X

Les Nombres complexes
Géométrie & Équations

Contenu

I Racines n-ièmes d'un nombre complexe

I.1 Racines carrées d'un nombre complexe

Définition 1 (Racine carré) : On appelle *racine carrée* d'un nombre complexe z tout nombre complexe u vérifiant :

$$u^2 = z.$$

ATTENTION

Si $a \notin \mathbb{R}_+$, il est strictement interdit d'écrire $\sqrt{a}$.

Par exemple, pour -1, on aurait alors :

$$1 = \sqrt{1^2} = \sqrt{-1 \times -1} = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1 \text{ !!!}$$

Exemples 1 :

- 0 admet 0 comme unique racine carrée complexe.
- Si $\alpha \in \mathbb{R}_+$ alors ses racines carrées sont $\pm\sqrt{\alpha}$, racines de $\mathrm{X}^2 - \alpha$.
- -1 admet deux racines carrées complexes : i et $-\mathrm{i}$ qui sont les racines du polynôme $\mathrm{X}^2 + 1$.
- Si $\alpha \in \mathbb{R}_-$ alors ses racines carrées sont $\pm\mathrm{i}\sqrt{-\alpha}$, racines de $\mathrm{X}^2 + \beta$ où $\beta = -\alpha \geqslant 0$.

Théorème 1 :

Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées.

Exemples 2 :

- Les racines carrées de $\mathrm{i} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ sont $\pm\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \pm\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$.
- Les racines carrées de $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ sont $\pm\sqrt[4]{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}} = \pm\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$.

Exemple 3 (Racines carrées de $1-\mathrm{i}\sqrt{3}$) :

Posons $z = 3 - 4\,\mathrm{i}$ et $u \in \mathbb{C}$ tel que $z = u^2$.

Sous forme exponentielle :

1. On cherche, tout d'abord, la forme exponentielle de z : $\quad z = 2\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
2. Les racines carrées sont alors évidentes à trouver :

$$u_1 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \qquad \text{et} \qquad u_2 = -\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}.$$

Sous forme algébrique : Il suffit de suivre la démonstration.

1. On pose $u = a + \mathrm{i}\,b$.
2. $z = u^2 \iff 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} = a^2 - b^2 + 2\,\mathrm{i}\,ab$ et $2 = |u|^2 \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = 2 \\ 2ab = -\sqrt{3}. \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} a^2 = \dfrac{3}{2} \\ b^2 = \dfrac{1}{2} \\ 2ab = -\sqrt{3} \end{cases} \iff \begin{cases} a = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}} \\ b = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} \\ 2ab = -\sqrt{3}. \end{cases}$$

$$\iff u = \sqrt{2}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \mathrm{i}\,\frac{1}{2}\right).$$

Comme $y < 0$, a et b doivent être de signe contraire et on ne garde que celles-ci :

$$u_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right) \qquad \text{et} \qquad u = -\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right).$$

Exercice 1 : Déterminer les racines carrées de $-1 + \mathrm{i}$ par deux méthodes.

Théorème 2 (Équation du second degré à coefficients complexes) : Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. On considère l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad (\mathrm{Tr}.\mathbb{C})$$

On appelle encore *discriminant* de l'équation (Tr.$\mathbb{C}$), noté Δ, le nombre complexe défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$, (Tr.$\mathbb{C}$) possède une unique solution, dite double : $\quad z = -\dfrac{b}{2a}$.

- Si $\Delta \neq 0$, (Tr.$\mathbb{C}$) possède deux solutions : $z = \dfrac{-b \pm \delta}{2a}$, où δ est **une** racine carrée de Δ.

Exemple 4 : $(1+\mathrm{i})z^2 + (3+\mathrm{i})z + (-6+4\mathrm{i}) = 0$.

$\Delta = (3+\mathrm{i})^2 - 4(1+\mathrm{i})(-6+4\mathrm{i}) = 48 + 14\mathrm{i}$.

On cherche $\delta = a + \mathrm{i}\, b$ tels que :

$$\delta^2 = \Delta \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 48 \\ a^2 + b^2 = 50 \\ 2ab = 14 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = 49 \\ b^2 = 1 \\ ab = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 7 \\ b = 1 \end{cases} \underset{\text{car } ab>0}{\text{ou}} \begin{cases} a = -7 \\ b = -1 \end{cases}$$

On prend $\delta = 7 + \mathrm{i}$.

