPP et on a... »

La seule difficulté avec les IPP est de choisir qui sera u et qui sera v' !

En effet, pour pouvoir dériver u, il faudra savoir intégrer v', c'est le prix à payer et espérer tomber sur une intégrale familière.

Là, il n'y a pas de règle, seuls l'habitude, l'entraînement et le talent vous permettront de savoir quoi choisir.

Il existe cependant une méthode qui permet majoritairement, d'aboutir au résultat voulu. La solution n'est pas garantie, mais marche à, disons, 90% :

Méthode 3 (Méthode ALPES) : La méthode « A.L.P.E.S » donc consiste à toujours dériver les fonctions qui se situent le plus à gauche en premier avec :

- **A -** pour arctan, arcsin, arccos, ...
- **L -** pour Logarithmes
- **P -** pour Polynômes
- **E -** pour Exponentielles
- **S -** pour sin, cos, tan, sh, ch, ...

Exemples 13 : Si on veut intégrer $x\sin(x)$, on va dériver le polynôme et intégrer le sin vu que dans l'ordre de priorité, la famille **P** des polynômes vient avant la famille **S** des fonctions trigonométriques :

$$\int^x t\sin(t)\,\mathrm{d}t = x(-\cos(x)) - \int^x 1(-\cos(t))\,\mathrm{d}t = -x\cos(x) + \sin(x).$$

De même, pour intégrer $2x\arctan(x)$, on va commencer par dériver l'**A**rctan et intégrer le polynôme **P** :

$$\int^x 2t\arctan(t)\,\mathrm{d}t = (1+x^2)\arctan(x) - \int^x \frac{1+t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = (1+x^2)\arctan(x) - x.$$

III.2 Changement de variables

Parfois les primitives usuelles et l'intégration par parties ne suffisent pas à calculer l'intégrale.

On va réécrire l'intégrale différemment en « changeant la variable » de manière à faire apparaître, si possible, une fonction plus facile à primitiver.

Proposition 8 (Changement de variables) : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction continue sur I et $\varphi : [a\,;b] \longmapsto \mathrm{I}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,;b]$ à valeurs dans I. Alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit qu'on a effectué le changement de variables $x = \varphi(t)$.

Preuve : Continue sur I, f possède une primitive F d'après le théorème fondamental et on a :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{F}(x)\Big]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \mathrm{F}(\varphi(b)) - \mathrm{F}(\varphi(a)).$$

Par composition, la fonction $\mathrm{F}\circ\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,;b]$ et y est une primitive de $(f\circ\varphi)\times\varphi'$.
On a aussi :

$$\int_a^b (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\mathrm{F}\circ\varphi(t)\Big]_a^b = \mathrm{F}(\varphi(b)) - \mathrm{F}(\varphi(a)).$$

Par transitivité, on obtient bien :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Méthode 4 (Calculer une intégrale à l'aide d'un changement de variables) :
En pratique, on n'utilise pas vraiment la formule telle quelle. Si on dispose d'une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ avec une fonction compliquée et qu'on souhaite remplacer une partie de la fonction par une nouvelle variable, on procèdera dans l'ordre :

1. On « pose » $x = \varphi(t)$ qui marque la dépendance de x à t notée aussi $x(t)$.
2. On dérive les deux membres de l'expression : $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$ que l'on écrit à la physicienne : $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.
3. On multiplie les deux membres par $f(x)$ écrit pour obtenir $f(x)\,\mathrm{d}x = f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t$ que l'on remplace dans l'intégrale.
4. On remplace les bornes a et b par $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.

ATTENTION

Lors d'un changement de variables réalisé sur une copie, on ne garde qu'une variable dans chaque intégrale écrite : pour chaque symbole $\int$ écrit, une seule variable doit apparaitre, et non un mélange entre l'ancienne et la nouvelle : $\cancel{\int^x f(\varphi(t))\,\mathrm{d}x}$ si on a posé $x = \varphi(t)$.

Exemple 14 : Calculons $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2t}}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t$.

1. On pose $x = \mathrm{e}^t$. La fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^t$ est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;1]$ à valeurs dans $[1\,;\mathrm{e}]$.
2. $\mathrm{d}x = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \implies \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}t$.
3. $\dfrac{\mathrm{e}^{2t}}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t = \dfrac{x^2}{x+1}\,\dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \dfrac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

4 Lorsque t parcourt $[0\,;1]$, x parcourt $[1\,;\mathrm{e}]$ dans ce sens.

On en déduit :

$$\frac{\mathrm{e}^{2t}}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} 1-\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \Big[x-\ln|x+1|\Big]_1^{\mathrm{e}} = e-\ln(e+1)-1+\ln 2.$$

Exemple 15 : Calculons $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

1 On pose $x=\sin(u) \iff u=\arcsin(x)$. La fonction $x\longmapsto \arcsin(x)$ est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;1]$ à valeurs dans $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

En particulier, $\cos(u)=\sqrt{1-x^2}$ car $\cos(u)\geqslant 0$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

2 $\mathrm{d}x=\cos(u)\,\mathrm{d}u$.

3 $\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\cos^2(u)\,\mathrm{d}u$.

4 Lorsque x parcourt $[0\,;1]$, $u=\arcsin(x)$ parcourt $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ dans ce sens.

