Les Nombres Complexes II

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 10

Sommaire I

La résolution d'équations polynomiales par radicaux a motivé une part importante de la recherche mathématique, jusqu'à ce que Niels Abel[1] prouve l'impossibilité de résoudre l'équation général du 5-ième degré par radicaux. Peu de temps après, Évariste Galois[2] élucide complètement le problème, dans un mémoire rédigé peu avant sa mort prématurée en 1832, et dans une lettre rédigée à la hâte à un ami, la veille du duel qui devait lui être fatal (il avait alors 20 ans). Dans ce mémoire, on y trouve en particulier les balbutiements de la théorie des groupes.

1. Niels Henrik Abel **(1802-1829)** est un mathématicien norvégien. Il est connu pour ses travaux en analyse mathématique sur la semi-convergence des séries numériques, des suites et séries de fonctions, les critères de convergence d'intégrale généralisée, sur la notion d'intégrale elliptique ; et en algèbre, sur la résolution des équations.

2. Évariste Galois est un mathématicien français, né le 25 octobre **1811** à Bourg-Égalité (aujourd'hui Bourg-la-Reine) et mort le 31 mai **1832** à Paris. On a donné son nom à une branche d mathématiques dont il a posé les prémices, la théorie de Galois. Il est un précurseur dans la notio de groupe et un des premiers à mettre en évidence la correspondance entre symétries et invariants.

Carl Friedrich Gauss montre que les racines de $X^n - 1$ (donc les racines n-ièmes de l'unité), peuvent s'exprimer par radicaux si n est premier.
Il va plus loin, en montrant que si n est un entier premier de la forme $2^{2^k} + 1$, alors les solutions peuvent s'exprimer sous forme de radicaux carrés. Ce résultat amène la constructibilité à la règle et au compas du pentagone (déjà connu depuis bien longtemps), de l'eptadécagone, *i.e.* le polygone à 17 côtés (Gauss en donne une construction) puis des polygones à 257 et 65537 côtés. On ne connaît pas, à ce jour, d'autres nombres premiers de la forme $2^{2^k} + 1$ appelés nombres de Fermat. On ne sait pas s'il y en a d'autres.

Pierre-Laurent Wantzel montre la réciproque en 1837 : les seuls polygones constructibles sont les polygones dont le nombre de côtés est un nombre premier de la forme $2^{2^k} + 1$, ou des nombres ayant comme uniques facteurs (qui doivent être simples) ces nombres premiers ou 2 (en multiplicité quelconque).
Ce théorème est connu sous le nom de théorème de Gauss-Wantzel.

I. Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Définition 1 (Racine carré) :

On appelle **racine carrée** d'un nombre complexe z tout nombre complexe u vérifiant :

$$u^2 = z.$$

Définition 1 (Racine carré) :

On appelle **racine carrée** d'un nombre complexe z tout nombre complexe u vérifiant :

$$u^2 = z.$$

Exemples 1 :

- 0 admet 0 comme unique racine carrée complexe.
- -1 admet deux racines carrées complexes : i et $-\mathrm{i}$ qui sont les racines du polynôme $\mathrm{X}^2 + 1$.
- Si $\alpha \in \mathbb{R}_+$ alors ses racines carrées sont $\pm\sqrt{\alpha}$, racines de $\mathrm{X}^2 - \alpha$.
- Si $\alpha \in \mathbb{R}_-$ alors ses racines carrées sont $\pm\,\mathrm{i}\sqrt{-\alpha}$, racines de $\mathrm{X}^2 + \beta$ où $\beta = -\alpha \geqslant 0$.

ATTENTION

Si $a \notin \mathbb{R}_+$, il est strictement interdit d'écrire $\sqrt{a}$.

Par exemple, pour -1, on aurait alors :

$$1 = \sqrt{1^2} = \sqrt{-1 \times -1} = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1 \text{ !!!}$$

I. Racines n-ièmes d'un nombre complexe

1. Racines carrées d'un nombre complexe

Théorème 1 :

Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées.

