Nombres complexes II - équations et Géométrie

Exercice 1 : Calculer les racines carrées des nombres suivants sous forme exponentielle et algébrique si possible

1. 1
2. $-2\,\mathrm{i}$
3. $3+4\,\mathrm{i}$
4. $8-6\,\mathrm{i}$
5. $5+12\,\mathrm{i}$
6. $7+4\,\mathrm{i}$
7. $7-24\,\mathrm{i}$
8. $-15+8\,\mathrm{i}$
9. $9+40\,\mathrm{i}$

Exercice 2 :

1. Calculer les racines carrées de $\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$.

   En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.
2. En suivant la même idée, calculer les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 3 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2+z+1=0$.
2. $z^2-(1+2i)z+\mathrm{i}-1=0$.
3. $z^2-\sqrt{3}z-\mathrm{i}=0$.
4. $z^3-(3+2i)z^2+(3+11i)z-2(1+7i)=0$.
5. $z^4+10z^2+169=0$.
6. $z^2-(3+4\,\mathrm{i})z-1+5\,\mathrm{i}=0$.
7. $(2+i)z^2-(5-i)z+2-2\,\mathrm{i}=0$.
8. $z^4-(5-14\,\mathrm{i})z^2-2(12+5\,\mathrm{i})=0$
9. $z^4-(3+8\,\mathrm{i})z^2-16+12\,\mathrm{i}=0$.
10. $z^4+(3-6\,\mathrm{i})z^2-2(4+3\,\mathrm{i})=0$.
11. $z^4+(2\,\mathrm{i}-1)z^2-1-i=0$.

Exercice 4 : On considère le polynôme $\mathrm{P}(z)=z^4-3z^3+\dfrac{9}{2}z^2-3z+1$.

1. Montrer que si z est une racine de P, alors $\overline{z}$ et $\dfrac{1}{z}$ sont également des racines de P.
2. Vérifier que $1+\mathrm{i}$ est une racine de P.
3. Déterminer toutes les racines de P.

Exercice 5 : Déterminer toutes les solutions réelles et imaginaires pures de l'équation d'inconnu $z\in\mathbb{C}$

$$z^4-4(1+i)z^3+12\,\mathrm{i}\,z^2+8(1-i)z-5=0. \qquad \text{(IX.1)}$$

En déduire toutes les solutions complexes.

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} z+z'=4+2\,\mathrm{i} \\ zz'=2+4\,\mathrm{i}\end{cases}$
2. $\begin{cases} a+b=1+\mathrm{i} \\ ab=2-\mathrm{i}\,.\end{cases}$
3. $\begin{cases} u+v=2 \\ uv=2\end{cases}$
4. $\begin{cases} u+v=3 \\ \dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=\dfrac{9+3\,\mathrm{i}}{10}\end{cases}$
5. $\begin{cases} u+v=1 \\ u^2+v^2=-1+2\,\mathrm{i}\end{cases}$
6. $\begin{cases} u^2v+uv^2=6 \\ u^3+v^3=9\end{cases}$

Exercice 7 : Soit $\omega=e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On pose $\begin{cases}\mathrm{A}=\omega+\omega^2+\omega^4 \\ \mathrm{B}=\omega^3+\omega^5+\omega^6\end{cases}$.

1. Calculer $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ et AB.
2. En déduire A et B.

Exercice 8 : Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

1. Calculer $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4$.
2. En déduire une équation du second degré vérifiée par $\Omega = \omega + \dfrac{1}{\omega}$, puis les valeurs de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.
3. Comment utiliser ce qui précède pour construire un pentagone régulier à la règle et au compas ?

Exercice 9 : Trouver les racines cubiques des nombres suivants :

1. $2-2i$
2. $11+2i$
3. $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.

Exercice 10 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $\left(\dfrac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$.
2. $27(z-1)^6+(z+1)^6 = 0$.
3. $z^4 = \dfrac{16\sqrt{2}}{1-i}$
4. $z^8 = \dfrac{1-i}{\sqrt{3}-i}$

Exercice 11 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation (E) : $z^{n+1} = \bar{z}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Si $z \neq 0$ est une solution de (E), que vaut $|z|$? Résoudre alors (E).

Exercice 12 : Résoudre de deux manières l'équation $(z+1)^5-(z-1)^5 = 0$.

En déduire la valeur de $\operatorname{cotan}\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 13 : Résoudre l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ dans $\mathbb{C}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 14 :

1. Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\omega^k$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et ω une racine n-ième de 1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\omega^{k-1}$.

Exercice 15 : Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

1. Factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme $P(z) = z^{n-1}+\cdots+z+1$.
2. Démontrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = n$.
3. En déduire que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Exercice 16 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^3+(2+i)z^2-3(1+4i)z+5(i-2) = 0$.
2. $z^4-8(1+i)z^2+63+16i = 0$
3. $z^6+z^3(z+1)^3+(z+1)^6 = 0$
4. $z^3-(2+i)z^2+2(1+i)z-2i = 0$
5. $z^2+2(1+i)z-5(1+2i) = 0$
6. $z^3 = 4\sqrt{2}(1+i)$
7. $e^z+e^{-z} = \dfrac{3}{2}i$
8. $z^2-2z\cos(\theta)+1 = 0, \theta \in \mathbb{R}$.
9. $z^4-(5-14i)z^2-2(12+5i) = 0$.
10. $e^z = 1+i$.
11. $z^4+3z^2-4 = 0$

Exercice 17 : Soit $(x,y,z) \in \mathbb{U}^3$. Montrer que $|x+y+z| = |xy+xz+yz|$.

