Une application complexe

On considère dans ce devoir l'application f, définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longmapsto & \mathbb{C} \\ z & & f(z) = \dfrac{1}{z+i}. \end{array}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.

$f(z)$ est définie si, et seulement si $z + i \neq 0$ i.e. $\boxed{z \neq -\mathrm{i}}$.

2. On considère les quatre complexes suivants :

$$z_1 = -1, \quad z_2 = \sqrt{3}, \quad z_3 = 1 - 2i, \quad z_4 = -1 - i(1+\sqrt{3}).$$

On pose $\mathrm{Z}_k = f(z_k)$ pour tout $k \in \{1,2,3,4\}$.

a) Calculer les formes algébriques des complexes Z_k pour $k \in \{1,2,3,4\}$.

Commentaires : On rappelle le calcul de la forme algébrique d'un inverse : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ (multiplication du numérateur et du dénominateur par le conjugué du dénominateur).

$$\mathrm{Z}_1 = f(z_1) = \frac{1}{-1+i} = \frac{-1-i}{(-1)^2+1^2} \boxed{= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.}$$

$$\mathrm{Z}_2 = f(z_2) = \frac{1}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}^2+1^2} \boxed{= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i.}$$

$$\mathrm{Z}_3 = f(z_3) = \frac{1}{1-2i+i} = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{1^2+(-1)^2} \boxed{= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.}$$

$$\mathrm{Z}_4 = f(z_4) = \frac{1}{-1-i(1+\sqrt{3})+i} = \frac{1}{-1-i\sqrt{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2} \boxed{= -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i.}$$

b) En déduire leur forme exponentielle.

Commentaires : Il s'agit d'écrire ces quatre complexes sous la forme $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ où $r = |z|$, donc on factorise dès le début par $|z|$ et on reconnaît une mesure de leur argument.

$$|\mathrm{Z}_1| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ donc } \mathrm{Z}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) \boxed{= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{4}}.}$$

$$|\mathrm{Z}_2| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{2} \text{ donc } \mathrm{Z}_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \boxed{= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}.}$$

$$|\mathrm{Z}_3| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ donc } \mathrm{Z}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \boxed{= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}.}$$

$$|\mathrm{Z}_4| = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{1}{2} \text{ donc } \mathrm{Z}_4 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \boxed{= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}.}$$

Commentaires : Pour ceux moins adeptes de la factorisation, on rappelle une autre façon de procéder en passant par $\frac{z}{|z|}$ que l'on souhaite écrire sous la forme $\mathrm{e}^{i\theta}$.

Par exemple :

$$|\mathrm{Z}_1| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{donc on calcule : } \frac{\mathrm{Z}_1}{|\mathrm{Z}_1|} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

On cherche θ tel que $\cos(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$: $\theta = -\frac{3\pi}{4}$ convient. Ainsi, $\frac{\mathrm{Z}_1}{|\mathrm{Z}_1|} = \mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{4}}$ d'où $\mathrm{Z}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{4}}$. On procède de même pour les autres complexes...

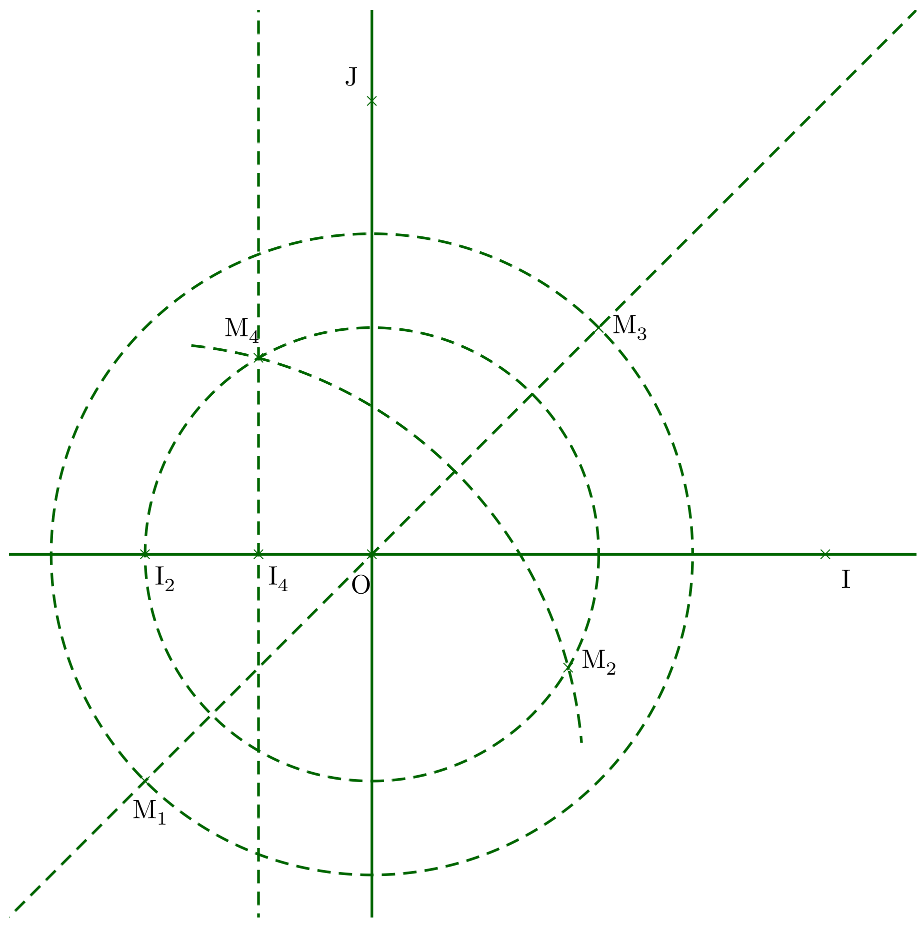
c) Placer les M_k d'affixe Z_k dans le plan complexe sur feuille de papier millimétrée. On prendra 10 cm pour une unité et on fera apparaître tous les éléments de construction ayant permis de placer ces points de manière exacte. La détermination **exacte** de certaines valeurs comme $\sqrt{2}$ sera précisé.