Théorème 1 :

Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées.

Exemples 2 :

- Les racines carrées de $\mathrm{i} = e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}$ sont $\pm\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}} = \pm\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$.
- Les racines carrées de $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}$ sont $\pm\sqrt[4]{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{8}} = \pm\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$.

Exemple 3 (Racines carrées de $1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$) :

Posons $z = 3 - 4\,\mathrm{i}$ et $u \in \mathbb{C}$ tel que $z = u^2$.

Sous forme exponentielle :

1. On cherche, tout d'abord, la forme exponentielle de z : $z = 2\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}$.
2. Les racines carrées sont alors évidentes à trouver :

$$u_1 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}} \qquad \text{et} \qquad u_2 = -\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}.$$

Exemple 3 (Racines carrées de $1-\mathrm{i}\sqrt{3}$) :

Posons $z = 3 - 4\,\mathrm{i}$ et $u \in \mathbb{C}$ tel que $z = u^2$.

Sous forme algébrique : Il suffit de suivre la démonstration.

1. On pose $u = a + \mathrm{i}\, b$.
2. $z = u^2 \iff 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} = a^2 - b^2 + 2\,\mathrm{i}\, ab$ et $2 = |u|^2 \iff \left\{\begin{array}{rl} a^2 - b^2 & = 1 \\ a^2 + b^2 & = 2 \\ 2ab & = -\sqrt{3}. \end{array}\right.$

$$\iff \left\{\begin{array}{cl} a^2 & = \frac{3}{2} \\ b^2 & = \frac{1}{2} \\ 2ab & = -\sqrt{3} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} a & = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \\ b & = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \\ 2ab & = -\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

$$\iff u = \sqrt{2}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \mathrm{i}\,\frac{1}{2}\right).$$

Comme $y < 0$, a et b doivent être de signe contraire et on ne garde que celles-ci :

$$u_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right) \qquad \text{et} \qquad u = -\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right).$$

Exercice 1 :

Déterminer les racines carrées de $-1 + \mathrm{i}$ par deux méthodes.

Théorème 2 (Équation du second degré à coefficients complexes) :

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. On considère l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad (\mathrm{Tr}.\mathbb{C})$$

On appelle encore **discriminant** de l'équation $(\mathrm{Tr}.\mathbb{C})$, noté Δ, le nombre complexe défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$, $(\mathrm{Tr}.\mathbb{C})$ possède une unique solution, dite double : $z = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta \neq 0$, $(\mathrm{Tr}.\mathbb{C})$ possède deux solutions : $z = \dfrac{-b \pm \delta}{2a}$,
  où δ est **une** racine carrée de Δ.

Exemple 4 ($(1+\mathrm{i})z^2+(3+\mathrm{i})z+(-6+4\mathrm{i})=0.$) :

$$\Delta=(3+\mathrm{i})^2-4(1+\mathrm{i})(-6+4\mathrm{i})=48+14\mathrm{i}.$$

On cherche $\delta=a+\mathrm{i}b$ tels que :

$$\delta^2=\Delta \iff \begin{cases} a^2-b^2=48 \\ a^2+b^2=50 \\ 2ab=14 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2=49 \\ b^2=1 \\ ab=7 \end{cases} \iff \begin{cases} a=7 \\ b=1 \end{cases} \underset{\text{car } ab>0}{\text{ou}} \begin{cases} a=-7 \\ b=-1 \end{cases}$$

On prend $\delta=7+\mathrm{i}$.

