Devoir en temps Libre n°5 – Correction

A rendre pour le jeudi 2 mai 2024

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos(x)(2-\cos(x)) \end{array}$$

1. Justifier qu'il suffit d'étudier f sur $[0;\pi]$. Comment obtient-on alors toute la courbe représentative de f ?

   Tout d'abord, on remarque que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et e est le produit de deux fonctions $2\pi-$périodiques, donc $\boxed{f \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}}$ Il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi;\pi]$.

   Toute la courbe s'obtiendra par $\boxed{\text{translations de vecteurs } (2k\pi, 0) \text{ où } k \in \mathbb{Z}.}$

   Par ailleurs, f est le produit de deux fonctions paires, donc $\boxed{f \text{ est paire.}}$ Il suffit de se restreindre à $[-\pi;\pi] \cap \mathbb{R}_+ = [0;\pi]$; la courbe s'obtiendra par $\boxed{\text{symétrie d'axe } (Oy).}$

2. Dresser le tableau de variations complet de f sur $[0;\pi]$.

   Par produit de fonctions trigonométriques, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (donc sur $[0;\pi]$) et on a :

   $$\begin{aligned} \forall\, x \in [0;\pi], \quad & f(x) = 2\cos x - \cos^2 x, \\ \text{donc,} \quad & f'(x) = -2\sin x + 2\sin x \cos x = 2\sin x(\cos x - 1). \end{aligned}$$

   Pour tout $x \in [0;\pi]$, $\cos x - 1 \leq 0$ car $\cos x \leq 1$, avec égalité en $x = 0$. La fonction $x \mapsto \sin x$ étant connue, on donne le signe à l'aide du tableau suivant :

x	0		π
signe de $\sin x$	0	$+$	0
signe de $\cos x - 1$	0	$-$	
signe de $f'(x)$	0	$-$	0
variations de f	1	$\searrow$	-3

3. Démontrer que f réalise une bijection de $[0;\pi]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

   D'après la question précédente, f est **strictement décroissante** sur $[0;\pi]$. De plus, comme f est **continue** sur cet intervalle, le théorème de la bijection permet d'affirmer que $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } [0;\pi] \text{ sur } J = f([0;\pi]) = [-3;1].}$

4. Déterminer, en justifiant, un intervalle $J' \subset J$ sur lequel f^{-1} est dérivable.

   On ne demande pas de calculer la dérivée de f^{-1}.

   On vient de montrer, en utilisant le théorème de la bijection, que f est une bijection continue de $[0;\pi]$ sur $[-3;1]$. De plus, comme f est dérivable sur $[0;\pi]$, le théorème de dérivabilité d'une bijection réciproque permet d'affirmer que f est dérivable sur $[0;\pi]$ sauf en les points $y = f(x)$ où $x \in [0;\pi]$ vérifie l'équation $f'(x) = 0$. D'après l'étude du signe de la dérivée (voir tableau précédent), seuls $x = 0$ et $x = \pi$ sont solutions de cette équation, donc on exclut leurs images $y = f(0) = 1$ et $y = f(\pi) = -3$.

   Finalement, $\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable sur } J' =]-3;1[.}$

5. Dans cette question, on se donne $y \in J$.

   (a) Résoudre l'équation d'inconnue X suivante :
   $$2X - X^2 = y$$
   Laquelle des solutions appartient à $[-1;1]$?
   Cette équation se réécrit $X^2 - 2X + y = 0$.
   Le discriminant est $\Delta = (-2)^2 - 4y = 4(1-y)$.
   Comme $y \in J = [-3;1]$, on a en particulier $1 - y \geq 0$ donc $\Delta \geq 0$.
   Les racines (éventuellement confondues lorsque $y = 1$) sont données par :
   $$\boxed{X_1 = \frac{2 - \sqrt{4(1-y)}}{2} = 1 - \sqrt{1-y}} \text{ et } \boxed{X_2 = \frac{2 + \sqrt{4(1-y)}}{2} = 1 + \sqrt{1-y}}$$
   Ensuite, par composition de $y \mapsto 1 - y$ (fonction décroissante sur $]-\infty;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$) avec la fonction racine carrée (croissante sur $\mathbb{R}_+$), on en déduit que la fonction $y \mapsto \sqrt{1-y}$ est décroissante sur $]-\infty;1]$, donc en particulier sur $[-3;1]$. Ceci permet d'obtenir l'encadrement $1 \leq \sqrt{1-y} \leq 2$.

   Pour X_1, on a alors : $2 \leq X_1 = 1 + \sqrt{1-y} \leq 3$.
   Pour X_2, on a : $-2 \leq -\sqrt{1-y} \leq -1$ ce qui donne $-1 \leq X_2 = 1 - \sqrt{1-y} \leq 1$.

   Conclusion : $\boxed{\text{l'équation } 2X - X^2 = y \text{ admet une unique solution } X \text{ dans } [-1;1]}$:
   $$\boxed{X = 1 - \sqrt{1-y}}$$

   (b) Conclure quant à l'expression de $f^{-1}(y)$ au moyen d'un arcosinus.
   Soit $y \in J = [-3;1]$. On cherche à résoudre l'équation $f(x) = y$ dont l'inconnue est $x \in [0;\pi]$. On obtient :
   $$\cos x(2 - \cos x) = y$$
   En posant $X = \cos x$, on trouve que $\cos x$ est solution de l'équation $X(2 - X) = y$ c'est-à-dire $2X - X^2 = y$.
   Or $\cos x \in [-1;1]$ et d'après la question précédente, cette équation possède une unique solution dans $[-1;1]$ donnée par $X = 1 - \sqrt{1-y}$.

   On en déduit que :
   $$\cos x = \underbrace{1 - \sqrt{1-y}}_{\in[-1;1]} \iff x = \arccos\left(1 - \sqrt{1-y}\right)$$

   Conclusion : $\boxed{\forall\, y \in J = [-3;1], \quad f^{-1}(y) = \arccos\left(1 - \sqrt{1-y}\right).}$

6. Tracer dans un même repère orthonormé les courbes représentatives de f (restreinte à $[0;\pi]$) et de f^{-1}.

   On prendra 2 cm pour 1 unité et on pourra utiliser l'approximation $\pi \simeq 3,1$.