L'équation admet ainsi les deux solutions :

$z_1 = \dfrac{-(3+\mathrm{i}) - (7+\mathrm{i})}{2(1+\mathrm{i})} = \dfrac{-10-2\mathrm{i}}{2(1+\mathrm{i})} = \dfrac{-5-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{-(5+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2} = -3 + 2\mathrm{i}$, et

$z_2 = \dfrac{-(3+\mathrm{i}) + (7+\mathrm{i})}{2(1+\mathrm{i})} = \dfrac{4}{2(1+\mathrm{i})} = 1 - \mathrm{i}$.

ATTENTION Les deux racines **ne** sont absolument **pas** conjuguées.

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 - 2\mathrm{i}\, z - 1 + 2\mathrm{i} = 0$.
2. $z^4 + 1 = 0$.

Proposition 3 (Relations coefficients-racines) : Soient a, b, $c \in \mathbb{C}$ tel que $a \neq 0$.

z_1 et z_2 sont les racines de (Tr.$\mathbb{C}$) si, et seulement si $\begin{cases} z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} \\ z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$

Exemple 5 (Système non linéaire) :

Pour résoudre un système de la forme $\begin{cases} x+y = \mathrm{S} \\ xy = \mathrm{P} \end{cases}$, on introduit donc l'équation $z^2 - \mathrm{S}z + \mathrm{P} = 0$ dont x et y sont les solutions.

Exercice 3 : Trouver deux nombres complexes de somme i et de produit 2.

I.2 Racines n-ièmes de l'unité

Définition 2 (Racines n-ièmes) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$.

- On appelle *racine n-ième* de z tout nombre complexe ω vérifiant
$$\omega^n = z.$$
- On appelle *racine n-ième de l'unité* tout nombre complexe ω vérifiant
$$\omega^n = 1.$$

On note $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \,/\, z^n = 1\}$ leur ensemble.

Remarques :

— Toute racine d'un nombre complexe z est donc racine du polynôme $X^n - z$.
— Toute racine de l'unité est de module 1 *i.e.* $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$.

Exemples 6 :

- Les racines carrées de l'unité sont 1 et -1.
- Les racines cubiques de l'unité sont 1, $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{3}}$ et $\overline{\mathrm{j}} = \mathrm{e}^{\frac{-2\,\mathrm{i}\,\pi}{3}} = \mathrm{j}^2 = -1 - \mathrm{j}$.
- Les racines quatrièmes de l'unité sont ± 1 et $\pm\,\mathrm{i}$.

Autrement dit,

$$\mathbb{U}_1 = \{1\} \qquad \mathbb{U}_3 = \{1,\ \mathrm{j},\ \overline{\mathrm{j}}\}$$
$$\mathbb{U}_2 = \{1,\ -1\} \qquad \mathbb{U}_4 = \{1, -1,\ \mathrm{i},\ \overline{\mathrm{i}}\}$$

Théorème 4 (Caractérisation des racines de l'unité) :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi k}{n}},\ k \in [\![0\,;n-1]\!] \right\}.$$

En particulier, $\mathbb{U}_n$ est constitué de n éléments deux à deux distincts.

Interprétation géométrique : Pour $n \geqslant 3$, les points $M_k\left(\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}}\right)$ définissent les sommets d'un polygone régulier à n côtés.

En effet, comme $\left|\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}}\right| = 1$, il est déjà clair que tous les points d'affixe une racine n-ième de l'unité sont sur le cercle trigonométrique.

Dans le plan complexe muni d'un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, considérons $\mathrm{M}_k(z_k)$ un point d'affixe $z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{n}}$, une racine n-ième de l'unité. Alors :

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}_k}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}_{k+1}}\right) &= \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}_{k+1}}\right) - \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}_k}\right)\\ &= \arg(z_{k+1}) - \arg(z_k) = \arg\left(\frac{z_{k+1}}{z_k}\right)\\ &= \arg\left(\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{n}(k+1-k)}\right) = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{n}} \equiv \frac{2\pi}{n}\;[2\pi]\,.\end{aligned}$$