L'équation admet ainsi les deux solutions :

$$z_1=\frac{-(3+\mathrm{i})-(7+\mathrm{i})}{2(1+\mathrm{i})}=\frac{-10-2\mathrm{i}}{2(1+\mathrm{i})}=\frac{-5-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{-(5+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2}=-3+2\mathrm{i}, \text{ et}$$

$$z_2=\frac{-(3+\mathrm{i})+(7+\mathrm{i})}{2(1+\mathrm{i})}=\frac{4}{2(1+\mathrm{i})}=1-\mathrm{i}.$$

Exemple 4 ($(1+\mathrm{i})z^2 + (3+\mathrm{i})z + (-6+4\mathrm{i}) = 0.$) :

$$\Delta = (3+\mathrm{i})^2 - 4(1+\mathrm{i})(-6+4\mathrm{i}) = 48 + 14\mathrm{i}.$$

L'équation admet ainsi les deux solutions :

$$z_1 = \frac{-(3+\mathrm{i}) - (7+\mathrm{i})}{2(1+\mathrm{i})} = \frac{-10-2\mathrm{i}}{2(1+\mathrm{i})} = \frac{-5-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{-(5+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2} = -3+2\mathrm{i}, \text{ et}$$

$$z_2 = \frac{-(3+\mathrm{i}) + (7+\mathrm{i})}{2(1+\mathrm{i})} = \frac{4}{2(1+\mathrm{i})} = 1-\mathrm{i}.$$

ATTENTION

Les deux racines **ne** sont absolument **pas** conjuguées.

Exercice 2 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 - 2\,\mathrm{i}\,z - 1 + 2\,\mathrm{i} = 0.$

Exercice 2 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 - 2\,\mathrm{i}\,z - 1 + 2\,\mathrm{i} = 0.$
2. $z^4 + 1 = 0.$

Proposition 3 (Relations coefficients-racines) :

Soient a, b, $c \in \mathbb{C}$ tel que $a \neq 0$.

z_1 et z_2 sont les racines de (Tr.$\mathbb{C}$) si, et seulement si $\left\{\begin{array}{rcl} z_1 + z_2 & = & -\dfrac{b}{a} \\ z_1 z_2 & = & \dfrac{c}{a}. \end{array}\right.$

Proposition 3 (Relations coefficients-racines) :

Soient a, b, $c \in \mathbb{C}$ tel que $a \neq 0$.

z_1 et z_2 sont les racines de $(\mathrm{Tr}.\mathbb{C})$ si, et seulement si $\left\{\begin{array}{rcl} z_1 + z_2 & = & -\dfrac{b}{a} \\ z_1 z_2 & = & \dfrac{c}{a}. \end{array}\right.$

Exemple 5 (Système non linéaire) :

Pour résoudre un système de la forme $\left\{\begin{array}{rcl} x + y & = & \mathrm{S} \\ xy & = & \mathrm{P} \end{array}\right.$, on introduit donc l'équation $z^2 - \mathrm{S}z + \mathrm{P} = 0$ dont x et y sont les solutions.

Exercice 3 :

Trouver deux nombres complexes de somme i et de produit 2.

Définition 2 (Racines n-ièmes) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$.

- On appelle racine n-ième de z tout nombre complexe ω vérifiant

$$\omega^n = z.$$

- On appelle racine n-ième de l'unité tout nombre complexe ω vérifiant

$$\omega^n = 1.$$

On note $\mathbb{U}_n = \left\{z \in \mathbb{C} \,/\, z^n = 1\right\}$ leur ensemble.

Remarques :

- Toute racine d'un nombre complexe z est donc racine du polynôme $X^n - z$.

Remarques :

- Toute racine d'un nombre complexe z est donc racine du polynôme $\mathrm{X}^n - z$.
- L'ensemble $\mathbb{U}_n$ possède une structure de groupe multiplicatif commutatif très importante.

Remarques :

- Toute racine d'un nombre complexe z est donc racine du polynôme $X^n - z$.
- L'ensemble $\mathbb{U}_n$ possède une structure de groupe multiplicatif commutatif très importante.
- Toute racine de l'unité est de module 1 *i.e.* $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$.

Exemples 6 :

- Les racines carrées de l'unité sont 1 et -1.

Exemples 6 :

- Les racines carrées de l'unité sont 1 et -1.
- Les racines cubiques de l'unité sont 1, $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{3}}$ et $\overline{\mathrm{j}} = \mathrm{e}^{\frac{-2\,\mathrm{i}\,\pi}{3}} = \mathrm{j}^2 = -1 - \mathrm{j}$.

