Fichiers Primitives-Changement Variables a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : Calculer $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3+\cos^2(x)}$ on pourra poser $u=\tan(x)$.

Exercice 2 : $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3 : $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 : $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}}$.

Exercice 5 : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3+\cos^2(x)}$ on pourra poser $u=\tan(x)$.

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue telle que $\forall\, x\in[a,b], f(a+b-x)=f(x)$.

Montrer que $\displaystyle\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Correction : $\displaystyle\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (a+b-t)f(t)\,\mathrm{d}t$ en posant $t=a+b-x$.

D'où $\displaystyle 2\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x = (a+b)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 : Calculer :

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

2. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$.

Correction :

1. Le changement de variable a pour but de se ramener à quelque chose de connu. Ici nous avons une fraction avec une racine carrée au dénominateur et sous la racine un polynôme de degré 2. Ce que l'on sait intégrer c'est :

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \arcsin u + c,$$

car on connaît la dérivée de la fonction $\arcsin(t)$, c'est $\arcsin'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

On va donc essayer de s'y ramener.

Essayons d'écrire ce qu'il y a sous la racine, $4x-x^2$ sous la forme $1-t^2$:

$$4x-x^2 = 4-(x-2)^2 = 4\left(1-\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2\right).$$

Donc il est naturel d'essayer le changement de variable $u=\dfrac{1}{2}x-1$ pour lequel $4x-x^2=4(1-u^2)$ et $dx=2du$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{4(1-u^2)}}2du = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + \mathrm{C}$$
$$= \arcsin\left(\frac{1}{2}x-1\right) + \mathrm{C}.$$

Exercice 3 : Calculer :

1. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}.$

2. $\displaystyle\int x^2\ln(x^6-1)\,\mathrm{d}x.$

Correction :

1. $$\mathrm{I} = \int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_\pi^0 \frac{(\pi-u)\sin(\pi-u)}{1+\cos^2(\pi-u)}\,(-du)$$
$$= \pi\int_0^\pi \frac{\sin u}{1+\cos^2 u}\,du - \int_0^\pi \frac{u\sin u}{1+\cos^2 u}\,du$$
$$= -\pi\Big[\arctan(\cos u)\Big]_0^\pi - \mathrm{I} = \frac{\pi^2}{2} - \mathrm{I},$$
et donc, $\mathrm{I} = \dfrac{\pi^2}{4}$.

Exercice 4 : Calculer :

1. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}}\,\mathrm{d}x$ pour $0<x<1$.

2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}.$

Correction :

1. Changement de variable $t = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ qui donne :
$$\int \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{\frac{x}{1-x}} - 2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}} + \mathrm{C}.$$

2. Poser $x=\tan(t)$ pour arriver à $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos(t)} = \int \frac{\cos(t)\,\mathrm{d}t}{1-\sin^2(t)}$. Poser $u=\sin(t)$ pour arriver à $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2}$ puis DES.

Exercice 5 : Calculer :

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{th}\,(x)}{1+\mathrm{ch}\,(x)}\,\mathrm{d}x.$

2. $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2-1)^2}\,\mathrm{d}x.$

Correction :

1. $$\int \frac{\mathrm{th}\,(x)}{\mathrm{ch}\,(x)+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\mathrm{ch}\,(x)(\mathrm{ch}\,(x)+1)}\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{1}{u(u+1)}du \quad \text{en posant } u=\mathrm{ch}\,(x)$$
$$= \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)du = \ln\frac{\mathrm{ch}\,(x)}{\mathrm{ch}\,(x)+1} + \mathrm{C}.$$

Exercice 6 : Calculer :

1 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x.$

2 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos(x)}$ on pourra poser $u=\sin(x)$.

Correction :

1 *Posons le changement de variable* $x=\tan t$*, alors on a* $dx=(1+\tan^2(t))dt$*,* $t=\arctan x$ *et on sait aussi que* $1+\tan^2(t)=\dfrac{1}{\cos^2 t}$*. Comme* x *varie de* $x=0$ *à* $x=1$ *alors* t *doit varier de* $t=\arctan 0=0$ *à* $t=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$*.*

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2(t))^2}(1+\tan^2(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{1+\tan^2(t)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(2t)+1)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2t)+t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\\
&= \frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Calculer :

1 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+4x+7}\,\mathrm{d}x.$

2 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x.$

Correction :

1 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+4x+7}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ *après le changement de variables* $u=\dfrac{x+2}{\sqrt{3}}$*.*