Une application complexe

On considère dans ce devoir l'application f, définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longmapsto & \mathbb{C} \\ z & & f(z) = \dfrac{1}{z+i}. \end{array}$$

1 Déterminer le domaine de définition de f.

2 On considère les quatre complexes suivants :

$$z_1 = -1, \quad z_2 = \sqrt{3}, \quad z_3 = 1 - 2i, \quad z_4 = -1 - i(1+\sqrt{3}).$$

On pose $\mathrm{Z}_k = f(z_k)$ pour tout $k \in \{1,2,3,4\}$.

(a) Calculer les formes algébriques des complexes Z_k pour $k \in \{1,2,3,4\}$.

(b) En déduire leur forme exponentielle.

(c) Placer les M_k d'affixe Z_k dans le plan complexe sur feuille de papier millimétrée. On prendra 10 cm pour une unité et on fera apparaître tous les éléments de construction ayant permis de placer ces points de manière exacte. La détermination **exacte** de certaines valeurs comme $\sqrt{2}$ sera précisé.

(d) Déterminer tous les complexes $z \neq -i$ tels que $f(z) \in \mathbb{R}$. Quel ensemble géométrique reconnaît-on ?

(e) Déterminer tous les complexes $z \neq -i$ tels que $f(z) \in i\mathbb{R}$. Quel ensemble géométrique reconnaît-on ?

(f) Déterminer tous les complexes $z \neq -i$ tels que $f(z) \in \mathbb{U}$. Quel ensemble géométrique reconnaît-on ?

3 Soit $z \in \mathbb{U}$ que l'on écrit $z = \mathrm{e}^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

(a) Quelle condition faut-il imposer sur θ pour avoir $z \neq -i$? On suppose cette condition vérifiée par la suite.

(b) Déterminer la forme algébrique de $f(\mathrm{e}^{i\theta})$. Que remarque-t-on concernant sa partie imaginaire ?

(c) Vérifier que $f(z) = \dfrac{i}{iz-1}$.

(d) Pour tout $\theta \not\equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, montrer que $f(\mathrm{e}^{i\theta}) = \dfrac{1}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\,\mathrm{e}^{-i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$.

(e) Résoudre l'équation $\left|f(\mathrm{e}^{i\theta})\right| = \dfrac{1}{2}$.