Fichiers Integration-Existence a, b et c

Exercices faciles :

Exercice 1 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n - x^{2n}}{1-x}\,\mathrm{d}x$.

1. Discuter l'existence de I_n pour $n \geqslant 1$.
2. Déterminer la limite de I_n.

Correction :

1. $f : x \longmapsto \dfrac{x^n - x^{2n}}{1-x}$ n'est pas définie en 1, mais on peut la prolonger par continuité.

   En effet : $\forall\, x \neq 1, \quad f(x) = x^n \dfrac{1-x^n}{1-x} = x^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k \xrightarrow[x\to 1]{} n.$

   le prolongement par continuité de f est continu sur $[0,1]$.

   On peut l'y intégrer. f ne diffère de son prolongement qu'en un point : pas de changement de l'intégrale (faussement généralisée).

2. $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sum_{k=0}^{n-1} x^k\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} x^{n+k}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 x^{n+k}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k+1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2.$

Exercice de difficulté moyenne :

Exercice 1 : Sans connaître arctan et sa dérivée, déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

Correction : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \int_0^0 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}}{x-0} = \frac{1}{1+0^2} = 0$ (taux d'accroissement en 0 d'une fonction dérivable).

Exercices plus ardus :

Exercice 1 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$.

Correction : Avec ε pour séparer l'influence de 1.