On en déduit :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1+\cos(2u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[u+\frac{1}{2}\sin(2u)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Méthode 5 (Calculer une primitive à l'aide d'un changement de variables) :

Pour déterminer une primitive $x\longmapsto \displaystyle\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide d'un changement de variable :

1 On réalise un changement de variable dans la primitive de f de la forme

$$t=\varphi(u).$$

Le changement de variable pour les primitives s'écrit avec la notation intégrale sans borne inférieure $\displaystyle\int^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int^{\varphi^{-1}(x)} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$.

2 On trouve une primitive F de $f(\varphi(u))\varphi'(u)$:

$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t = [\mathrm{F}(u)]^{\varphi^{-1}(x)} = \mathrm{F}\Big(\varphi^{-1}(x)\Big).$$

Remarque : On n'oubliera pas de revenir à la variable initiale.

Exemple 16 : Cherchons une primitive de $x\longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Posons $u=t+\sqrt{t^2+1}$.

Comme $1+x^2>0$ sur $\mathbb{R}$, la fonction $\varphi : t\longmapsto \varphi(t)=t+\sqrt{1+t^2}$ y est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\mathrm{d}u = \left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{u}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t \implies \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+1}}.$$

D'où, $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}} = \int^{\varphi(x)} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln(u) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 : Calculer les intégrales suivantes par changement de variables.

1. $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{3+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6-t^2}}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_3^6 \frac{1}{\sqrt{6t-t^2}}\,\mathrm{d}t$

Correction :

1. $\displaystyle\int^x \frac{1}{3+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$: Soit le changement de variables (croissant) $u=\mathrm{e}^t$.

Alors $u\in[1\,;2]$ lorsque t décrit $[0\,;\ln(2)]$ et $\mathrm{d}u=\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ ce qui s'écrit aussi $\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}u}{u}$.

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{3+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{1}{3+\frac{1}{u}}\frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_1^2 \frac{1}{3u+1}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{3}\ln|3u+1|\right]_1^2 = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{7}{4}\right).$$

Remarque : Le changement de variables n'est pas du tout justifié ici.

En effet, $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{3+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\ln(2)} \frac{\mathrm{e}^t}{3\,\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}\ln|3\,\mathrm{e}^x+1|\right]_0^{\ln(2)} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{7}{4}\right)$.

2. Considérons $\displaystyle\int^x \frac{1}{\sqrt{6-t^2}}\,\mathrm{d}t$: Le changement de variables a pour but de se ramener à quelque chose de connu.

Ici nous avons une fraction avec une racine carrée au dénominateur et sous la racine un polynôme de degré 2. Ce que l'on sait intégrer c'est :

$$\int^x \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u = \arcsin(u),$$

car on connaît la dérivée de la fonction arcsin, c'est $\arcsin' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$.

On va donc essayer de s'y ramener.

$$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)^2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{6}}.$$

Il est alors légitime de penser à poser $u=\dfrac{t}{\sqrt{6}}$ i.e. $\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{6}}$.

On a alors :

$$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6-t^2}}\,\mathrm{d}t \underset{\substack{t\in[\sqrt{3};\sqrt{6}]\\ \Updownarrow \\ u\in\left[\frac{1}{\sqrt{2}};1\right]}}{=} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u = \Big[\arcsin(u)\Big]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} = \arcsin(1)-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

3. $\displaystyle\int_3^6 \frac{1}{\sqrt{6t-t^2}}\,\mathrm{d}t$: La méthode est identique avec la même idée.

Essayons d'écrire ce qu'il y a sous la racine, $9t - t^2$ sous la forme $1 - u^2$:

$$6t - t^2 = 9 - (t-3)^2 = 9\left(1 - \left(\frac{t-3}{3}\right)^2\right).$$

Donc il est naturel d'essayer le changement de variables $u = \dfrac{t-3}{3}$ pour lequel $6t - t^2 = 9(1-u^2)$ et $\mathrm{d}t = 3\,\mathrm{d}u$.

$$\int_3^6 \frac{1}{\sqrt{6t-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{9(1-u^2)}} 3\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \Big[\arcsin(u)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Remarque : Comme $t \in [3\,;6]$, alors $\dfrac{t-3}{3} \in [0\,;1]$, il est donc tout aussi naturel de poser $\sin(v) = \dfrac{t-3}{3} \iff \cos(v)\mathrm{d}v = \dfrac{1}{3}\,\mathrm{d}t \iff \mathrm{d}t = 3\cos(v)\mathrm{d}v$.

On a alors :

$$\int_3^6 \frac{1}{\sqrt{6t-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_3^6 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\left(\frac{t-3}{3}\right)^2}} \underset{\substack{t\in[3;6] \\ \Updownarrow \\ v\in[0;\frac{\pi}{2}]}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(v)\mathrm{d}v}{\sqrt{1-\sin^2(v)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{\cos(v)}\,\mathrm{d}v}{\cancel{\cos(v)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}v = \frac{\pi}{2}.$$

Proposition 9 (Changement de variables affine) : Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$ continue et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Si $\alpha t + \beta \in \mathrm{I}$ pour tout $t \in [a\,;b]$, alors $\displaystyle\int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(\alpha t+\beta)\,\mathrm{d}t$.

Preuve : La fonction $\varphi : t \longmapsto \alpha t + \beta$ est clairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc, en particulier sur $[a\,;b]$, à valeurs dans I par hypothèse.

On peut donc effectuer le changement de variables $x = \alpha t + \beta$ et on a $\mathrm{d}x = \alpha\,\mathrm{d}t$ puis, d'après la proposition (8),

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\alpha t+\beta)\,\alpha\,\mathrm{d}t \iff \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(\alpha t+\beta)\,\mathrm{d}t.$$

Voici quelques applications importantes :

Corollaire 9.1 (Intégrales de fonctions paires, impaires, périodiques) : Soit $a > 0$.