Exemples 6 :

- Les racines carrées de l'unité sont 1 et -1.
- Les racines cubiques de l'unité sont 1, $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ et $\overline{\mathrm{j}} = \mathrm{e}^{\frac{-2\mathrm{i}\pi}{3}} = \mathrm{j}^2 = -1 - \mathrm{j}$.
- Les racines quatrièmes de l'unité sont ± 1 et $\pm\mathrm{i}$.

Exemples 6 :

- Les racines carrées de l'unité sont 1 et -1.
- Les racines cubiques de l'unité sont 1, $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{3}}$ et $\overline{\mathrm{j}} = \mathrm{e}^{\frac{-2\,\mathrm{i}\,\pi}{3}} = \mathrm{j}^2 = -1 - \mathrm{j}$.
- Les racines quatrièmes de l'unité sont ± 1 et $\pm\,\mathrm{i}$.

Autrement dit,

$$\mathbb{U}_1 = \{1\}$$

Exemples 6 :

- Les racines carrées de l'unité sont 1 et -1.
- Les racines cubiques de l'unité sont 1, $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{3}}$ et $\overline{\mathrm{j}} = \mathrm{e}^{\frac{-2\,\mathrm{i}\,\pi}{3}} = \mathrm{j}^2 = -1 - \mathrm{j}$.
- Les racines quatrièmes de l'unité sont ± 1 et $\pm\,\mathrm{i}$.

Autrement dit,

$$\mathbb{U}_1 = \{1\}$$

$$\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$$

Exemples 6 :

- Les racines carrées de l'unité sont 1 et -1.
- Les racines cubiques de l'unité sont 1, $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{3}}$ et $\overline{\mathrm{j}} = \mathrm{e}^{\frac{-2\,\mathrm{i}\,\pi}{3}} = \mathrm{j}^2 = -1 - \mathrm{j}$.
- Les racines quatrièmes de l'unité sont ± 1 et $\pm\,\mathrm{i}$.

Autrement dit,

$$\mathbb{U}_1 = \{1\} \qquad \mathbb{U}_3 = \{1,\ \mathrm{j}\,,\ \overline{\mathrm{j}}\}$$

$$\mathbb{U}_2 = \{1,\ -1\}$$

Exemples 6 :

- Les racines carrées de l'unité sont 1 et -1.
- Les racines cubiques de l'unité sont 1, $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{3}}$ et $\overline{\mathrm{j}} = \mathrm{e}^{\frac{-2\,\mathrm{i}\,\pi}{3}} = \mathrm{j}^2 = -1 - \mathrm{j}$.
- Les racines quatrièmes de l'unité sont ± 1 et $\pm\,\mathrm{i}$.

Autrement dit,

$$\mathbb{U}_1 = \{1\} \qquad \mathbb{U}_3 = \{1,\ \mathrm{j},\ \overline{\mathrm{j}}\}$$

$$\mathbb{U}_2 = \{1,\ -1\} \qquad \mathbb{U}_4 = \{1, -1,\ \mathrm{i},\ \overline{\mathrm{i}}\}$$

Théorème 4 (Caractérisation des racines de l'unité) :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi k}{n}},\ k \in [\![0\,;n-1]\!] \right\}.$$

En particulier, $\mathbb{U}_n$ est constitué de n éléments deux à deux distincts.

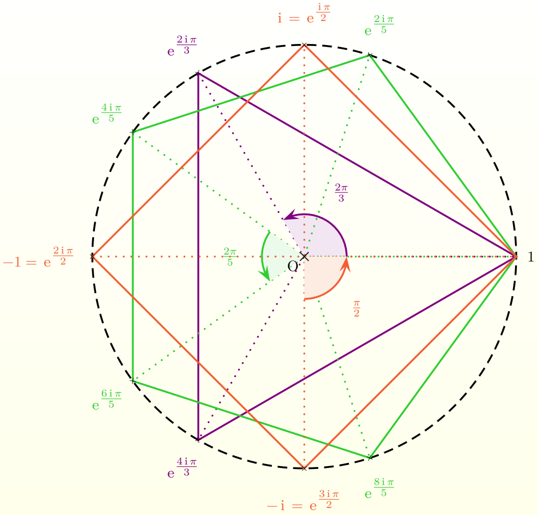


Figure 1 – Polygones réguliers à 3, 4 et 5 sommets.