Pour placer le point M d'affixe $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, on trace le cercle de centre O et de rayon r puis on place M de sorte que $(\overrightarrow{\mathrm{OI}}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}) \equiv \theta\ [2\pi]$ (comme d'habitude, I est le point d'affixe 1). On aura donc besoin du cercle trigonométrique pour placer les angles très précisément : par exemple, pour $-\frac{\pi}{6}$, on trace la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$ vu qu'on sait que $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$... Pour placer les angles correspondant à $\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{3\pi}{4}$, on trace la première bissectrice (droite d'équation $y = x$). Enfin, l'un des cercles aura pour rayon $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0{,}7$.

On considère le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(0\,;\mathrm{I}\,;\mathrm{J})$. Soit K le milieu de [IJ]. La droite (OK) est alors la bissectrice du plus petit angle géométrique $\widehat{\mathrm{IOJ}}$ et il est facile de montrer que $\mathrm{KI} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

On pose I′ le symétrique de I par rapport à O, I_2 le milieu de [OI′] et I_4 celui de $[\mathrm{OI}_2]$. Points obtenus à l'aide des médiatrices adéquates non dessinées ici

- La droite (OK) coupe le cercle de centre O et de rayon $\mathrm{KI} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ en M_1 et M_3, M_3 étant celui qui appartient à la demi-droite ([OK).
- La médiatrice de $[\mathrm{OI}_4]$ coupe le cercle de centre O et de rayon $\mathrm{OI}_2 = \dfrac{1}{2}$ en deux points distincts. M_4 est celui d'ordonnée positive.
- En remarquant que M_2 est le symétrique de M_4 par rapport à la première bissectrice, M_2 est donc l'intersection entre le cercle de centre O et de rayon OM_4 et de celui de centre M_1 passant par M_4.



3 On écrit $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On suppose toujours $z \neq -i$.

a Établir que $f(z) = \dfrac{x}{x^2 + (y+1)^2} - i\dfrac{y+1}{x^2 + (y+1)^2}$.

Par définition,

$$f(z)=\frac{1}{x+iy+i}=\frac{1}{x+(y+1)i}=\frac{x-(y+1)i}{x^2+(y+1)^2}\boxed{=\frac{x}{x^2+(y+1)^2}-i\frac{y+1}{x^2+(y+1)^2}.}$$

(b) Déterminer tous les complexes $z\neq -i$ tels que $f(z)\in\mathbb{R}$. Quel ensemble géométrique reconnaît-on ?

L'écriture précédente est bien la forme algébrique car $\dfrac{x}{x^2+(y+1)^2}\in\mathbb{R}$ et $-\dfrac{y+1}{x^2+(y+1)^2}\in\mathbb{R}$.

Ainsi, en remarquant que $z\neq -i \iff x^2+(y+1)^2\neq 0$, on a :

$$f(z)\in\mathbb{R}\iff \mathrm{Im}\,(f)\,(z)=0\iff -\frac{y+1}{x^2+(y+1)^2}=0\iff y+1=0\iff y=-1.$$

On reconnaît une droite (celle d'équation $y=-1$). Attention, $-i$ étant sur cette droite, on doit l'exclure (car $z\neq -i$), donc les complexes $z=x+iy$ solutions sont tous ceux vérifiant $\boxed{y=-1 \textbf{ et } z\neq -i.}$

Géométriquement, c'est $\boxed{\text{une droite privée d'un point}}$ (le point d'affixe $-i$).

(c) Déterminer tous les complexes $z\neq -i$ tels que $f(z)\in i\mathbb{R}$. Quel ensemble géométrique reconnaît-on ?

De même, en ayant toujours $x^2+(y+1)^2\neq 0$, on a :

$$f(z)\in i\mathbb{R}\iff \mathrm{Re}\,(f)\,(z)=0\iff \frac{x}{x^2+(y+1)^2}=0\ \boxed{\iff x=0.}$$

On reconnaît $\boxed{\text{la droite des imaginaires purs, privée de } -i}$ (car $z\neq -i$).

