Fichiers Integration-Fonction a, b et c

Exercices faciles :

Exercice 1 : Déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

Correction : $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \int_0^0 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}}{x-0} = \frac{1}{1+0^2} = 0.$

Exercice 2 : Déterminer une primitive sur un intervalle à préciser de $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$.

Correction : Le changement de variable a pour but de se ramener à quelque chose de connu. Ici nous avons une fraction avec une racine carrée au dénominateur et sous la racine un polynôme de degré 2. Ce que l'on sait intégrer c'est :

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u = \arcsin(u) + c,$$

car on connaît la dérivée de la fonction $\arcsin(t)$, c'est $\arcsin'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

On va donc essayer de s'y ramener.

Essayons d'écrire ce qu'il y a sous la racine, $4x-x^2$ sous la forme $1-t^2$:

$$4x-x^2 = 4-(x-2)^2 = 4\left(1-\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2\right).$$

Donc il est naturel d'essayer le changement de variable $u = \frac{1}{2}x-1$ pour lequel $4x-x^2 = 4(1-u^2)$ et $dx = 2\,\mathrm{d}u$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\sqrt{4(1-u^2)}}2\,\mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin(u) + \mathrm{C} \\ &= \arcsin\left(\frac{1}{2}x-1\right) + \mathrm{C}.\end{aligned}$$

Exercice 3 : Déterminer une primitive sur un intervalle à préciser de $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Correction : Poser $x = \tan(t)$ pour arriver à $\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos(t)} = \int \frac{\cos(t)\,\mathrm{d}t}{1-\sin^2(t)}$.

Poser $u = \sin(t)$ pour arriver à $\int \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2}$ puis décomposition en éléments simples.

Exercice de difficulté moyenne :

Exercice 1 : Déterminer une primitive sur un intervalle à préciser de $x \longmapsto \arcsin(x)$.

Exercice 2 : Déterminer une primitive sur un intervalle à préciser de $x \longmapsto \arcsin^2(x)$.

Exercice 3 : Déterminer une primitive sur un intervalle à préciser de $x \longmapsto x\arctan^2(x)$.

Exercices plus ardus :

Exercice 1 : Pour x réel, on pose $f(x) = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$.

1. Montrer que f est impaire et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2xf(x) = 1$.
4. Soit $g(x) = \dfrac{e^{x^2}}{2x}f'(x)$. Montrer que g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et que g admet sur $]0, +\infty[$ un unique zéro noté x_0 vérifiant de plus $0 < x_0 < 1$.
5. Dresser le tableau de variations de f.

Correction :

1. La fonction $t \mapsto e^{t^2}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Donc, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et il en est de même de f.

   La fonction $t \mapsto e^{t^2}$ est paire et donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$ est impaire. Comme la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est paire, f est impaire.

2. Pour x réel, $f'(x) = -2xe^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt + e^{-x^2}e^{x^2} = -2xf(x) + 1$.

3. Pour $x \geqslant 1$, une intégration par parties fournit :

$$\int_1^x e^{t^2}\,dt = \int_1^x \frac{1}{2t}.2te^{t^2}\,dt = \left[\frac{1}{2t}e^{t^2}\right]_1^x + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt = \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt,$$

   et donc,

$$\begin{aligned}|1 - 2xf(x)| &= \left|1 - 2xe^{-x^2}\int_1^x e^{t^2}\,dt - 2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{t^2}\,dt\right| \\ &\leqslant xe^{-x^2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt + exe^{-x^2} + 2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{t^2}\,dt.\end{aligned}$$

   Les deux derniers termes tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Il reste le premier.

   Pour $x \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}0 \leqslant xe^{-x^2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt &= xe^{-x^2}\int_1^{x-1} \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt + xe^{-x^2}\int_{x-1}^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt \\ &\leqslant x(x-1)e^{-x^2}\frac{e^{(x-1)^2}}{1^2} + xe^{-x^2}e^{x^2}\int_{x-1}^x \frac{1}{t^2}\,dt \\ &= x(x-1)e^{-2x+1} + x\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) = x(x-1)e^{-2x+1} + \frac{1}{x-1}.\end{aligned}$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. On en déduit que $xe^{-x^2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Finalement, $1-2xf(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, ou encore, $f(x) \sim \frac{1}{2x}$.