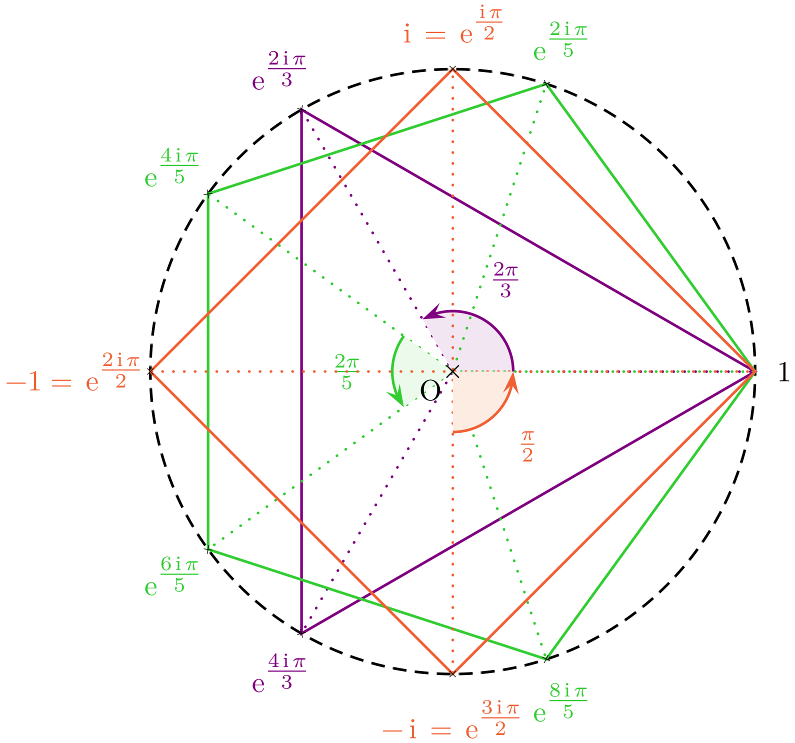

Figure X.1 – Polygones réguliers à 3, 4 et 5 sommets.

Exercice 4 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^3 = -\mathrm{i}\,.$
2. $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^4 = 1.$

Proposition 5 (Propriétés des racines de l'unité) : Soient $n \geqslant 2$ un entier.

Alors :

1. Si on note $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{n}}$ alors $\mathbb{U}_n = \left\{\omega^k,\ k \in [\![0\,;n-1]\!]\right\}$.
2. $1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{n-1} = 0$ si, et seulement si $\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$.
3. La somme des racines n-ièmes de l'unité est égale à 0 : $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0$.

I.3 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Théorème 6 : Soient $\mathrm{Z} \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Z admet exactement n racines n-ièmes.
2. Plus précisément, si z_0 est une racine n-ième de Z alors les racines n-ièmes de Z sont les
$$z_0\, \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}}, \quad k \in [\![0\,;n-1]\!]\,.$$

Pour trouver toutes les racines n-ièmes d'un nombre complexe Z, il suffit donc d'en exhiber une, notée ω, et de la multiplier par toutes les racines n-ièmes de l'unité.

Géométriquement, toutes les racines n-ièmes sont donc obtenues à partir du point d'affixe ω par $n-1$ rotations de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$.

Exercice 5 :

1. Calculer les racines cubiques de $\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$.
2. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

II Ensembles de points

Définition 3 (Ensemble de points) : Il s'agit de déterminer un ensemble $(\mathscr{E})$ de points M du plan complexe dont les affixes z vérifient une certaine propriété.

II.1 Affixe d'un vecteur

Rappel 1 : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan complexe sont égaux si, et seulement si leur affixe sont égales :
$$\vec{u}(z) = \vec{v}(z') \iff z = z'\,.$$

Proposition 7 (Affixe d'un vecteur et du milieu d'un segment) : Soient M_1 et M_2 deux points du plan complexe d'affixe respective $z_1 = a_1 + \mathrm{i}\,b_1$ et $z_2 = a_2 + \mathrm{i}\,b_2$.

- Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}$ a pour affixe $z_2 - z_1 = (a_2 - a_1) + \mathrm{i}\,(b_2 - b_1)$.
- Le milieu I de $[\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2]$ a pour affixe $z_\mathrm{I} = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$.

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AB}}(z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}) = (z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}) = (x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}\,; y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A})\,.}$$

Exercice 6 : Soient A, B et C trois points du plan d'affixe respective : $\dfrac{3-2\,\mathrm{i}}{2}$, $\dfrac{1}{3} - \mathrm{i}$ et $-3 - \mathrm{i}$.