1. Si $f : [-a\,;a] \longmapsto \mathbb{C}$ est continue et paire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Si $f : [-a\,;a] \longmapsto \mathbb{C}$ est continue et impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
3. Si $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$, continue et T-périodique $(\mathrm{T} > 0)$ alors pour tous réels a, b on a :

$$\int_a^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{a+\mathrm{T}}^{b+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Preuve :

1 D'après la relation de Chasles, on a : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Posons $u = -t$ dans la première intégrale, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-a\,;a]$ à valeurs dans lui-même. Rapidement, on a $\mathrm{d}u = -\,\mathrm{d}t$, $f(t) = f(-u) = f(u)$ par parité de f.

D'où, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{0} f(u)(-\,\mathrm{d}u) + \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(u)\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$.

2 Le même raisonnement avec f impaire, conduit à :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{0} -f(u)(-\,\mathrm{d}u) + \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{a} f(u)\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

3 La fonction f étant périodique, son domaine de définition est donc invariant par translation de vecteur $\mathrm{T}\vec{\imath}$.

On commence par utiliser la relation de Chasles pour se ramener à l'intégrale que l'on veut puis un changement de variables affine :

$$\begin{aligned}
\int_{a}^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\mathrm{T}}^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&\underset{t=u+\mathrm{T}}{=} \int_{a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(u+\mathrm{T})\mathrm{d}u \\
&= \cancel{\int_{a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t} + \int_{0}^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t + \underbrace{\cancel{\int_{0}^{a} f(u)\mathrm{d}u}}_{\mathrm{T}-\text{périodicité}} \\
&= \int_{0}^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Exercice 10 : Montrer que si $f \in \mathscr{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{C})$ alors

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\int_{0}^{1} f(a+(b-a)t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemples 17 :

- $\forall\, n \in \mathbb{N}$ et $a > 0$, $\displaystyle\int_{-a}^{a} x^{2n}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} x^{2n}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-a}^{a} x^{2n+1}\,\mathrm{d}x = 0$.
- $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Exemples 18 : Primitives de $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-a)^2+b^2}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{b^2-x^2}}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$.

1 On effectue le changement de variables $x - a = bt$, d'où $\mathrm{d}x = b\,\mathrm{d}t$ et on a :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{b}\arctan(t) = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right).$$

2 On effectue le changement de variables $x = bt$, d'où $\mathrm{d}x = b\,\mathrm{d}t$ et on a :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{b^2 - x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(t) = \arcsin\left(\frac{x}{b}\right).$$

Exercice 11 : Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

1 $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$.

2 $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x^6}}{x}$.

3 $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$.

Correction :

1 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x-1)$ sur $[0\,;2]$.

2 On pose $u = x^6$ puis $v = \sqrt{1+u}$ (ou directement $u = \sqrt{1+x^6}$) et on obtient :

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x^6}\,x^5 dx = \frac{1}{6}\int \frac{\sqrt{1+u}}{u}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{6}\int \frac{v}{v^2-1} 2v\,dv = \frac{1}{3}\int \frac{v^2}{v^2-1}\,dv = \frac{1}{3}\left(v + \int \frac{1}{v^2-1}\,dv\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(v + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{v-1}{v+1}\right|\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\sqrt{1+x^6} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^6}-1}{\sqrt{1+x^6}+1}\right|\right)
\end{aligned}$$

3
$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{(1+x)-(1-x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\sqrt{1-x}}{x}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int \frac{u}{u^2-1} 2u\,\mathrm{d}u + \int \frac{v}{1-v^2} 2v\,dv\right)
\end{aligned}$$

(en posant $u = \sqrt{1+x}$ et $v = \sqrt{1-x}$)

$$\begin{aligned}
&= \int \left(1 + \frac{1}{u^2-1}\right)\mathrm{d}u + \int (-1) + \frac{1}{1-v^2}\,dv \\
&= u - v + \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right| + \ln\left|\frac{1+v}{1-v}\right|\right) \\
&= \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} + \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{1-\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}}\right| + \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}\right|\right).
\end{aligned}$$

À retenir ! (En pratique) : Pour calculer une intégrale sur un segment I, il existe trois règles ou méthodes essentielles :

À vue : On reconnaît une dérivée connue ou la forme $x \longmapsto u'(x)f'(u(x))$ dont une primitive sur I est $x \longmapsto f(u(x))$.

Par intégration par parties : On remplace le calcul d'une primitive par le calcul d'une autre plus simple après avoir bien vérifié et stipulé que les intégrandes concernées étaient de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Par changement de variable : φ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, on pose $t = \varphi(u)$, et donc $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\,\mathrm{d}u$, et on a :

$$\int^x \varphi'(u)f(\varphi(u))\,\mathrm{d}u = \int^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{avec } t = \varphi(u).$$

IV Primitives de fractions rationnelles

Considérant une fraction rationnelle sous sa forme générale $\dfrac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}$, il est pratiquement impossible d'en trouver une primitive « à vue ». Heureusement, la théorie (qui n'est pas au programme de PTSI) montre que toute fraction rationnelle se décompose en la somme de termes de la forme :

- $\dfrac{1}{x-a}$,
- $\dfrac{1}{(x-a)^k}$, $\quad k > 1$.