(d) Déterminer tous les complexes $z\neq -i$ tels que $f(z)\in\mathbb{U}$. Quel ensemble géométrique reconnaît-on ?

Rappel : $\mathbb{U}$ est l'ensemble des complexes de module 1 ou encore le cercle trigonométrique.

$$\begin{aligned}
f(z)\in\mathbb{U}&\iff |f(z)|=1\iff |f(z)|^2=1\iff \left(\frac{x}{x^2+(y+1)^2}\right)^2+\left(-\frac{y+1}{x^2+(y+1)^2}\right)^2=1\\
&\iff \frac{x^2+(y+1)^2}{(x^2+(y+1)^2)^2}=1\\
&\iff \frac{1}{x^2+(y+1)^2}=1\\
&\boxed{\iff x^2+(y+1)^2=1.}\quad \text{(passage à l'inverse de nombres non nuls).}
\end{aligned}$$

On reconnaît l'équation cartésienne $\boxed{\text{du cercle de centre } (0,-1) \text{ et de rayon } 1.}$

4 Soit $z\in\mathbb{U}$ que l'on écrit $z=\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $\theta\in\mathbb{R}$.

(a) Quelle condition faut-il imposer sur θ pour avoir $z\neq -i$? On suppose cette condition vérifiée par la suite.

Résolvons l'équation $z=-i$:

$$z=-i\iff \mathrm{e}^{i\theta}=\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}\iff \theta\equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Par conséquent, $\boxed{z\neq -i\iff \theta\not\equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi].}$

(b) Déterminer la forme algébrique de $f(\mathrm{e}^{i\theta})$. Que remarque-t-on concernant sa partie imaginaire ?

Rappelons que $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

D'après 3.(a) on a :

$$\begin{aligned} f(\mathrm{e}^{i\theta}) &= \frac{\cos(\theta)}{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)+2\sin(\theta)+1} - i\frac{\sin(\theta)+1}{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)+2\sin(\theta)+1} \\ &= \frac{\cos(\theta)}{2(1+\sin(\theta))} - i\frac{\sin(\theta)+1}{2(1+\sin(\theta))} \\ &\boxed{= \frac{\cos(\theta)}{2(1+\sin(\theta))} - \frac{1}{2}i.} \end{aligned}$$

On remarque que $\boxed{\text{sa partie imaginaire est constante égale à } -\frac{1}{2}.}$

L'image du cercle trigonométrique est donc inclus dans la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$.

(c) Vérifier que $f(z) = \dfrac{i}{iz-1}$.

Il suffit de multiplier par $\frac{i}{i}$:

$$f(z) = \frac{1}{z+i} = \frac{i}{i(z+i)} = \frac{i}{iz+i^2} \boxed{= \frac{i}{iz-1}.}$$

(d) Pour tout $\theta \not\equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, montrer que $f(\mathrm{e}^{i\theta}) = \dfrac{1}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\,\mathrm{e}^{-i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$.

On commence par écrire $iz = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)} = \mathrm{e}^{it}$ en posant $t = \dfrac{\pi}{2}+\theta$. On a donc :

$$\begin{aligned} f(\mathrm{e}^{i\theta}) = \frac{i}{\mathrm{e}^{it}-1} &= \frac{i}{\mathrm{e}^{i\frac{t}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{t}{2}} - \mathrm{e}^{-i\frac{t}{2}}\right)} && \text{(factorisation par le demi-angle)} \\ &= \frac{i}{\mathrm{e}^{i\frac{t}{2}} \times 2i\sin(\frac{t}{2})} && \text{(formule d'Euler pour } \sin) \\ &= \frac{1}{2\sin(\frac{t}{2})}\,\mathrm{e}^{-i\frac{t}{2}} \\ &\boxed{= \frac{1}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\,\mathrm{e}^{-i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}.} \end{aligned}$$

(e) Résoudre l'équation $\left|f(\mathrm{e}^{i\theta})\right| = \dfrac{1}{2}$.

D'après la question précédente, on a :

$$\left|f(\mathrm{e}^{i\theta})\right| = \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2\left|\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})\right|} = \frac{1}{2} \qquad \left(\text{car } \left|\mathrm{e}^{-i\frac{t}{2}}\right| = 1\right)$$

Comme $\theta \not\equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ alors $\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4} \not\equiv 0\ [\pi]$ et $\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \neq 0$. D'où,

$$\begin{aligned}
\left|f(\mathrm{e}^{i\theta})\right| = \frac{1}{2} &\iff \left|\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| = 1 \\
&\iff \sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \text{ou} \quad \sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = -1 \\
&\iff \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\
&\iff \frac{\theta}{2} \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \frac{\theta}{2} \equiv -\frac{3\pi}{4}\ [2\pi] \\
&\iff \theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [4\pi] \quad \text{ou} \quad \theta \equiv -\frac{3\pi}{2}\ [4\pi] \\
&\boxed{\iff \theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].}
\end{aligned}$$

L'unique solution est donc i.

Commentaires : Posons J' le point d'affixe $-i$. Le cercle trigonométrique et le cercle de centre J' et de rayon 2 sont bien tangents en J (d'affixe i).