Fichiers Primitives-IPP a, b et c

Exercices faciles :

Exercice 1 : Calculer les primitives suivantes sur un intervalle à préciser :

$$\int^x x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int^x \arcsin^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 2 : Calculer les primitives suivantes sur un intervalle à préciser :

$$\int^x x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int^x \frac{\arctan(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 3 : Calculer les primitives suivantes sur un intervalle à préciser :

$$\int^x x^2e^x\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int^x x\arctan^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 4 : Calculer les primitives suivantes sur un intervalle à préciser :

$$\int^x \arcsin(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int^x \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 5 : Calculer les primitives suivantes sur un intervalle à préciser :

$$\int^x x\arctan(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int^x \sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 6 : Calculer les primitives suivantes sur un intervalle à préciser :

$$\int^x x^2e^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}.$$

Exercice 7 : Calculer la primitive (sur un intervalle à préciser) et l'intégrale suivantes :

$$\int^x x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+t+1}}.$$

Exercice de difficulté moyenne :

Exercice 1 : Calculer les primitives suivantes sur un intervalle à préciser :

$$\int^x (-x^3+x^2-2x+3)e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int^x \frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 2 : Calculer les primitives suivantes sur un intervalle à préciser :

$$\int^x \sqrt{2+x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int^x \frac{x^2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 3 : $\displaystyle\int_0^1 x\arctan^2(x)\,\mathrm{d}x.$

Exercices plus ardus :

Exercice 1 : Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b], \mathbb{R})$.

Déterminer la limite de $\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction : Une intégration par parties s'écrit :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t &= \left[f(t)\frac{\sin nt}{n}\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\frac{\sin nt}{n}\,\mathrm{d}t \\ &= f(b)\frac{\sin nb}{n} - f(a)\frac{\sin an}{n} - \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\sin nt\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Or,

- $\left|f(b)\dfrac{\sin nb}{n}\right| \leqslant \dfrac{\|f\|_\infty}{n}$
- $\left|f(a)\dfrac{\sin na}{n}\right| \leqslant \dfrac{\|f\|_\infty}{n}$
- $\left|\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_a^b f'(t)\sin nt\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{b-a}{n}\|f'\|_\infty$

Par conséquent, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = 0$.