Nombres Complexes I

Une seule réponse exacte par question.

1 Donner la forme exponentielle des nombres suivants :

(a) $\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}$

(b) $\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$

$\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ et $\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}} = \dfrac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}.$

2 Quel est l'inverse de $3-4i$?

(a) ☑ $\dfrac{3}{25}+\dfrac{4i}{25}$ (b) ☐ $\dfrac{1}{3}-\dfrac{i}{4}$ (c) ☐ $\dfrac{1}{3}+\dfrac{i}{4}$ (d) ☐ $\dfrac{3}{5}+\dfrac{4i}{5}$

3 Soit $z\in\mathbb{C}$. Le nombre complexe $(z-i)(z-2i)$ est égal à

(a) ☑ $z^2-3iz-2$ (b) ☐ z^2-2 (c) ☐ z^2+2 (d) ☐ $z^2-3iz+2$

4 Si x est un nombre réel, la partie réelle de $z=\dfrac{1+ix}{1-ix}$ est

(a) ☑ $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ (b) ☐ $\dfrac{1}{1+x^2}$ (c) ☐ $\dfrac{1}{1-x^2}$ (d) ☐ $\dfrac{2x}{1-x^2}$

5 Un argument de $1-i$ est

(a) ☑ $\dfrac{7\pi}{4}$ (b) ☐ $\dfrac{\pi}{4}$ (c) ☐ $\dfrac{3\pi}{4}$ (d) ☐ $\dfrac{5\pi}{4}$

6 L'inverse d'un nombre complexe non nul z est égal à son conjugué $\overline{z}$ si et seulement si

(a) ☑ $|z| = 1$ (b) ☐ $z = 1$ (c) ☐ $z \in \mathbb{R}$ (d) ☐ $z \in i\mathbb{R}$

7 Soit $z \in \mathbb{C}$. Que dire de z si z^2 est réel ?

(a) ☑ z est un réel ou imaginaire pur
(b) ☐ z est forcément réel
(c) ☐ z est un réel ou de module 1
(d) ☐ z est un réel ou égal à i ou $-i$

8 Le cosinus de $\frac{5\pi}{6}$ vaut

(a) ☑ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) ☐ $-\frac{1}{2}$ (c) ☐ $-\frac{1}{3}$ (d) ☐ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

9 Quelle est la valeur de $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$

(a) ☑ $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ (b) ☐ $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ (c) ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (d) ☐ $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

10 Soit $z = re^{it}$ un nombre complexe, avec r positif. Un argument de e^z est

(a) ☑ $r\sin t$ (b) ☐ $\sin t$ (c) ☐ rt (d) ☐ $r\cos t$

11 Soit x un réel tel que $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{2}$. Alors $\cos(x)$ vaut

(a) ☑ $-\frac{1}{3}$ (b) ☐ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (c) ☐ $\frac{1}{3}$ (d) ☐ on ne peut pas savoir

Nombres Complexes I

Une seule réponse exacte par question.

1 Donner la forme exponentielle des nombres suivants :

ⓐ $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$

ⓑ $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+\mathrm{i}}$

$\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}.$

2 Le module de $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$ est

ⓐ ☐ $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

ⓑ ☐ $2\sqrt{2}$

ⓒ ☐ 2

ⓓ ☑ $\sqrt{2}$

3 Si z est un nombre complexe, la partie réelle de $z+i\overline{z}$ est

ⓐ ☐ $\mathrm{Re}\,(z)+i\mathrm{Re}\,(\overline{z})$

ⓑ ☐ $\mathrm{Re}\,(z)-\mathrm{Im}\,(z)$

ⓒ ☐ $2\mathrm{Re}\,(z)$

ⓓ ☑ $\mathrm{Re}\,(z)+\mathrm{Im}\,(z)$

4 Si x est un nombre réel, la partie imaginaire de $z=\dfrac{1+ix}{1-ix}$ est

ⓐ ☐ -1

ⓑ ☐ $\dfrac{2x}{1-x^2}$

ⓒ ☐ $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

ⓓ ☑ $\dfrac{2x}{1+x^2}$

5 Un argument de $1-i\sqrt{3}$ est

ⓐ ☐ $\dfrac{4\pi}{3}$

ⓑ ☐ $-\dfrac{5\pi}{3}$

ⓒ ☐ $\dfrac{7\pi}{4}$

ⓓ ☑ $-\dfrac{\pi}{3}$

6 Soit z un nombre complexe non nul tel que $z+\dfrac{1}{z}$ soit réel. Alors

- (a) ☐ z est un réel
- (b) ☐ z est un réel ou imaginaire pur
- (c) ☐ z est un réel ou égal à i ou $-i$
- (d) ☑ z est un réel ou de module 1

$$\begin{aligned} z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R} &\iff z+\frac{1}{z}-\overline{\left(z+\frac{1}{z}\right)}=0 \iff z-\overline{z}-\frac{z-\overline{z}}{z\overline{z}}=0\\ &\iff (z-\overline{z})\left(1-\frac{1}{|z|^2}\right)=0\\ &\iff z=\overline{z} \quad \text{ou} \quad |z|=1\\ &\iff z\in\mathbb{R} \quad \text{ou} \quad |z|=1. \end{aligned}$$

Le choix (c) est un cas particulier du choix (d).

7 Soit $z\in\mathbb{C}$. Que dire de z si z^2 est imaginaire pur ?

- (a) ☐ $\arg z\equiv 0 \ [\pi]$
- (b) ☐ z est un réel ou de module 1
- (c) ☐ z est un réel ou égal à i ou $-i$
- (d) ☑ $\arg z\equiv \dfrac{\pi}{4} \ [\pi]$

8 La valeur de $\tan\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$ est

- (a) ☐ -1
- (b) ☐ $-\sqrt{3}$
- (c) ☐ $\sqrt{3}$
- (d) ☑ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

9 Sachant que $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$, le réel $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ vaut

- (a) ☐ $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$
- (b) ☐ $\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$
- (c) ☐ $\dfrac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}$
- (d) ☑ $\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$

10 Soit $z=re^{it}$ un nombre complexe, avec r positif. Le module de e^z est

- (a) ☐ e^r
- (b) ☐ $e^{r\sin t}$
- (c) ☐ $re^{|t|}$
- (d) ☑ $e^{r\cos t}$

11 Si $\sin(x)=\dfrac{1}{2}$ alors

- (a) ☐ $x=\dfrac{\pi}{6} \quad [\pi]$
- (b) ☐ $x=\dfrac{\pi}{6} \quad [2\pi]$ ou $x=-\dfrac{\pi}{6} \quad [2\pi]$
- (c) ☐ $x=\dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$ ou $x=\dfrac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$
- (d) ☑ $x=\dfrac{\pi}{6} \quad [2\pi]$ ou $x=\dfrac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$