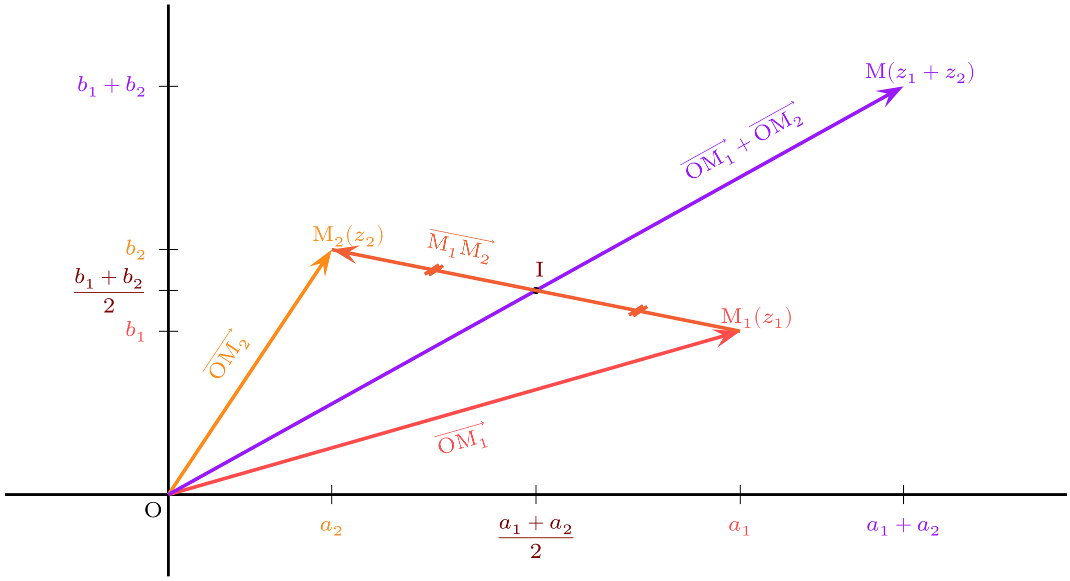

Figure X.2 – Affixe d'un vecteur et du milieu d'un segment.

1. Déterminer l'affixe du milieu du segment [AB].
2. Déterminer l'affixe du symétrique de A par rapport à C.
3. Déterminer l'affixe de l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

II.2 À partir du module

Proposition 8 (Norme d'un vecteur) : Soient $A(z_A)$ et $B_2(z_B)$ deux points du plan complexe $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ d'affixe respective z_A et z_B.

- $||\overrightarrow{OA}|| = |z_A|$.
- $||\overrightarrow{AB}|| = |z_B - z_A|$.

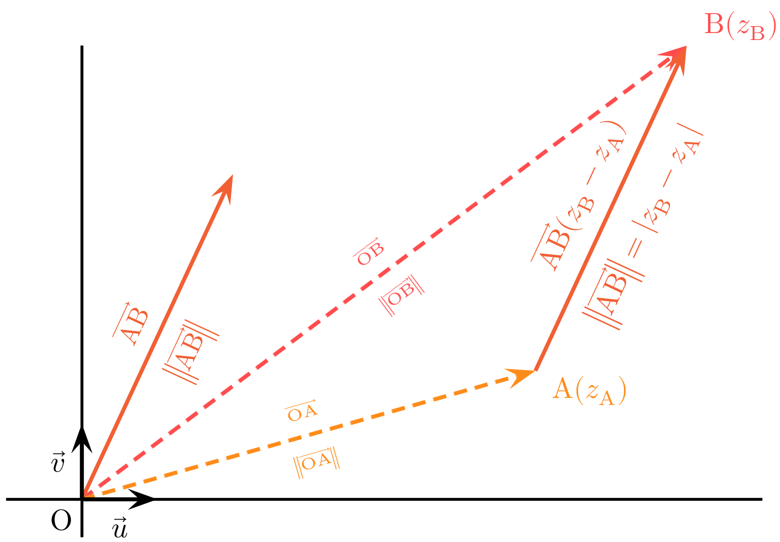

Figure X.3 – Inégalité triangulaire.

Corollaire 8.1 (Lignes de niveau dans $\mathbb{C}$) : Soient $\mathrm{A}(z_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(z_\mathrm{B})$ deux points du plan complexe et $r \in \mathbb{R}_+$.

- L'ensemble des points $\mathrm{M}(z)$ du plan tels que $|z - z_\mathrm{A}| = r$ est le cercle de centre A et de rayon r.
- L'ensemble des points $\mathrm{M}(z)$ du plan tels que $|z - z_\mathrm{A}| < r$ (resp. $|z - z_\mathrm{A}| \leqslant r$) est le disque ouvert (resp. fermé) de centre A et de rayon r.
- L'ensemble des points $\mathrm{M}(z)$ du plan tels que $|z - z_\mathrm{A}| = |z - z_\mathrm{B}|$ est la médiatrice du segment [AB].