On parlera d'*éléments simples de première espèce*. Et de termes de la forme :

- $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$,
- $\dfrac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$,
- $\dfrac{1}{(ax^2+bx+c)^k}$,
- $\dfrac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^k}$,

avec $k > 1$, $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - ac < 0$.

On parlera d'*éléments simples de deuxième espèce*.

IV.1 Généralités sur la décomposition en éléments simples

En PTSI, la théorie de la décomposition en éléments simples n'est pas à connaître dans sa généralité. Vous ne rencontrerez essentiellement que des fractions à pôles réels simples. Dans les autres cas, la décomposition sera indiquée ou simple.

Il est cependant utile de connaître quelques petites techniques, qui évitent de recourir au calcul brutal consistant à mettre au même dénominateur tous les termes pour identifier.

— Dans le cas des pôles simples *i.e.* de dénominateurs de degré 1 de la forme $\mathrm{X} - a$, on peut multiplier les deux membres par $\mathrm{X} - a$ puis évaluer l'égalité pour $\mathrm{X} = a$.

Exemple 19 : Décomposition en éléments simples de $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2-x-2}$:

- On commence par factoriser le dénominateur afin d'identifier les pôles et leur multiplicité :

$$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{2x+3}{(x+1)(x-2)}.$$

- La théorie nous assure alors que :

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}. \tag{IX.4}$$

- Pour $x \neq -1$, on multiplie l'égalité (IX.4) par $x+1$, ce qui donne : $\dfrac{2x+3}{x-2} = a + \dfrac{b(x+1)}{x-2}$. Expression qui peut alors être évaluée en $x=-1$, le pôle ayant disparu.

  On trouve alors $-\dfrac{1}{3} = a$.
- On itère le raisonnement précédent à tous les pôles simples. Ici, en multipliant par $x-2$ et en évaluant en $x=2$.

  On trouve $b = \dfrac{7}{3}$.
- **Conclusion :** $f(x) = -\dfrac{1}{3(x+1)} + \dfrac{7}{3(x-2)}$ et toute primitive de f sur tout intervalle I contenu dans $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ est de la forme :

$$x \longmapsto -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{7}{3}\ln|x-2| = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{(x-2)^7}{x+1}\right|.$$

Remarque : Ce procédé de décomposition lorsque la fraction possède des pôles simples réels se généralise.

Méthode 6 (Décomposition dans le cas de pôles simples réels) :
Soient $r_1, \dots, r_n$ des réels deux à deux distincts et un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R} \setminus \{r_1, \dots, r_n\}$.

Alors, toute primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(x-r_1)\dots(x-r_n)}$ sur I est de la forme $x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k \ln|x-r_k| + \mathrm{Cte}$ où $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_n$ sont les coefficients de la décomposition en éléments simples de f.

— Dans le cas de pôles multiples, disons a de multiplicité n, le raisonnement précédent s'applique en multipliant les deux membres de la décomposition par $(x-a)^n$ et en identifiant pour $x=a$ mais seulement pour le coefficient de plus haute multiplicité.

Exemple 20 : La décomposition en éléments simples de $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-1)^2(x+2)}$ s'écrit :

$$f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2}.$$

En multipliant par $(x-1)^2$, on obtient :

$$\frac{x+1}{x+2} = a + b(x-1) + \frac{c(x-1)^2}{x-2}.$$

En évaluant en $x=1$, on obtient $a = \dfrac{2}{3}$ facilement mais on perd l'occasion de déterminer b à cause de la présence du facteur $x-1$.

Remarque : En attendant de disposer de moyens plus efficaces, on pourra toujours évaluer la fraction en $x=0$ par exemple et identifier b après avoir trouvé le coefficient c.

On trouve successivement $c = -\dfrac{1}{9}$, d'où :

$$f(x) = \frac{2}{3(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} - \frac{1}{9(x+2)}.$$

Puis, $f(0) = \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{3} - b - \dfrac{1}{18} \iff b = \dfrac{1}{9}$.

Conclusion : $f(x) = \dfrac{2}{3(x-1)^2} + \dfrac{1}{9(x-1)} - \dfrac{1}{9(x+2)}$.

— S'il y a des termes de degré supérieur, on peut obtenir une équation sur les coefficients en évaluant l'égalité pour une valeur simple de x (souvent $x = 0$) sans multiplication préalable.

— On peut également obtenir une équation en regardant la limite quand x tend vers $\pm\infty$, en multipliant au besoin par x ou x^2 pour faire apparaître des limites non nulles.

Exemple 21 : Décomposition en éléments simples de $f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$:

- On commence par factoriser le dénominateur dans $\mathbb{R}$:

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1).$$

  Le deuxième facteur ayant un discriminant négatif, on ne peut aller plus loin.
- La théorie nous assure alors que :

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}. \tag{IX.5}$$

- En multipliant par $x+1$, on trouve rapidement $a = \dfrac{1}{3}$.
- Pour le reste, il nous faut deux informations supplémentaires. On peut regarder en 0 pour trouver $1 = \dfrac{1}{3} + c \iff c = \dfrac{2}{3}$.

  Enfin, on peut multiplier par x et regarder la limite en $+\infty$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^3+1} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{3(x+1)} + \lim_{x\to+\infty} \frac{bx^2 + \frac{2}{3}x}{x^2-x+1} \\ 0 &= \frac{1}{3} + b \\ b &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

- **Conclusion :** $f(x) = \dfrac{1}{3(x+1)} - \dfrac{x-2}{3(x^2-x+1)}$.