Exercice 4 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^3 = -\,\mathrm{i}\,.$

Exercice 4 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^3 = -\mathrm{i}\,.$
2. $\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^4 = 1.$

Proposition 5 (Propriétés des racines de l'unité) :

Soient $n \geqslant 2$ un entier.

Alors :

1. Si on note $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{n}}$ alors $\mathbb{U}_n = \left\{\omega^k,\, k \in [\![0\,;n-1]\!]\right\}$.

Proposition 5 (Propriétés des racines de l'unité) :

Soient $n \geqslant 2$ un entier.

Alors :

1. Si on note $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{n}}$ alors $\mathbb{U}_n = \left\{\omega^k,\ k \in [\![0\,;n-1]\!] \right\}$.
2. $1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{n-1} = 0$ si, et seulement si $\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$.

Proposition 5 (Propriétés des racines de l'unité) :

Soient $n \geqslant 2$ un entier.

Alors :

1. Si on note $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{n}}$ alors $\mathbb{U}_n = \left\{\omega^k,\ k \in [\![0\,;n-1]\!]\right\}$.
2. $1 + \omega + \omega^2 + ... + \omega^{n-1} = 0$ si, et seulement si $\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$.
3. La somme des racines n-ièmes de l'unité est égale à 0 : $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0$.

Théorème 6 :

Soient $\mathrm{Z} \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Z admet exactement n racines n-ièmes.

Remarques :

Théorème 6 :

Soient $Z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Z admet exactement n racines n-ièmes.
2. Plus précisément, si z_0 est une racine n-ième de Z alors les racines n-ièmes de Z sont les

$$z_0\, \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}}, \quad k \in [\![0\,; n-1]\!].$$

Remarques :

Théorème 6 :

Soient $\mathrm{Z} \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Z admet exactement n racines n-ièmes.
2. Plus précisément, si z_0 est une racine n-ième de Z alors les racines n-ièmes de Z sont les
$$z_0\, \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}}, \quad k \in [\![0\,; n-1]\!].$$

Remarques :

- Pour trouver toutes les racines n-ièmes d'un nombre complexe Z, il suffit donc d'en exhiber une, notée ω, et de la multiplier par toutes les racines n-ièmes de l'unité.

Théorème 6 :

Soient $\mathrm{Z} \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Z admet exactement n racines n-ièmes.
2. Plus précisément, si z_0 est une racine n-ième de Z alors les racines n-ièmes de Z sont les
$$z_0\,\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}}, \quad k \in [\![0\,;n-1]\!].$$

Remarques :

- Pour trouver toutes les racines n-ièmes d'un nombre complexe Z, il suffit donc d'en exhiber une, notée ω, et de la multiplier par toutes les racines n-ièmes de l'unité.
- **Géométriquement**, toutes les racines n-ièmes sont donc obtenues à partir du point d'affixe ω par $n-1$ rotations de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$.

Exercice 5 :

1. Calculer les racines cubiques de $\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$.
2. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

II. Ensembles de points

II. Ensembles de points

Définition 3 (Ensemble de points) :

Il s'agit de déterminer un ensemble $(\mathcal{E})$ de points M du plan complexe dont les affixes z vérifient une certaine propriété.