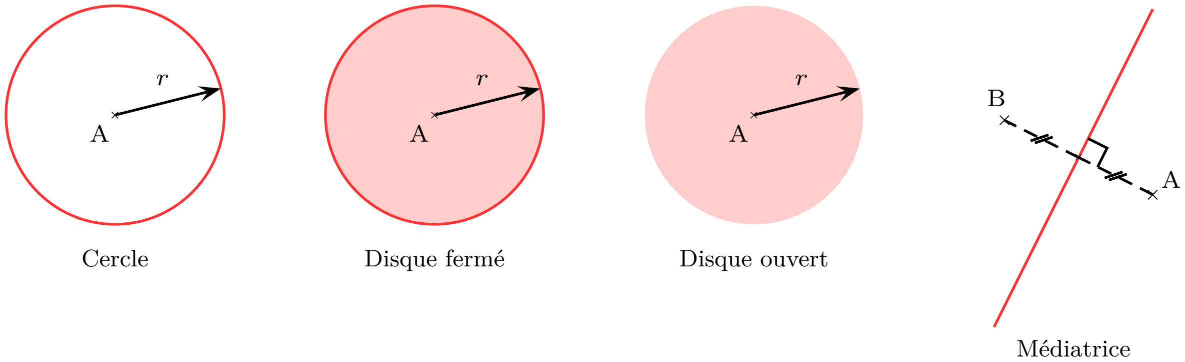

Figure X.4 – Exemples de lignes de niveaux dans $\mathbb{C}$.

Exercice 7 : Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes :

1 $|z - \mathrm{i}\,| = 5$ **2** $|z - 1 + \mathrm{i}\,| = |z - \mathrm{i}\,|$ **3** $|z - \mathrm{i}\,| < |z + 2|$

II.3 À partir de l'argument

Proposition 9 (Angle de deux vecteurs) : Soient $\mathrm{A}(z_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(z_\mathrm{B})$ deux points du plan complexe $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ d'affixe respective z_A et z_B.

- $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) \equiv \arg(z_\mathrm{A})\ [2\pi]$.
- $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) \equiv \arg(z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A})\ [2\pi]$.
- $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z_\mathrm{B}}{z_\mathrm{A}}\right) \equiv \arg(z_\mathrm{B}) - \arg(z_\mathrm{A})\ [2\pi]$.

Exemple 7 : On donne $\mathrm{A}(2 + \mathrm{i}\,)$ et $\mathrm{B}(-1 - 2\,\mathrm{i}\,)$.

Comment déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, la longueur AB et l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$?

- $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A} = -1 - 2\,\mathrm{i} - 2 - \mathrm{i} = -3 - 3\,\mathrm{i}$. Donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(-3\,;-3)$.
- $\mathrm{AB} = |z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}| = |-3 - 3\,\mathrm{i}\,| = 3\sqrt{2}$.
- Soit θ un argument de $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$. On a :

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= -\frac{3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta &= -\frac{3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \implies \theta \equiv -\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]\,.$$

Donc $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) \equiv -\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

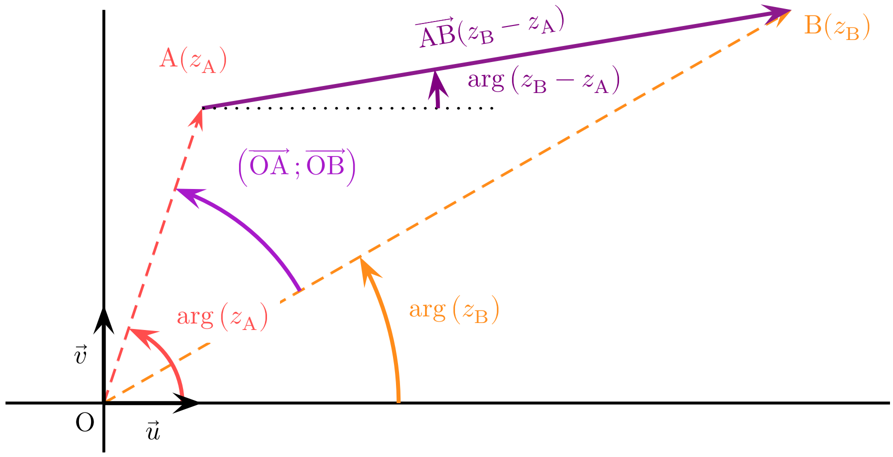

Figure X.5 – Angle de deux vecteurs

Corollaire 9.1 : Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D deux à deux distincts et d'affixes respectivement z_A, z_B, z_C et z_D.