Remarque : Rien empêche de faire un petit tour dans $\mathbb{C}$ et de poser α et $\overline{\alpha}$ les racines complexes $x^2 - x + 1 = (x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$.

L'égalité (IX.5) s'écrit alors :

$$\frac{1}{(x+1)(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{bx+c}{(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})}. \tag{IX.6}$$

On multiplie alors les deux membres de (IX.6) par $x - \alpha$ avant d'évaluer en $x = \alpha$. On trouve alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha-\overline{\alpha})} = \frac{b\alpha+c}{(\alpha-\overline{\alpha})} &\iff \frac{1}{\alpha+1} = b\alpha + c \\ &\iff 1 = (b\alpha+c)(\alpha+1) \iff 1 = b\alpha^2 + (b+c)\alpha + c \end{aligned}$$

Or, $\alpha^2 = \alpha - 1$,

$$\iff 1 = b(\alpha-1) + (b+c)\alpha + c \iff 1 = -b + c + (2b+c)\alpha$$

En identifiant « partie réelle » et « imaginaire » en α :

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 1 &=& -b+c \\ 0 &=& 2b+c \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} b &=& -\frac{1}{3} \\ c &=& \frac{2}{3}. \end{array} \right.$$

IV.2 Intégration des éléments simples

D'après la remarque liminaire du paragraphe (IV) , trouver une primitive d'une fraction rationnelle revient donc à trouver une primitive des termes constituant sa décomposition en éléments simples :

Primitive de $\dfrac{1}{x-\alpha}$ **et** $\dfrac{1}{(x-\alpha)^k}$**,** $k>1$ **:** *cf.* l' exemple (5) .

Toutes les fractions du type $\dfrac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$ ou $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ avec $\Delta = b^2-4ac \geqslant 0$ se ramènent à ce cas là.

Exercice 12 : Déterminer les primitives de $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ sur des intervalles appropriés.

Correction : Sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}\setminus\{1;2;3\}$, on a :

$$\int^x \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \int^x \left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x-3}\right)\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{(x-1)^2(x-3)^2}{x-2}\right|.$$

Primitive de $x\longmapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ **(avec** $a\neq 0$**) :** On utilise la forme canonique :

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right], \qquad \text{avec } \Delta = b^2-4ac.$$

Selon le signe de Δ, trois cas se présentent :

Exemple 22 (Cas où $\Delta<0$) :

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1} = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

On pose $\xi = \dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}$ *i.e.* $\mathrm{d}\xi = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{d}t$:

$$= \frac{4}{3}\int^\xi \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}\xi}{\xi^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int^\xi \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\xi)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Exemple 23 (Cas où $\Delta=0$) :

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{4t^2+4t+1} = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{(2t+1)^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{2x+1}$$

Exemple 24 (Cas où $\Delta>0$) : Calculons $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{2t^2-t-1}$.

1. Factoriser le dénominateur : $2x^2-x-1=(x-1)(2x+1)$.
2. Déterminer la *décomposition en éléments simples* :

$$\frac{1}{(x-1)(2x+1)} = \frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{2x+1}. \tag{IX.7}$$

(a) En multipliant les deux membres de (IX.7) par $(x-1)$ puis en remplaçant x par 1, on obtient : $\alpha = \frac{1}{3}$.

(b) En multipliant les deux membres de (IX.7) par $(2x+1)$ puis en remplaçant x par $-\frac{1}{2}$, on obtient : $\alpha = -\frac{2}{3}$.

$$\text{D'où,} \quad \frac{1}{2x^2-x-1} = \frac{\frac{1}{3}}{x-1} - \frac{\frac{2}{3}}{2x+1}.$$

3. Utiliser la linéarité de l'intégrale :

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{2t^2-t-1} = \int^x \left(\frac{\frac{1}{3}}{t-1} - \frac{\frac{2}{3}}{2t+1}\right)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|2x+1| = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|.$$

Remarques : La fonction $x \mapsto \frac{1}{2x^2-x-1}$ n'est pas définie en $-\frac{1}{2}$ et en 1.

On travaille donc sur l'un des intervalles $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[$, $\left]-\frac{1}{2}\,;1\right[$, ou $]1\,;+\infty[$.

- Sur $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[$ ou sur $]1\,;+\infty[$, on a $\int^x \frac{\mathrm{d}t}{2t^2-t-1} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{x-1}{2x+1}\right)$.
- Sur $\left]-\frac{1}{2}\,;1\right[$, on a $\int^x \frac{\mathrm{d}t}{2t^2-t-1} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1-x}{2x+1}\right)$.

Primitive de $\frac{\alpha x+\beta}{x^2+bx+c}$ avec $b^2-4c<0$: Comme x^2+bx+c ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on peut envisager une primitive de la forme $\frac{u'}{u}$. On commence par faire apparaitre cette forme et on a :

$$\int \frac{\alpha t+\beta}{t^2+bt+c}\mathrm{d}t = \frac{\alpha}{2}\int \frac{2t+\beta}{t^2+bt+c}\mathrm{d}t + \int \frac{\beta - \frac{\alpha\beta}{2}}{t^2+bt+c}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{\alpha}{2}\ln|x^2+bx+c| + \frac{\cdots}{\cdots}\arctan(\ldots).$$

Exercice 13 : Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

1. $x \longmapsto \frac{x^2}{x^3+1}$.
2. $x \longmapsto \frac{1}{x^3+1}$.