4 Pour $x>0$, $g(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}(1-2xf(x)) = \frac{e^{x^2}}{2x} - \int_0^x e^{t^2}\,dt$ puis,

$$g'(x) = e^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{2x^2} - e^{x^2} = -\frac{e^{x^2}}{2x^2} < 0.$$

g est donc strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et donc, g s'annule au plus une fois sur $]0,+\infty[$. Ensuite, $f'(1) = 1-2f(1) = 1-2e^{-1}\int_0^1 e^{t^2}\,dt$. Or, la méthode des rectangles fournit $\int_0^1 e^{t^2}\,dt = 1,44... > 1,35... = \frac{e}{2}$, et donc $f'(1)<0$ puis $g(1)<0$. Enfin, comme en 0^+, $g(x) \sim \frac{1}{2x}f'(0) = \frac{1}{2x}$, $g(0^+) = +\infty$.

Donc, g s'annule exactement une fois sur $]0,+\infty[$ en un certain réel x_0 de $]0,1[$.

5 g est strictement positive sur $]0,x_0[$ et strictement négative sur $]x_0,+\infty[$. Il en de même de f'. f est ainsi strictement croissante sur $[0,x_0]$ et strictement décroissante sur $[x_0,+\infty[$.

Exercice 2 : Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1 Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{e}^{-2x}\ln(2) \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}\ln(2)$. Établir un résultat analogue sur $\mathbb{R}_-^*$.

2 Utiliser cette inégalité pour étudier les limites de f, puis pour montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0 .

On note encore f le prolongement obtenu.

3 Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée. Étudier la dérivabilité de f en 0.

4 Dresser le tableau de variations complet de f.

Exercice 3 : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^n \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Correction : Soit $v_n = \prod_{k=1}^n \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$, notons

$$w_n = \ln v_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right).$$

En posant $g(x) = \ln(1+x^2)$ nous reconnaissons la somme de Riemann correspondant à $\mathrm{I} = \int_0^1 g(x)dx$.

Calculons cette intégrale :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \ln(1+x^2)dx \\
&= \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 x\frac{2x}{1+x^2}dx \quad \text{par intégration par parties} \\
&= \ln 2 - 2\int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \ln 2 - 2\left[x - \arctan x\right]_0^1 \\
&= \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Nous venons de prouver que $w_n = \ln v_n$ converge vers $\mathrm{I} = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$, donc $v_n = \exp w_n$ converge vers $\exp(\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}) = 2e^{\frac{\pi}{2}-2}$. Bilan (v_n) a pour limite $2e^{\frac{\pi}{2}-2}$.

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ continue en 0.

Déterminer $\lim\limits_{u\to 0} \displaystyle\int_0^u \frac{u}{u^2+x^2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Correction : Poser $h = \frac{x}{u}$. La réponse est $f(0)\frac{\pi}{4}$.

Exercice 5 : Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{3x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et le signe de f.
2. Déterminer l'ensemble de continuité et de dérivabilité de f, la dérivée et les variations de f.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Montrer que $\ln(3) - f(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$. En déduire la limite de f en 0^+.

Correction :

1. $u : t \longmapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc f est définie sur R^*.

   $\forall\, x > 0, f(x) \geqslant 0$ (intégrale d'une fonction positive avec bornes dans le bon sens)

   $\forall\, x > 0, f(x) \geqslant 0$ (intégrale d'une fonction négative avec bornes à l'envers).

2. Soit $\phi : x \longmapsto \displaystyle\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

   D'après le théorème fondamental, u étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, ϕ est la primitive de u sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1. Et $\forall\, x > 0, f(x) = \phi(3x) - \phi(x)$. Ainsi, ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, comme somme et composée de fonctions dérivables.

   On a $\forall\, x > 0, f'(x) = 3\phi'(3x) - \phi'(x) = 3\frac{e^{-3x}}{3x} - \frac{e^{-x}}{x} = \frac{e^{-3x}-e^{-x}}{x}$. Idem pour $x < 0$.

3. $\forall\, x \geqslant 1, f(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{3x} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-x}-e^{-3x}}{3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

4. $\ln(3) - f(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

   Comme $\frac{1-e^{-t}}{t} \underset{t\to 0}{\sim} 1$, la fonction $t \longmapsto \frac{1-e^{-t}}{t}$ est prolongeable par continuité en 0.

   Cette fonction est donc bornée $[-1, 1]$. Posons $\mathrm{M} = \max\limits_{t\in[-1,1]} \left|\frac{1-e^{-t}}{t}\right|$.

   On a alors $\forall\, x \in \left[0, \frac{1}{3}\right], |\ln 3 - f(x)| \leqslant \displaystyle\int_x^{3x} \left|\frac{1-e^{-t}}{t}\right| \mathrm{d}t \leqslant 2\mathrm{M}x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

   $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \ln(3)}$.