Alors :

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \ [2\pi].$$

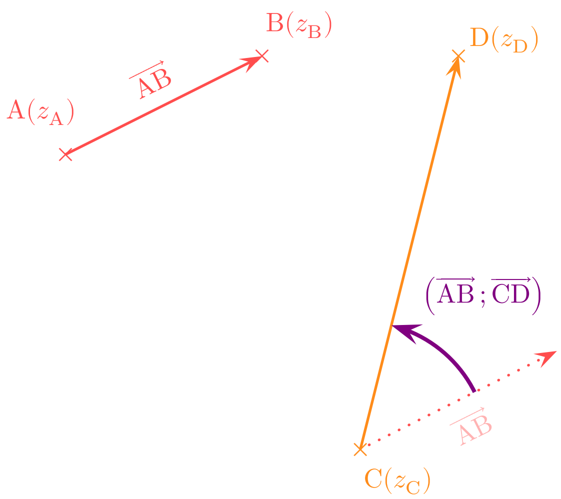

Figure X.6 – Angle formé par 4 points.

Exercice 8 : Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes. Sauf mention contraire, on résoudra ces équations modulo 2π et modulo π.

1. $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}$
2. $\arg(z - i) = -\dfrac{\pi}{4}$
3. $\begin{cases} \arg(z) = -\dfrac{3\pi}{4} \\ |z| = 2. \end{cases}$

II.4 Alignement, orthogonalité, angles

Lemme 1 (Produit scalaire et déterminant) : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe respective $z_u = a + \mathrm{i}\, b$ et $z_v = a' + \mathrm{i}\, b'$.

- $\mathrm{Re}\,(z_v \overline{z_u}) = aa' + bb'$.
- $\mathrm{Im}\,(z_v \overline{z_u}) = ab' - a'b$.

Théorème 10 (Colinéarité et orthogonalité de vecteurs) : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe respective z_u et z_v.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si $\mathrm{Re}\,(z_v \overline{z_u}) = 0$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si $\mathrm{Im}\,(z_v \overline{z_u}) = 0$.

Corollaire 10.1 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe respective z_u et z_v.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \vec{u} \,/\!/\, \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathbb{R}.$$

($\vec{u}$ non nul) ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls)

Corollaire 10.2 (Colinéarité et orthogonalité) : Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D tels que $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ et $\mathrm{C} \neq \mathrm{D}$ et d'affixe respective z_A, z_B, z_C et z_D.

A, B et C sont distincts et alignés	$\iff$	$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont colinéaires non nuls	$\iff$	$\dfrac{z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}}{z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}} \in \mathbb{R}$.
(AB) $/\!/$ (CD)	$\iff$	$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ sont colinéaires non nuls	$\iff$	$\dfrac{z_\mathrm{D} - z_\mathrm{C}}{z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}} \in \mathbb{R}$.
(AB) $\perp$ (CD)	$\iff$	$\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$	$\iff$	$\dfrac{z_\mathrm{D} - z_\mathrm{C}}{z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$.

Remarque : En particulier, trois points distincts A, B et C sont alignés si, et seulement si

$$\mathrm{Im}\,((z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A})(\overline{z_\mathrm{C}} - \overline{z_\mathrm{A}})) = 0 \underset{\text{théorème (10)}}{\iff} \frac{z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}}{z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}} \in \mathbb{R} \underset{\textit{corollaire (10.2)}}{\iff} \exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A} = k(z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}).$$

Exercice 9 : Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}\, z$ soient alignés.

Un exemple classique est un exercice où l'on vous demande la nature d'une certain triangle ABC.

Proposition 11 (Nature d'un triangle) : Soit ABC un triangle non dégénéré.

$$\text{ABC est isocèle en A} \iff \mathrm{AB} = \mathrm{AC} \iff |z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}| = |z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}|.$$

$$\begin{aligned}\text{ABC est équilatéral} &\iff \mathrm{AB} = \mathrm{AC} = \mathrm{BC} \iff |z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}| = |z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}| = |z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{B}}| \\ &\iff \mathrm{AB} = \mathrm{AC} \ \text{ et } \ \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \\ &\iff |z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}| = |z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}| \ \text{ et } \ \arg\left(\frac{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

$$\text{ABC est rectangle en A} \iff \begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0 \\ \text{ou} \\ \arg\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases} \iff \frac{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}.$$

$$\text{ABC est rectangle isocèle en A} \iff \overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0 \ \text{ et } \ \mathrm{AB} = \mathrm{AC} \iff \frac{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}} = \pm\mathrm{i}.$$

Exercice 10 : Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}\,z$ forment un triangle équilatéral.