Correction :

1. I est l'un des deux intervalles $]-\infty,-1[$ ou $]1,+\infty[$.

   Sur I, $\int \frac{x^2}{x^3+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln(x^3+1)$.

2. I est l'un des deux intervalles $]-\infty,-1[$ ou $]-1,+\infty[$. f est continue sur I et admet donc des primitives sur I.

$$\frac{1}{\mathrm{X}^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\mathrm{X}+1} + \frac{-\mathrm{X}+2}{\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\mathrm{X}+1} - \frac{1}{2}\frac{2\mathrm{X}-1}{\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\mathrm{X}+1} - \frac{1}{2}\frac{2\mathrm{X}-1}{\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{(\mathrm{X}-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\right).$$

Mais alors,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}(\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}) \\ &= \frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

V Techniques à connaître

Le programme de PTSI demande explicitement aux étudiants de savoir déterminer des primitives d'un certain type. C'est l'objet de cette partie.

V.1 Primitives de $x \longmapsto e^{\alpha x}\cos(\omega x)$

On souhaite déterminer des primitives de fonctions du type $x \longmapsto e^{\alpha x}\cos(\omega x)$ ou $x \longmapsto e^{\alpha x}\sin(\omega x)$ où $(\alpha\,;\omega) \in \mathbb{R}^2$.

Sachant que l'on connaît la primitive $\boxed{\int^x e^{at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\,e^{ax}}$ pour tout $a \in \mathbb{C}^*$, la méthode générale va être de se ramener celle-ci à l'aides des formules d'Euler.

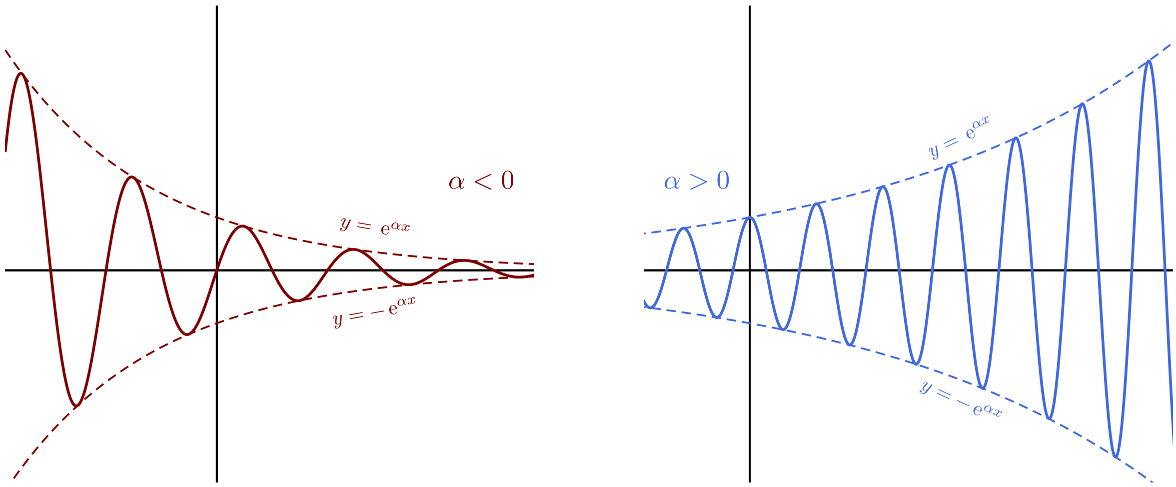


Figure IX.5 – Signaux pseudo-périodiques avec enveloppe exponentielle. La charge d'un condensateur dans un circuit RLC est de ce type.

Méthode 7 (Primitive de $x \longmapsto e^{ax}\cos(bx)$) :
Pour déterminer une primitive faisant intervenir $x \longmapsto e^{ax}\cos(bx)$ ou $x \longmapsto e^{ax}\sin(bx)$, il sera souvent plus simple de passer par l'intégrale de $x \longmapsto e^{(a+\mathrm{i}\,b)x}$, dont on connaît une primitive, et d'en prendre sa partie réelle ou imaginaire.

Exemple 25 :

$$\begin{aligned}\int^x \mathrm{e}^t \cos(t)\,\mathrm{d}t &= \int^x \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\right)\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\int^x \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\left(\frac{1-\mathrm{i}}{2}\right)(\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x))\right)\,\mathrm{e}^x\end{aligned}$$

Donc, $$\int^x \mathrm{e}^t \cos(t)\,\mathrm{d}t = \Big(\cos(x)+\sin(x)\Big)\,\frac{\mathrm{e}^x}{2}.$$

Exercice 14 : Déterminer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int^x \cos(t)\,\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int^x \cos(2t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

Correction :

1. $$\begin{aligned}\int^x \mathrm{e}^{2t}\cos(t)\,\mathrm{d}t &= \mathrm{Re}\left(\int^x \mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{2-\mathrm{i}}{5}\,\mathrm{e}^{2x}(\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x))\right)\\ &= \frac{2\cos(x)+\sin(x)}{5}\,\mathrm{e}^{2x}.\end{aligned}$$
2. $$\int^x \cos(2t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{-\cos(2x)+2\sin(2x)}{5}\,\mathrm{e}^{-x}.$$

V.2 Polynômes trigonométriques : $x \longmapsto \mathrm{P}\left(\cos(x)\,;\sin(x)\right)$

Pour les primitives du type $\displaystyle\int^x \cos^m(t)\sin^n(t)\,\mathrm{d}t$, $(m\,;n)\in\mathbb{N}^2$, sauf primitivation directe « à l'œil », on utilise les formules d'Euler et De Moivre pour linéariser puis les primitives de $t\longmapsto\cos(at+b)$ et $t\longmapsto\sin(at+b)$.