II. Ensembles de points

1. Affixe d'un vecteur

Rappel :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan complexe sont égaux si, et seulement si leur affixe sont égales :

$$\vec{u}(z) = \vec{v}(z') \iff z = z'.$$

Rappel :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan complexe sont égaux si, et seulement si leur affixe sont égales :

$$\vec{u}(z) = \vec{v}(z') \iff z = z'.$$

Proposition (Affixe d'un vecteur et du milieu d'un segment) :

Soient M_1 et M_2 deux points du plan complexe d'affixe respective $z_1 = a_1 + \mathrm{i}\, b_1$ et $z_2 = a_2 + \mathrm{i}\, b_2$.

- Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}$ a pour affixe $z_2 - z_1 = (a_2 - a_1) + \mathrm{i}\,(b_2 - b_1)$.
- Le milieu I de $[\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2]$ a pour affixe $z_\mathrm{I} = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$.

II. Ensembles de points

1. Affixe d'un vecteur

Rappel :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan complexe sont égaux si, et seulement si leur affixe sont égales :

$$\vec{u}(z) = \vec{v}(z') \iff z = z'.$$

Proposition (Affixe d'un vecteur et du milieu d'un segment) :

Soient M_1 et M_2 deux points du plan complexe d'affixe respective $z_1 = a_1 + \mathrm{i}\, b_1$ et $z_2 = a_2 + \mathrm{i}\, b_2$.

- Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}$ a pour affixe $z_2 - z_1 = (a_2 - a_1) + \mathrm{i}\,(b_2 - b_1)$.
- Le milieu I de $[\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2]$ a pour affixe $z_\mathrm{I} = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$.

En particulier, si $\mathrm{A}(z_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(z_\mathrm{B})$ sont deux points du plan complexe, on retrouve la relation familière :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AB}}(z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}) = (z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}) = (x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}\,; y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A})\,.}$$

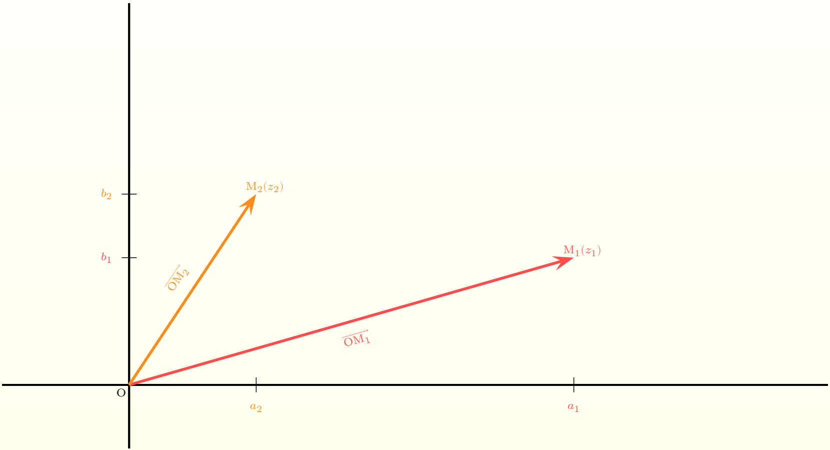


Figure 2 – Affixe d'un vecteur et du milieu d'un segment.

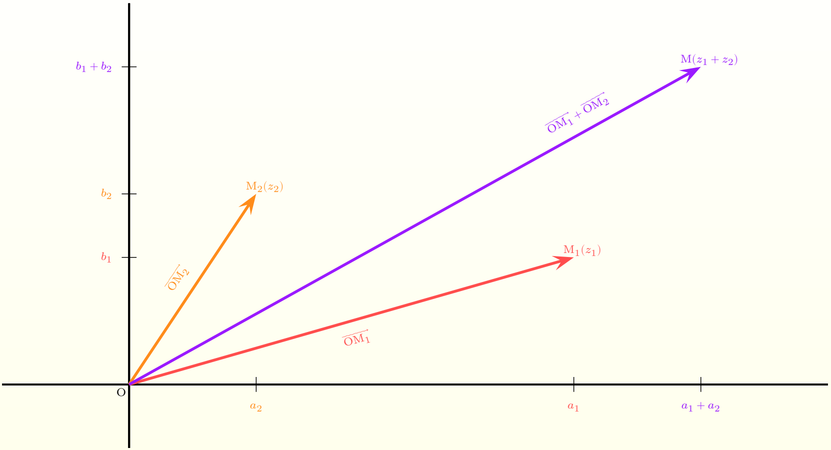


Figure 2 – Affixe d'un vecteur et du milieu d'un segment.