III Transformations du plan (Hors-Programme)

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des points du plan.

III.1 Représentation complexe

Définition 4 : On considère une application $\mathcal{F} : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M}' \end{array}$.

- Lorsque $\mathcal{F}$ est bijective, on dit que $\mathcal{F}$ est une *transformation du plan.*
- Lorsque $\mathcal{F}$ est une transformation du plan, la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z' \end{array}$$

qui, à chaque z affixe de M associe z' l'affixe de $\mathcal{F}(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'$ est appelée *représentation* ou *représentation complexe* de $\mathcal{F}$.

On l'écrit souvent $z' = f(z)$ au lieu de $z \longmapsto f(z)$.

Exemple 8 : la symétrie axiale d'axe $(\mathrm{O}x)$ est une transformation du plan.
Son écriture complexe est : $z \longmapsto \overline{z}$.

Exercice 11 :

1. Donner l'écriture complexe de la symétrie de centre O.
2. Donner l'écriture complexe de la symétrie d'axe $(\mathrm{O}y)$.

III.2 Translation

Définition 5 : Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.

On appelle *translation de vecteur* $\vec{u}$, notée $t_{\vec{u}}$, toute transformation de $\mathcal{P}$ qui, à tout point M associe le point M′ tel que :

$$\overrightarrow{\mathrm{MM}'} = \vec{u}.$$

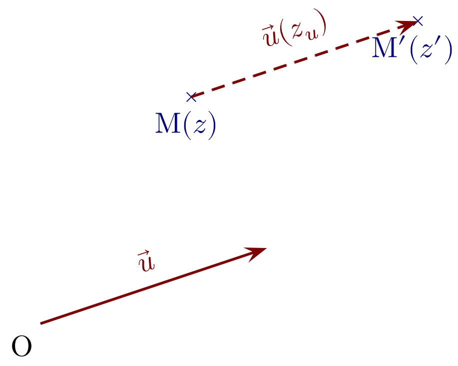

Figure X.7 – Translation de vecteur $\vec{u}$.

Remarque : $t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}$

Proposition 12 (Écriture complexe d'une translation) : Soit $\vec{u}(a)$ un vecteur du plan.

L'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$ est :

$$z' = z + a$$

III.3 Homothétie

Définition 6 : Soient Ω un point du plan et $k \in \mathbb{R}^*$.

On appelle *homothétie de centre* Ω *et de rapport* k, notée $h_{\Omega,k}$, toute transformation de $\mathcal{P}$ qui, à tout point M associe le point M′ tel que :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}'} = k\overrightarrow{\mathrm{OM}}.$$

Remarque : $h_{\Omega,k}^{-1} = h_{\Omega,\frac{1}{k}}$

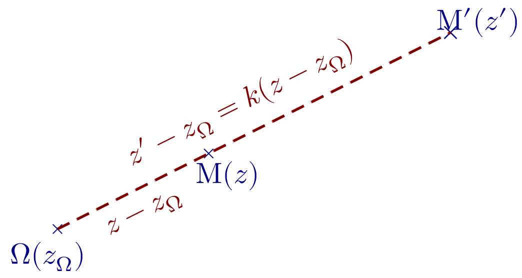

Figure X.8 – Homothétie de centre Ω et de rapport r.

Proposition 13 (Écriture complexe d'une homothétie) : Soient $\Omega(\omega)$ un point du plan et $k \in \mathbb{R}^{\star}$.

L'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω et de rapport k est :

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

En particulier, pour $k \in \mathbb{R}^*$, $z \longmapsto kz$ est l'écriture complexe de l'homothétie de centre O et de rapport k.

III.4 Rotation

Définition 7 : Soient Ω un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$.

On appelle *rotation de centre* Ω *et d'angle* θ, notée $r_{\Omega,\theta}$, toute transformation de $\mathscr{P}$ qui, à tout point M associe le point M′ tel que :

$$\begin{cases} \Omega\mathrm{M}' = \Omega\mathrm{M} \\ \left(\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}, \overrightarrow{\Omega\mathrm{M}'}\right) \equiv \theta \ [2\pi] \end{cases}$$

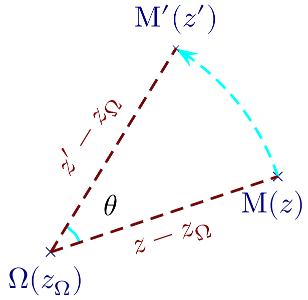

Figure X.9 – Rotation de centre Ω et d'angle θ.