Méthode 8 (Primitive de $x\longmapsto\cos^p(x)\sin^q(x)$) :
Pour déterminer des primitives de fonctions de la forme $x\longmapsto\cos^p(x)\sin^q(x)$ avec p, $q>0$, on pensera à linéariser l'expression, l'obtention de primitives se faisant ensuite aisément.

Exercice 15 : Calculer une primitive de $f : x\longmapsto\cos^3(x)$.

Correction : $$\int^x \cos^3(t)\,\mathrm{d}t = \int^x\left(\frac{1}{4}\cos(3t)+\frac{3}{4}\cos(t)\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{12}\sin(3x)+\frac{3}{4}\sin(x).$$

Il y a plus efficace dans certains cas avec des changements de variables :

Méthode 9 (Primitive de $x\longmapsto\cos^p(x)\sin^q(x)$) :

- *si p est impair, on peut poser $u=\cos(x)$.*
- *si q est impair, on peut poser $u=\sin(x)$.*
- *p et q sont impairs, on peut poser $u=\sin(x)$ ou $u=\cos(x)$ ou $u=\cos(2x)$.*
- *si p et q sont pairs, on pourra linéariser, puis primitiver.*

- si p et q sont de parité différente on pose le changement de variables égal à la fonction trigonométrique à la puissance paire

$$u=\cos(x) \quad \text{si } p \text{ est pair} \quad \text{et} \quad u=\sin(x) \text{ si } q \text{ est pair.}$$

On est alors ramené à primitiver des fonctions polynomiales qu'il faudra évaluer en $\cos(x)$, $\sin(x)$ ou $\cos(2x)$.

Exemples 26 :

1. $\displaystyle\int^x \cos(t)\sin^3(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\sin^4(x).$ — p et q impairs.
2. $\displaystyle\int^x \cos^3(t)\sin^3(t)\,\mathrm{d}t = \int^x \frac{\sin^3(2t)}{8}\,\mathrm{d}t \overset{u=\cos(2t)}{=} \frac{1}{8}\int^{\cos(2x)} \frac{u^2-1}{2}\,\mathrm{d}u$ — p et q impairs.
$$= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{3}\cos^3(2x)-\cos(2x)\right).$$
3. $\displaystyle\int^x \cos^2(t)\sin^3(t)\,\mathrm{d}t \overset{u=\cos(t)}{=} -\int^{\cos(x)} (u^2-u^4)\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{3}\cos^3(x)+\frac{1}{5}\cos^5(x).$ — p pair et q impair.
4. $\displaystyle\int^x \cos^3(t)\,\mathrm{d}t \overset{u=\sin(t)}{=} \int^{\sin(x)} (1-u^2)\,\mathrm{d}u = \sin(x)-\frac{1}{3}\sin^3(x).$ — p impair et q pair.
5. $\cos^2(t)\sin^4(t) = \frac{1}{64}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^4 = \frac{1}{64}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)^2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^2$ — p et q pairs.
$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{64}\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}-2+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}\right)\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-2+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)\\
&= \frac{1}{64}\left(\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x}-2\,\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+4-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}-2\,\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x}\right)\\
&= \frac{1}{64}\left(2\cos(6x)-4\cos(4x)-\cos(x)+4\right)\\
&= \frac{1}{32}\cos(6x)-\frac{1}{16}\cos(4x)-\frac{1}{64}\cos(x)+\frac{1}{16}.
\end{aligned}$$
D'où, $\displaystyle\int^x \cos^2(t)\sin^4(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{192}\sin(6x)-\frac{1}{64}\sin(4x)-\frac{1}{64}\sin(x)+\frac{1}{16}x.$

Exercice 16 : Déterminer $\displaystyle\int^x \cos^5(t)\,\mathrm{d}t.$

Correction : Deux méthodes : changement de variables $u=\sin(t)$ ou linéarisation.

$$\int^x \cos^5(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{15}\left(15\sin(t)-10\sin^3(t)+3\sin^5(t)\right) \text{ ou } \frac{1}{80}\sin(5t)+\frac{5}{48}\sin(3t)+\frac{5}{8}\sin(t).$$

Méthode 10 (Primitive de $x\longmapsto\cos(px)\sin(qx)$) :
Transformer les produits en sommes par l'utilisation des formules trigonométriques :

- $\sin(p)\cos(q) = \frac{1}{2}\Big[\sin(p+q)+\sin(p-q)\Big].$
- $\sin(p)\sin(q) = \frac{1}{2}\Big[\cos(p-q)-\sin(p+q)\Big].$
- $\cos(p)\cos(q) = \frac{1}{2}\Big[\cos(p+q)+\cos(p-q)\Big].$

Exemple 27 :

$$\int^x \cos(3t)\cos(4t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int^x \Big(\cos(7t)+\cos(-t)\Big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{14}\sin(7x)+\frac{1}{2}\sin(x).$$

V.3 Fractions rationnelles trigonométriques : $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{P}(\cos(x)\,;\sin(x))}{\mathrm{Q}(\cos(x)\,;\sin(x))}$

Pour les primitives du type $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{P}(\cos(t),\sin(t))}{\mathrm{Q}(\cos(t),\sin(t))}\,\mathrm{d}t$ où P, Q sont deux fonctions polynomiales à 2 variables, on peut toujours poser $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$ pour se ramener à l'intégrale d'un quotient de fonctions polynômes.

