Primitives

Dans ce devoir, il sera reconnu que toutes les primitives, sauf mention contraire, seront trouvées à une constante additive près qu'il ne sera donc pas nécessaire de faire figurer.

Exemple 1 : $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto x+2$ sont des primitives de $x \longmapsto 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1 : Montrer rapidement qu'une primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ sur $]1\,;+\infty[$ est

$$\mathrm{F} : x \longmapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Exemple 12 : $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ qui s'annule en zéro.

Exemple 3 :

- $x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ admet pour primitive $x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}x^{k+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : $\displaystyle\int^x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x}$.

Exercice 3 : $\displaystyle\int^x \frac{\ln(t+3)}{t+3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln^2(x+3)$ sur $]-3\,;+\infty[$.

Exemple 10 :

- $\forall\,\alpha \in \mathbb{R}_+,\ \displaystyle\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}$.

  En particulier, retenez que, $\forall\,n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

Exercice 5 : Déterminer $\displaystyle\int^x \mathrm{e}^{-t}\sin(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}
\int^x \mathrm{e}^{-t}\sin(t)\,\mathrm{d}t &= \int^x \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})t}\right)\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int^x \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}}{-1+\mathrm{i}}\right) = -\mathrm{Im}\left(\frac{(1+\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}\\
&= -\big(\cos(x)+\sin(x)\big)\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 6 : Sans justification, donner la dérivée de la fonction définie par $x \longmapsto \displaystyle\int_{x^2}^{2x^2} \arctan(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\left(\int_{x^2}^{2x^2} \arctan(1+t)\,\mathrm{d}t\right)' = 4x\arctan(2x^2) - 2x\arctan(x^2).$$

Exemple 13 : À l'aide d'une IPP justifiée, calculer :

$$\int^x 2t\arctan(t)\,\mathrm{d}t = (1+x^2)\arctan(x) - \int^x \frac{1+t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = (1+x^2)\arctan(x) - x.$$

Exercice 8 : Déterminer une primitive de $x \longmapsto \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$.

1. En posant $u : x \longmapsto x$ et $v : x \longmapsto \arctan(x)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$:

$$\int^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int^x \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\underbrace{(1+x^2)}_{>0}.$$

Exercice 9 : Calculer $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6-t^2}}\,\mathrm{d}t$ en posant $u = \dfrac{t}{\sqrt{6}}$.

Le changement de variables a pour but de se ramener à quelque chose de connu.

Ici nous avons une fraction avec une racine carrée au dénominateur et sous la racine un polynôme de degré 2. Ce que l'on sait intégrer c'est :

$$\int^x \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u = \arcsin(u),$$

car on connaît la dérivée de la fonction arcsin, c'est $\arcsin' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$.

On va donc essayer de s'y ramener.

$$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)^2}}\,\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{6}}.$$

Il est alors légitime de penser à poser $u = \dfrac{t}{\sqrt{6}}$ i.e. $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{6}}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6-t^2}}\,\mathrm{d}t &\underset{\substack{t\in[\sqrt{3};\sqrt{6}]\\ \Updownarrow \\ u\in\left[\frac{1}{\sqrt{2}};1\right]}}{=} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u\\ &= \Big[\arcsin(u)\Big]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} = \arcsin(1) - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Exemple 16 : En posant $u = t + \sqrt{t^2+1}$, calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \Big[\ln(u)\Big]_0^{1+\sqrt{2}} = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Exercice 11 : Calculer $\displaystyle\int^x \frac{\sqrt{1+t^6}}{t}\,\mathrm{d}t$.

On pose $u = x^6$ puis $v = \sqrt{1+u}$ (ou directement $u = \sqrt{1+x^6}$) et on obtient :

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x^6}\,x^5 dx = \frac{1}{6}\int \frac{\sqrt{1+u}}{u}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{6}\int \frac{v}{v^2-1}2v\,dv = \frac{1}{3}\int \frac{v^2}{v^2-1}\,dv = \frac{1}{3}\left(v + \int \frac{1}{v^2-1}\,dv\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(v + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{v-1}{v+1}\right|\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\sqrt{1+x^6} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^6}-1}{\sqrt{1+x^6}+1}\right|\right)
\end{aligned}$$

Exemple 17 :

- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t = \int_\pi^{3\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Exemple 18 : Primitives de $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-a)^2+b^2}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

1. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^2+b^2} = \frac{1}{b}\int^{\frac{x-a}{b}} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)$.

Exemple 19 : La décomposition en éléments simples de $f(x) = \dfrac{2x+3}{(x+1)(x-2)}$ s'écrit :

$$f(x) = -\frac{1}{3(x+1)} + \frac{7}{3(x-2)}.$$

Toute primitive de f sur tout intervalle I contenu dans $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ est de la forme :

$$x \longmapsto -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{7}{3}\ln|x-2| = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{(x-2)^7}{x+1}\right|.$$

Exemple 22 (Cas où $\Delta < 0$) :

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1} = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Exercice 17 : Calculer une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ en précisant le ou les intervalles considérés.