Exercice 6 : Soit k un réel distinct de -1 et de 1.

1. Étudier les variations de $f_k \;:\; x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{1-2k\cos(x)+k^2}}$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} f_k(x)\,dx$.

Correction :

1 • Pour tout réel x, $1-2k\cos(x)+k^2=(k-\cos(x))^2+\sin^2 x \geqslant 0$. De plus,

$$1-2k\cos(x)+k^2=0 \Rightarrow k-\cos(x)=\sin(x)=0 \Rightarrow x\in\pi\mathbb{Z} \text{ et } k=\cos(x)\Rightarrow k\in\{-1,1\},$$

ce qui est exclu. Donc,

$$\forall\, k\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ \forall\, x\in\mathbb{R},\ 1-2k\cos(x)+k^2>0.$$

•f_k est donc définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ en vertu de théorèmes généraux, impaire et 2π-périodique. On l'étudie dorénavant sur $[0,\pi]$. Pour $x\in[0,\pi]$, on a :

$$\begin{aligned}
f_k'(x) &= \cos(x)(1-2k\cos(x)+k^2)^{-1/2}-\frac{1}{2}\sin(x)(2k\sin(x))(1-2k\cos(x)+k^2)^{-3/2}\\
&=(1-2k\cos(x)+k^2)^{-3/2}(\cos(x)(1-2k\cos(x)+k^2)-k\sin^2 x)\\
&=(1-2k\cos(x)+k^2)^{-3/2}(-k\cos^2 x+(1+k^2)\cos(x)-k)\\
&=(1-2k\cos(x)+k^2)^{-3/2}(k\cos(x)-1)(k-\cos(x))
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall\, x\in\mathbb{R},\ f_k'(x)=\frac{(k\cos(x)-1)(k-\cos(x))}{(1-2k\cos(x)+k^2)^{3/2}}.}$$

1er cas : $|k|<1$ **et** $k\neq 0$**.** (si $k=0$, $f_k(x)=\sin(x)$) Pour tout réel x, $(1-2k\cos(x)+k^2)^{-3/2}(k\cos x-1)<0$ et $f_k'(x)$ est du signe de $\cos(x)-k$.

(car $f_k(\arccos k)=\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{1-2k^2+k^2}}=1$).

2ème cas : $k>1$**.** Pour tout réel x, $(1-2k\cos(x)+k^2)^{-3/2}(k-\cos(x))>0$ et $f_k'(x)$ est du signe de $k\cos x-1$.

(car $f_k(\arccos\frac{1}{k})=\dfrac{\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}}{\sqrt{1-2+k^2}}=\dfrac{1}{k}$).

3ème cas : $k<-1$**.** Pour tout réel x, $(1-2k\cos(x)+k^2)^{-3/2}(k-\cos(x))<0$ et $f_k'(x)$ est du signe de $1-k\cos(x)$.

(car $f_k(\arccos\frac{1}{k})=\dfrac{\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}}{\sqrt{1-2+k^2}}=-\dfrac{1}{k}$).

2 Pour $k\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, posons $\mathrm{I}_k=\displaystyle\int_0^\pi f_k(x)\,dx$.

Si $k=0$, $\mathrm{I}_k=\displaystyle\int_0^\pi \sin(x)\,dx=2$. Sinon,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_k&=\frac{1}{k}\int_0^\pi\frac{2k\sin(x)}{2\sqrt{1-2k\cos(x)+k^2}}\,dx=\frac{1}{k}\left[\sqrt{1-2k\cos(x)+k^2}\right]_0^\pi\\
&=\frac{1}{k}(\sqrt{1+2k+k^2}-\sqrt{1-2k+k^2})=\frac{1}{k}(|k+1|-|k-1|).
\end{aligned}$$

Plus précisément, si $k\in]-1,1[\setminus\{0\}$, $\mathrm{I}_k=\dfrac{1}{k}((1+k)-(1-k))=2$, ce qui reste vrai pour $k=0$. Si $k>1$, $\mathrm{I}_k=\dfrac{1}{k}((1+k)-(k-1))=\dfrac{2}{k}$, et enfin, si $k<-1$, $\mathrm{I}_k=\dfrac{-2}{k}$. En résumé,

$$\boxed{\text{Si } k\in]-1,1[,\ \mathrm{I}_k=2 \text{ et si } k\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[,\ \mathrm{I}_k=\frac{2}{|k|}.}$$