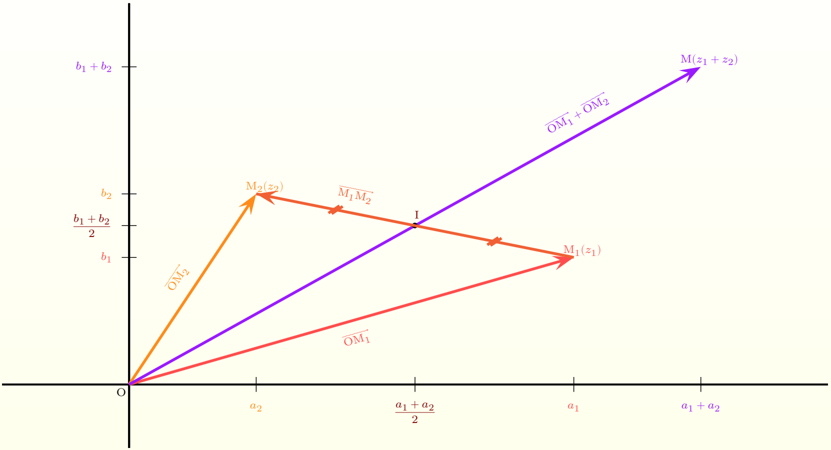


Figure 2 – Affixe d'un vecteur et du milieu d'un segment.

Exercice 6 :

Soient A, B et C trois points du plan d'affixe respective : $\dfrac{3-2\,\mathrm{i}}{2}$, $\dfrac{1}{3}-\mathrm{i}$ et $-3-\mathrm{i}$.

1. Déterminer l'affixe du milieu du segment [AB].

Exercice 6 :

Soient A, B et C trois points du plan d'affixe respective : $\dfrac{3-2\,\mathrm{i}}{2}$, $\dfrac{1}{3}-\mathrm{i}$ et $-3-\mathrm{i}$.

1. Déterminer l'affixe du milieu du segment [AB].
2. Déterminer l'affixe du symétrique de A par rapport à C.

Exercice 6 :

Soient A, B et C trois points du plan d'affixe respective : $\dfrac{3-2\,\mathrm{i}}{2}$, $\dfrac{1}{3}-\mathrm{i}$ et $-3-\mathrm{i}$.

1. Déterminer l'affixe du milieu du segment [AB].
2. Déterminer l'affixe du symétrique de A par rapport à C.
3. Déterminer l'affixe de l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Proposition 8 (Norme d'un vecteur) :

Soient $\mathrm{A}(z_{\mathrm{A}})$ et $\mathrm{B}_2(z_{\mathrm{B}})$ deux points du plan complexe $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ d'affixe respective z_{A} et z_{B}.

- $||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|| = |z_{\mathrm{A}}|$.

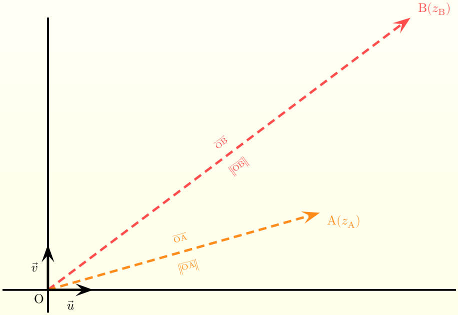


Figure 3 – Inégalité triangulaire.

Proposition 8 (Norme d'un vecteur) :

Soient $\mathrm{A}(z_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}_2(z_\mathrm{B})$ deux points du plan complexe $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ d'affixe respective z_A et z_B.

- $||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|| = |z_\mathrm{A}|$.
- $||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|| = |z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}|$.

