Nombres Complexes I

1 Donner la forme algébrique de $\left(\dfrac{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}\right)^6$

$$\left(\frac{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}\right)^6 = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right)^6 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}.$$

2 À l'aide des formules d'Euler, retrouver les formules de linéarisation de $\cos^2(x)$.

D'après les formules d'Euler, $\cos(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}$.

Dans le même temps, le binôme de Newton assure que :

$$\cos^2(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^2 = \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}+2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{4} = \frac{2\cos(2x)+2}{4} = \frac{1+\cos(2x)}{2}.$$

3 À l'aide des formules de De Moivre, retrouver les formules de duplication de $\sin(2x)$.

D'après les formules de De Moivre, $(\cos(x)+\mathrm{i}\,\sin(x))^2 = \cos(2x)+\mathrm{i}\,\sin(2x)$.

Dans le même temps, le binôme de Newton assure que :

$$(\cos(x)+\mathrm{i}\,\sin(x))^2 = \cos^2(x)-\sin^2(x)+2\,\mathrm{i}\,\cos(x)\sin(x).$$

En identifiant les parties imaginaires, on obtient finalement :

$$\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x).$$

4 Pour $z\in\mathbb{C}$, résoudre $\mathrm{e}^z = 2\sqrt{3}-2\,\mathrm{i}$.

$$\mathrm{e}^z = -3\sqrt{3}+3\,\mathrm{i} \iff \mathrm{e}^z = 6\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} \iff \begin{cases} |\,\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} = 6 \\ \arg(\mathrm{e}^z) \equiv \mathrm{Im}(z) \equiv \dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi] \end{cases} \iff z \equiv \ln(6)+\mathrm{i}\,\frac{5\pi}{6}\ [2\,\mathrm{i}\,\pi].$$

5 Soient $n\in\mathbb{N}$ et $t\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On pose $\mathrm{A}_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$ et $\mathrm{C}_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(kt)$.

(a) Montrer que $\mathrm{A}_n(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{nt}{2}}\dfrac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

(b) En déduire $\mathrm{C}_n(t)$.

Pour $t\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\neq 1$ et on a :

(a)

$$\mathrm{A}_n(t) = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} = \sum_{k=0}^{n}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)^k = \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{nt}{2}}\frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

(b) Comme $\mathrm{C}_n(t) = \mathrm{Re}(\mathrm{A}_n(t))$, on a :

$$\mathrm{C}_n(t) = \frac{\cos\left(\frac{nt}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Nombres Complexes I

1 Donner la forme algébrique de $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}}\right)^{12}$

$$\left(\frac{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}\right)^{12} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right)^{12} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1.$$

2 À l'aide des formules d'Euler, retrouver les formules de linéarisation de $\sin^2(x)$.

D'après les formules d'Euler, $\sin(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$.
Dans le même temps, le binôme de Newton assure que :

$$\sin^2(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^2 = \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}-2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{-4} = \frac{2\cos(2x)-2}{-4} = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

3 À l'aide des formules de De Moivre, retrouver les formules de duplication de $\cos(2x)$.

D'après les formules de De Moivre, $(\cos(x)+\mathrm{i}\,\sin(x))^2 = \cos(2x)+\mathrm{i}\,\sin(2x)$.

Dans le même temps, le binôme de Newton assure que :

$$(\cos(x)+\mathrm{i}\,\sin(x))^2 = \cos^2(x)-\sin^2(x)+2\,\mathrm{i}\,\cos(x)\sin(x).$$

En identifiant les parties réelles, on obtient finalement :

$$\cos(2x) = \cos^2(x)-\sin^2(x).$$

4 Pour $z\in\mathbb{C}$, résoudre $\mathrm{e}^z = 2\sqrt{3}-2\,\mathrm{i}$.

$$\mathrm{e}^z = 2\sqrt{3}-2\,\mathrm{i} \iff \mathrm{e}^z = 4\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \iff \begin{cases} |\,\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} = 4 \\ \arg(\mathrm{e}^z) \equiv \mathrm{Im}(z) \equiv -\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi] \end{cases} \iff z \equiv 2\ln(2) - \mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}\ [2\,\mathrm{i}\,\pi].$$

5 Soient $n\in\mathbb{N}$ et $t\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On pose $\mathrm{A}_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$ et $\mathrm{S}_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(kt)$.

a Montrer que $\mathrm{A}_n(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{nt}{2}}\dfrac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

b En déduire $\mathrm{S}_n(t)$.

Pour $t\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\neq 1$ et on a :

a

$$\mathrm{A}_n(t) = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} = \sum_{k=0}^{n}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)^k = \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{nt}{2}}\frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

b Comme $\mathrm{S}_n(t) = \mathrm{Im}(\mathrm{A}_n(t))$, on a :

$$\mathrm{S}_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$