Exercice 18 : Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.

Calculer la longueur d'un côté d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité.

Exercice 19 : Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes :

1. $|z| = 3$
2. $|z-3| = 2$
3. $|z-2| = 4$
4. $|z+i| \leqslant 5$
5. $|z-2| = |z-4\,\mathrm{i}\,|$
6. $|2z-\mathrm{i}\,| = 1$
7. $\left|\dfrac{z+1}{z+2}\right| = 1$
8. $\dfrac{|3z-2|}{|z+3\,\mathrm{i}\,|} = 3$
9. $z+\overline{z} = z\overline{z}$

Exercice 20 : Montrer que les points du plan dont l'affixe vérifie $|z-3| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}|z-5|$ forment un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 21 (Une équation de degré 3) : On considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 - z^2 + 2 = 0 \quad \text{(E)}$$

1. Vérifier que $z^3 - z^2 + 2 = (z+1)(z^2-2z+2)$ pour tout nombre complexe z.
2. En déduire la résolution de l'équation (E).
3. Placer dans un repère orthonormé les points dont les affixes sont des solutions de l'équation.
4. Démontrer que le triangle obtenu est isocèle.

Exercice 22 : Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point d'affixe $\dfrac{2}{1+\mathrm{i}\,t}$ appartient au cercle de centre 1 et de rayon 1.

Exercice 23 :

1. Traduire géométriquement la condition

$$(z-i)\overline{(z-i)} = 9$$

2. Développer et simplifier autant que possible l'expression $(z-i)\overline{(z-i)}$.
3. Représenter dans le plan complexe l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie

$$|z|^2 - 2\mathrm{Im}\,(z) = 8.$$

Exercice 24 : Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes. Sauf mention contraire, on résoudra ces équations modulo 2π et modulo π.

1. $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}$
2. $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4}\ \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$
3. $\arg(z^2) = 0$
4. $\arg(z-1) = \dfrac{\pi}{2}$
5. $\arg(z-1-2\,\mathrm{i}\,) = \dfrac{\pi}{3}$
6. $\arg(z-3\,\mathrm{i}\,+1) = \dfrac{3\pi}{2}$
7. $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.
8. $\arg\left((z-1-2\,\mathrm{i}\,)^2\right) = \dfrac{\pi}{3}$
9. $\arg(z-3\,\mathrm{i}+1) = \arg(z-\mathrm{i}\,)$

Exercice 25 : Dans chacun des cas suivants, vérifier si le triangle ABC est rectangle en B ;

1. $A(3+2\,\mathrm{i}\,)$, $B(0)$ et $C\left(-1+\dfrac{3}{2}\,\mathrm{i}\right)$;
2. $A(2-\mathrm{i}\,)$, $B(1-4\,\mathrm{i}\,)$ et $C(-2-3\,\mathrm{i}\,)$;
3. $A(-4)$, $B(-2+3\,\mathrm{i}\,)$ et $C(4-\mathrm{i}\,)$.

Dans les cas où il est rectangle vérifier s'il est isocèle.

Exercice 26 : Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1. les points d'affixes j, z, jz sont alignés.
2. les points d'affixes z, z^2, z^3 forment un triangle rectangle.
3. Les points d'affixes 1, z et z^3 sont alignés.

Exercice 27 : Soient A, B, C trois points du plan complexe d'affixes a, b, c. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Démontrer qu'il y a équivalence entre :

1. Le triangle ABC est équilatéral.
2. L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet pour solution j ou $\overline{j}$.
3. $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.
4. Bonus : $\dfrac{1}{b-c} + \dfrac{1}{c-a} + \dfrac{1}{a-b} = 0$.

Exercice 28 : Soit ABC un triangle du plan affine euclidien. On construit à l'extérieur de ce triangle les trois triangles équilatéraux de base [AB], [AC] et [BC].

Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

Exercice 29 : Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations géométriques données par l'écriture complexe suivante :

1. $z \longmapsto \mathrm{i}\,\overline{z}$
2. $z \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{i}} z$
3. $z \longmapsto z + (2 + \mathrm{i})$
4. $z \longmapsto (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - \mathrm{i})$
5. $z \longmapsto (1 + \mathrm{i}\tan\alpha)z - \mathrm{i}\tan\alpha$, $\alpha \in \left[0\,; \dfrac{\pi}{2}\right[$.
6. $z \longmapsto z + 3 - \mathrm{i}$
7. $z \longmapsto 2z + 3$
8. $z \longmapsto \mathrm{i}\,z + 1$
9. $z \longmapsto (1 - \mathrm{i})z + 2 + \mathrm{i}$

Exercice 30 : Soit r_1 la rotation de centre A d'affixe -1 et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre B d'affixe $j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi/3}$ et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

Montrer que $r_2 \circ r_1$ est une symétrie centrale dont on déterminera l'affixe du centre.

Exercice 31 : On donne A, d'affixe $1 + \mathrm{i}$, B, d'affixe $1 - \mathrm{i}$ et C, d'affixe $4 + 3\mathrm{i}$ dans le plan complexe.

Déterminer la nature du triangle ABA′ où A′ est le symétrique de A par rapport au centre de gravité de ABC.

Exercice 32 : Dans le plan complexe, on donne A(2), B$(1 - \mathrm{i})$ et C$(1 + \mathrm{i})$.

1. Quelle est la nature de ABC ?
2. Γ est le cercle de diamètre [BC] et r est la rotation de centre A qui envoie B sur C. Si M est un point de Γ et si M′ est son image par r, démontrer que C, M et M′ sont alignés.