On travaille sur $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

On pose $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ et donc $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

$$\int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\,\frac{2dt}{1+t^2} = \int 2\frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| = \ln\left|\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right|$$
$$= \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|,$$

$$\int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin(x)+1}{\sin(x)-1}\right|,$$

ou bien, en posant $u=x+\frac{\pi}{2}$,

$$\int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos(u-\frac{\pi}{2})}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{\sin(u)}\,\mathrm{d}u = \ln\left|\tan\left(\frac{u}{2}\right)\right| = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Exemple 26 :

1. $\displaystyle\int^x \cos(t)\sin^3(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\sin^4(x).$
2. $\displaystyle\int^x \cos^3(t)\,\mathrm{d}t = \int^{\sin(x)} (1-u^2)\,\mathrm{d}u = \sin(x)-\frac{1}{3}\sin^3(x).$

Exemple 27 :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3t)\cos(4t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\cos(7t)+\cos(-t)\Big)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{14}\sin(7x)+\frac{1}{2}\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{7}.$$

Primitives

Dans ce devoir, il sera reconnu que toutes les primitives, sauf mention contraire, seront trouvées à une constante additive près qu'il ne sera donc pas nécessaire de faire figurer.

Exemple 1 : Une primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^{\omega x}$ est $x \longmapsto \dfrac{1}{\omega}\mathrm{e}^{\omega x}$ pour $\omega \in \mathbb{C}^*$.

Exercice 1 : Montrer rapidement qu'une primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$ est

$$\mathrm{F} : x \longmapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Exemple 2 :

- La fonction ln est l'unique primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *s'annulant en* 1 .

Exemple 4 : Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto 1 + \mathrm{i}\,x$ est $x \longmapsto x + \mathrm{i}\,\dfrac{x^2}{2}$.

Exercice 2 : $\displaystyle\int^x t^2 + \mathrm{i}\,\cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}x^3 + \mathrm{i}\,\sin(x).$

Exercice 3 : $\displaystyle\int^x (3t-1)\left(3t^2-2t+3\right)^3 \mathrm{d}t = \frac{1}{8}\left(3t^2-2t+3\right)^4.$

Exemple 10 :

- Il faudra également être capable de reconnaître immédiatement les dérivées de composées les plus classiques, qui permettent de calculer directement des intégrales pas toujours évidentes à repérer. Ainsi,
  - $\displaystyle\int_0^\pi \cos(t)\sin^3(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4}\sin^4(t)\right]_0^\pi = 0.$
  - $\displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}e^{t^2}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e}-1}{2}.$

Exercice 5 : Déterminer $\displaystyle\int^x \mathrm{e}^{-t}\cos(t)\,\mathrm{d}t.$

$$\begin{aligned}\int^x \mathrm{e}^{-t}\cos(t)\,\mathrm{d}t &= \int^x \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})t}\right)\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\int^x \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}}{-1+\mathrm{i}}\right) = -\mathrm{Re}\left(\frac{(1+\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}\\ &= -\left(\sin(x)+\cos(x)\right)\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 6 : Sans justification, donner la dérivée de la fonction définie par $x \longmapsto \displaystyle\int_{x^2}^{2x^2} \ln(1+t)\,\mathrm{d}t$.

$$\left(\int_{x^2}^{2x^2} \ln(1+t)\,\mathrm{d}t\right)' = 4x\ln(1+2x^2) - 2x\ln(1+x^2).$$

Exemple 13 : À l'aide d'une IPP justifiée, calculer :

$$\int^x t\sin(t)\,\mathrm{d}t = x(-\cos(x)) - \int^x 1(-\cos(t))\,\mathrm{d}t = -x\cos(x)+\sin(x).$$

Exercice 8 : Déterminer une primitive de $x \longmapsto \arcsin(x)$ sur $]-1\,;1[$.

Sur $]-1\,;1[$, les fonctions $u : x \longmapsto x$ et $v : x \longmapsto \arcsin(x)$ de classe $\mathscr{C}^1$ et une IPP s'écrit :

$$\int^x \arcsin(t)\,\mathrm{d}t = x\arcsin(x) - \int^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}.$$

On aura pris garde à $1-t^2>0$, $\forall\, t\in\,]-1\,;1[$ avant d'intégrer.

Exercice 9 : Calculer $\displaystyle\int_3^6 \frac{1}{\sqrt{6t-t^2}}\,\mathrm{d}t$ en posant $u=\dfrac{t-3}{3}$.

