Fichiers Primitives-Trigo a, b et c

Exercices faciles :

Exercice 1 : Donner une primitive de $x \longmapsto \cos(x)\sin^3(2x)$.

Correction : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos x \sin^3 2x = -\frac{1}{8}\sin(7x) - \frac{1}{8}\sin(5x) - \frac{3}{8}\sin(3x) - \frac{3}{8}\sin(x)$.

Une primitive est $x \longmapsto \frac{1}{56}\cos(7x) + \frac{1}{40}\cos(5x) + \frac{1}{8}\cos(3x) + \frac{3}{8}\cos(x)$.

Exercice 2 : Linéariser $\sin^4 x$. En déduire une primitive de $f : x \longmapsto \sin^4(x)$.

Correction : $\sin^4(x) = \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(4x) + \frac{3}{8}$.

Donc une primitive de f est $\mathrm{F} : x \longmapsto \frac{1}{32}\sin(4x) - \frac{1}{8}\sin(4x) + \frac{3}{8}x$.

Exercice 3 : Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

1. $x \longmapsto \cos^2(x)$,
2. $x \longmapsto \cos^5(x)\sin^2(x)$,

Correction :

1. $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$ et une primitive de $x \longmapsto \cos^2(x)$ est $x \longmapsto \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin(2x))$.
2. $\cos^5 x \sin^2 x = \cos x(1-\sin^2 x)^2 \sin^2 x = \sin' x \sin^2 x - 2\sin' x \sin^4 x + \sin' x \sin^6 x$ et une primitive de $x \longmapsto \cos^5 x \sin^2 x$ est $x \longmapsto \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x$.

Exercice 4 : Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

1. $x \longmapsto \cos^4(x)$,
2. $x \longmapsto \cos(x)\sin^6(x)$,

Correction :

1. D'après les formules d'Euler,

$$\begin{aligned}\cos^4 x &= \left(\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})\right)^4 = \frac{1}{16}(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) \\ &= \frac{1}{16}(2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6) = \frac{1}{8}(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3)\end{aligned}$$

Donc, une primitive de la fonction $x \longmapsto \cos^4 x$ est $x \longmapsto \frac{1}{8}(\frac{1}{4}\sin(4x) + 2\sin(2x) + 3x)$.

2. $\cos x \sin^6 x = \sin' x \sin^6 x$ et une primitive de $x \longmapsto \cos x \sin^6 x$ est $x \longmapsto \frac{1}{7}\sin^7 x$.

Exercice 5 : Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

1. $x \longmapsto \sin^4(x)$,
2. $x \longmapsto \cos^2(x)\sin^2(x)$,

Correction :

1

$$\sin^4 x = \left(\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\right)^4 = \frac{1}{16}(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix})$$
$$= \frac{1}{16}(2\cos(4x) - 8\cos(2x) + 6) = \frac{1}{8}(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3)$$

Donc, une primitive de la fonction $x \longmapsto \sin^4 x$ est $x \longmapsto \frac{1}{8}(\frac{1}{4}\sin(4x) - 2\sin(2x) + 3x)$.

2 $\cos^2(x)\sin^2(x) = \frac{1}{4}\sin^2(2x) = \frac{1}{8}(1 - \cos(4x))$ et une primitive de la fonction $x \longmapsto \cos^2 x \sin^2 x$ est $x \longmapsto \frac{1}{8}(x - \frac{1}{4}\sin(4x))$.

Exercice 6 : Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

1 $x \longmapsto \sin^6(x)$,

2 $x \longmapsto \cos^3(x)$.

Correction :

1

$$\sin^6 x = \left(\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\right)^6 = -\frac{1}{64}(e^{6ix} - 6e^{4ix} + 15e^{2ix} - 20 + 15e^{-2ix} - 6e^{-4ix} + e^{-6ix})$$
$$= -\frac{1}{64}(2\cos(6x) - 12\cos(4x) + 30\cos(2x) - 20) = \frac{1}{32}(-\cos(6x) + 6\cos(4x) - 15\cos(2x) + 10)$$

Donc, une primitive de la fonction $x \longmapsto \sin^6 x$ est $x \longmapsto \frac{1}{32}(-\frac{1}{6}\sin(6x) + \frac{3}{2}\sin(4x) - \frac{15}{2}\sin(2x) + 10x)$.

2 $\cos^3 x = \sin' x - \sin' x \sin^2 x$ et une primitive de $x \longmapsto \cos^3 x$ est $x \longmapsto \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$.

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

EXERCICES PLUS ARDUS :