Remarque : $r_{\Omega,\theta}^{-1} = r_{\Omega,-\theta}$.

Proposition 14 (Écriture complexe d'une rotation) : Soient $\Omega(\omega)$ un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$.

L'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ est :

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

En particulier, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $z \mapsto e^{i\theta} z$ est l'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle θ.

Proposition 15 (Écriture complexe d'une symétrie axiale) : Soit $(\mathscr{D})$ une droite passant par le point A d'affixe z_{A}, et de vecteur directeur unitaire $\vec{u}$, d'affixe $z_{\vec{u}}$.

La symétrie orthogonale d'axe $(\mathscr{D})$ est donnée par la fonction

$$s_{(\mathscr{D})} : z \longmapsto z_{\mathrm{A}} + z_{\vec{u}}^2(\overline{z} - \overline{z_{\mathrm{A}}}).$$

Un peu hors-programme

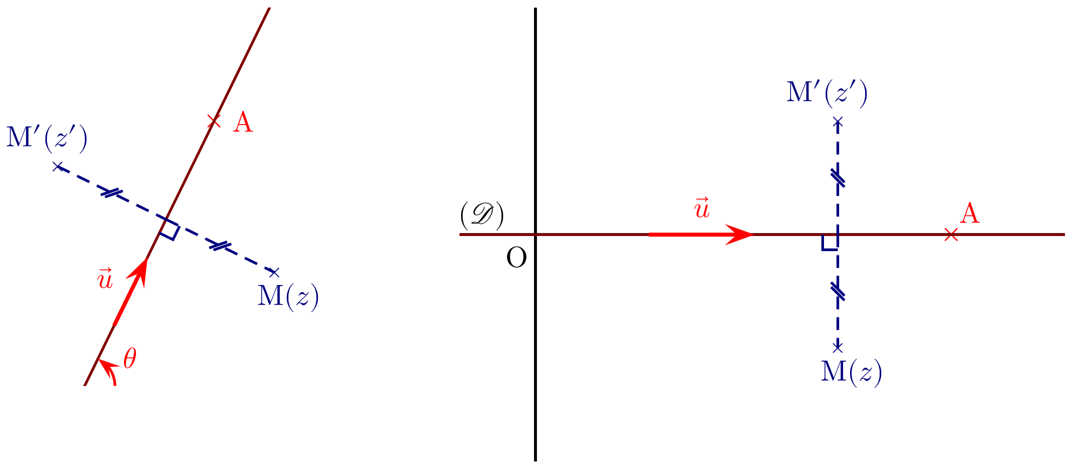

Figure X.10 – Symétrie d'axe $(\mathscr{D})$.

Les transformations usuelles étudiées ci-dessus s'écrivent toutes sous la forme $z \longmapsto az + b$ ou $z \longmapsto a\overline{z} + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.

On montre que, réciproquement, une application de ce type correspond à une transformation usuelle, ou une composée de transformations usuelles du plan :

Théorème 16 (Interprétation des transformations affines de $\mathbb{C}$) : Soit $(a\,;b) \in \mathbb{C}^2$.

1. Soit $\varphi : z \longmapsto az + b$ avec $a \neq 0$.
   a. Si $a = 1$, φ est la représentation d'une translation de vecteur $\vec{u}(b)$.
   b. Si $a = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \neq 1$, il existe un point Ω invariant par φ tel que φ soit la représentation de la composée d'une rotation d'angle θ et de centre Ω par une homothétie de rapport r et de même centre.

On dit que φ est la représentation d'une *similitude* (directe ou indirecte) de centre Ω, de rapport r et d'angle θ.

2 Soit $\varphi : z \longmapsto a\overline{z} + b$ avec $a = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \neq 0$ et $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}$.

Alors φ est la représentation de la composée d'une symétrie d'axe $(\mathscr{D})$ de vecteur directeur $\vec{u}$ et passant par A, d'une translation de vecteur $\alpha\vec{u}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ (un glissement le long de la droite $(\mathscr{D})$) et d'une homothétie de centre O et de rapport r.

Exercice 12 : Caractériser la transformation associée à la fonction

$$f : z \longmapsto 2\,\mathrm{i}\,z + 1.$$

Pourquoi le nombre zéro n'a-t-il aucune crédibilité au sein des nombres complexes ?

Réponse : parce qu'il n'a jamais d'argument.

IV Résumé de géométrie complexe