Essayons d'écrire ce qu'il y a sous la racine, $9t-t^2$ sous la forme $1-u^2$:

$$6t-t^2 = 9-(t-3)^2 = 9\left(1-\left(\frac{t-3}{3}\right)^2\right).$$

Donc il est naturel d'essayer le changement de variables $u=\dfrac{t-3}{3}$ pour lequel $6t-t^2=9(1-u^2)$ et $\mathrm{d}t = 3\,\mathrm{d}u$.

$$\int_3^6 \frac{1}{\sqrt{6t-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{9(1-u^2)}}3\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \Big[\arcsin(u)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Remarque : Comme $t\in[3\,;6]$, alors $\dfrac{t-3}{3}\in[0\,;1]$, il est donc tout aussi naturel de poser $\sin(v)=\dfrac{t-3}{3} \iff \cos(v)\mathrm{d}v = \dfrac{1}{3}\,\mathrm{d}t \iff \mathrm{d}t = 3\cos(v)\mathrm{d}v$.

On a alors :

$$\int_3^6 \frac{1}{\sqrt{6t-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_3^6 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\left(\frac{t-3}{3}\right)^2}} \underset{\substack{t\in[3;6]\\ \Updownarrow \\ v\in[0;\frac{\pi}{2}]}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(v)\mathrm{d}v}{\sqrt{1-\sin^2(v)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{\cos(v)}\,\mathrm{d}v}{\cancel{\cos(v)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}v = \frac{\pi}{2}.$$

Exemple 15 : En posant $x = \sin(u)$, calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1+\cos(2u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[u + \frac{1}{2}\sin(2u)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 11 : Calculer $\displaystyle\int^x \frac{1}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{(1+x)-(1-x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\sqrt{1-x}}{x}\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\int \frac{u}{u^2-1} 2u\,\mathrm{d}u + \int \frac{v}{1-v^2} 2v\, dv\right)\\
&\text{(en posant } u = \sqrt{1+x} \text{ et } v = \sqrt{1-x})\\
&= \int \left(1 + \frac{1}{u^2-1}\right)\mathrm{d}u + \int (-1) + \frac{1}{1-v^2}\, dv\\
&= u - v + \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right| + \ln\left|\frac{1+v}{1-v}\right|\right)\\
&= \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} + \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{1-\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}}\right| + \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}\right|\right).
\end{aligned}$$

Exemple 17 :

- $\forall n \in \mathbb{N}$ et $a > 0$, $\displaystyle\int_{-a}^a x^{2n}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a x^{2n}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-a}^a x^{2n+1}\,\mathrm{d}x = 0$.

Exemple 18 : Primitives de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{b^2-x^2}}$ avec $b > 0$.

1. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{b^2-t^2}} = \int^{\frac{x}{b}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{b}\right).$

Exemple 20 : La décomposition en éléments simples de $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-1)^2(x+2)}$ s'écrit :

$$f(x) = \frac{2}{3(x-1)^2} + \frac{1}{9(x-1)} - \frac{1}{9(x+2)}.$$

Toute primitive de f sur tout intervalle I contenu dans $\mathbb{R}\setminus\{1, -2\}$ est de la forme :

$$x \longmapsto -\frac{2}{3(x-1)} + \frac{1}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|.$$

Exemple 24 (Cas où $\Delta > 0$) :

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{2t^2-t-1} = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)(2t+1)} = \int^x \left(\frac{\frac{1}{3}}{t-1} - \frac{\frac{2}{3}}{2t+1}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|.$$

Exercice 17 : Calculer une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{\operatorname{sh}(x)}$ en précisant le ou les intervalles considérés.

On travaille sur $]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$. En posant $t = \mathrm{e}^x$ et donc $dx = \dfrac{dt}{t}$,

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh}(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{t+\frac{1}{t}}\,\frac{dt}{t} = 2\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2\arctan(\mathrm{e}^x),$$

ou bien

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh}(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right),$$

sur les mêmes intervalles ne contenant pas 0.

Exemple 26 :

1. $\displaystyle\int^x \cos^3(t)\sin^3(t)\,\mathrm{d}t = \int^x \frac{\sin^3(2t)}{8}\,\mathrm{d}t \overset{u=\cos(2t)}{=} \frac{1}{8}\int^{\cos(2x)} \frac{u^2-1}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{3}\cos^3(2x) - \cos(2x)\right).$
2. $\displaystyle\int^x \cos^2(t)\sin^3(t)\,\mathrm{d}t = -\int^{\cos(x)} (u^2-u^4)\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{3}\cos^3(x) + \frac{1}{5}\cos^5(x).$

Exemple 28 : Avec le changement de variables $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, on obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}t}{1-\sin(t)} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u}{1-\frac{2u}{1+u^2}} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2\,\mathrm{d}u}{(1-u)^2} = \left[\frac{2}{1-u}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 1+\sqrt{3}.$$

Index