On a alors :

$$\mathrm{d}t = \frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u, \quad \cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \sin(t) = \frac{2u}{1+u^2} \quad \text{et} \quad \tan(t) = \frac{2u}{1-u^2}.$$

Cette méthode fonctionne toujours et ramène le problème à celui de l'intégration d'une fraction rationnelle. On peut cependant affiner un peu et user des règles, dites de Bioche[7] :

Méthode II (Règles de Bioche) :

(Hors-Programme)

Dans la suite, f est une expression rationnelle en $\sin(t)$ et $\cos(t)$.

Ainsi, pour calculer $\displaystyle\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$, on forme l'intégrande : $\omega(t) = f(t)\,\mathrm{d}t$.

- si $\omega(-t) = \omega(t)$, un changement de variables judicieux est $u(t) = \cos(t)$;
- si $\omega(\pi - t) = \omega(t)$, un changement de variables judicieux est $u(t) = \sin(t)$;
- si $\omega(\pi + t) = \omega(t)$, un changement de variables judicieux est $u(t) = \tan(t)$;
- si deux des trois relations précédentes sont vraies (dans ce cas les trois relations sont vraies), un changement de variables judicieux est $u(t) = \cos(2t)$;
- dans les autres cas, le changement de variables $u(t) = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$ s'avère souvent judicieux.

Exemple 28 : Avec le changement de variables $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, on obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}t}{1-\sin(t)} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u}{1-\frac{2u}{1+u^2}} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2\,\mathrm{d}u}{(1-u)^2} = \left[\frac{2}{1-u}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 1+\sqrt{3}.$$

Exercice 17 : Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

1. $x \longmapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$
2. $x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{sh}\,(x)}$

Correction :

[7]. Ces règles ont été formulées par Charles Bioche lorsqu'il était professeur en mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand.

1 On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ et donc $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

$$\int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\,\frac{2dt}{1+t^2} = \int 2\frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| = \ln\left|\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right|$$
$$= \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|,$$

sur $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ ou bien

$$\int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin(x)+1}{\sin(x)-1}\right|,$$

ou bien, en posant $u = x + \frac{\pi}{2}$,

$$\int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos\left(u-\frac{\pi}{2}\right)}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{\sin(u)}\,\mathrm{d}u = \ln\left|\tan\left(\frac{u}{2}\right)\right| = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

2 La fonction $x \longmapsto \frac{1}{\mathrm{sh}\,(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. On considèrera donc $x \in \mathrm{I}$ où I est un intervalle ne contenant pas 0.

En posant $t = \mathrm{e}^x$ et donc $dx = \frac{\mathrm{d}t}{t}$ $(t \neq 0)$,

$$\int \frac{1}{\mathrm{sh}\,(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{t+\frac{1}{t}}\,\frac{\mathrm{d}t}{t} = 2\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2\arctan(\mathrm{e}^x),$$

ou bien

$$\int \frac{1}{\mathrm{sh}\,(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{sh}\,(x)}{\mathrm{ch}^2(x)-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\mathrm{ch}\,(x)-1}{\mathrm{ch}\,(x)+1}\right|,$$

sur les mêmes intervalles ne contenant pas 0 ou bien

$$\int \frac{1}{\mathrm{sh}\,(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\mathrm{sh}\,\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{ch}\,\left(\frac{x}{2}\right)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{th}\,\left(\frac{x}{2}\right)}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\mathrm{th}\,\left(\frac{x}{2}\right)\right),$$

sur les mêmes intervalles ne contenant pas 0.

V.4 Primitives de $x \longmapsto \mathrm{P}(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$

Proposition 10 : Soient P une fonction polynomiale et α un nombre réel.

Alors $x \longmapsto \mathrm{P}(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ admet une primitive de la forme $x \longmapsto \mathrm{Q}(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ où Q est une fonction polynomiale de même degré que P.

Méthode 12 (Primitive de $x \longmapsto \mathrm{P}(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$) :
Soit n le degré de P. Deux méthodes pour déterminer Q dans la proposition précédente :

1 Chercher Q sous la forme $x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ avec les coefficients b_k à déterminer. On calcule la dérivée de $x \longmapsto \mathrm{Q}(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$, et on réinjecte dans l'équation de primitivation pour obtenir

$$\mathrm{Q}' + \alpha\mathrm{Q} = \mathrm{P}.$$

Il suffit alors d'identifier les coefficients dans cette égalité polynomiale pour obtenir un système linéaire en $b_0, \dots, b_n$ que l'on résout. (On trouvera toujours une unique solution).

2 Si le degré de P n'est pas trop grand, on peut aussi effectuer des intégrations par parties successives en dérivant P, puis P′, etc, jusqu'à épuiser le degré du polynôme à intégrer.

Exemple 29 : $\int^x t^2\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\left(x^2+2x+2\right)\mathrm{e}^{-x}$.

Lors d'une grosse fiesta organisée chez les fonctions, la fonction exponentielle pleurniche dans un coin.

Les autres fonctions viennent la voir :

- *« Bah pourquoi tu pleures ?*
- *Bououh snif, je suis toute seule, bouhouhou.*
- *Bah viens avec nous, on va t'intégrer !*
- *Non, snif snif, c'est pas la peine, bouhouhou, ça changera rien ! »*

Index