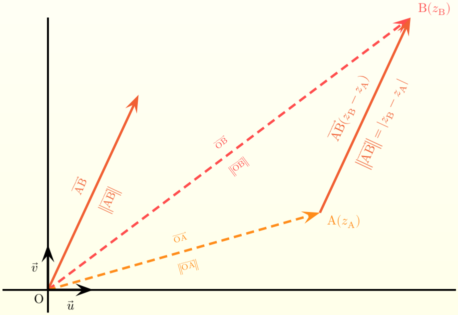
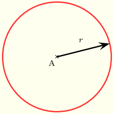


Figure 3 – Inégalité triangulaire.

Corollaire 8.1 (Lignes de niveau dans $\mathbb{C}$) :

Soient $\mathrm{A}(z_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(z_\mathrm{B})$ deux points du plan complexe et $r \in \mathbb{R}_+$.

- L'ensemble des points $\mathrm{M}(z)$ du plan tels que $|z - z_\mathrm{A}| = r$ est le cercle de centre A et de rayon r.



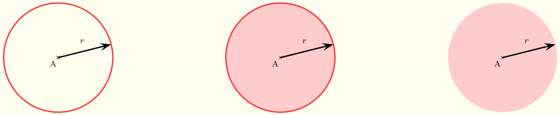
Cercle

Figure 4 – Exemples de lignes de niveaux dans $\mathbb{C}$.

Corollaire 8.2 (Lignes de niveau dans $\mathbb{C}$) :

Soient $\mathrm{A}(z_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(z_\mathrm{B})$ deux points du plan complexe et $r \in \mathbb{R}_+$.

- L'ensemble des points $\mathrm{M}(z)$ du plan tels que $|z - z_\mathrm{A}| = r$ est le cercle de centre A et de rayon r.
- L'ensemble des points $\mathrm{M}(z)$ du plan tels que $|z - z_\mathrm{A}| < r$ (resp. $|z - z_\mathrm{A}| \leqslant r$) est le disque ouvert (resp. fermé) de centre A et de rayon r.



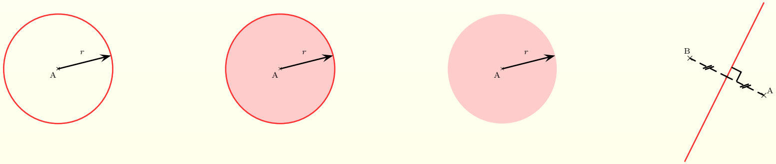
Cercle Disque fermé Disque ouvert

Figure 4 – Exemples de lignes de niveaux dans $\mathbb{C}$.

Corollaire 8.3 (Lignes de niveau dans $\mathbb{C}$) :

Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe et $r \in \mathbb{R}_+$.

- L'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $|z - z_A| = r$ est le cercle de centre A et de rayon r.
- L'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $|z - z_A| < r$ (resp. $|z - z_A| \leqslant r$) est le disque ouvert (resp. fermé) de centre A et de rayon r.
- L'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la médiatrice du segment $[AB]$.



Cercle — Disque fermé — Disque ouvert — Médiatrice

Figure 4 – Exemples de lignes de niveaux dans $\mathbb{C}$.

Exercice 7 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes :

1. $|z - \mathrm{i}| = 5$

Exercice 7 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes :

1. $|z - \mathrm{i}| = 5$
2. $|z - 1 + \mathrm{i}| = |z - \mathrm{i}|$

Exercice 7 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes :

1. $|z - \mathrm{i}\,| = 5$
2. $|z - 1 + \mathrm{i}\,| = |z - \mathrm{i}\,|$
3. $|z - \mathrm{i}\,| < |z + 2|$

Proposition 9 (Angle de deux vecteurs) :

Soient $\mathrm{A}(z_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(z_\mathrm{B})$ deux points du plan complexe $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ d'affixe respective z_A et z_B.

1. $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) \equiv \arg(z_\mathrm{A})\ [2\pi]$.

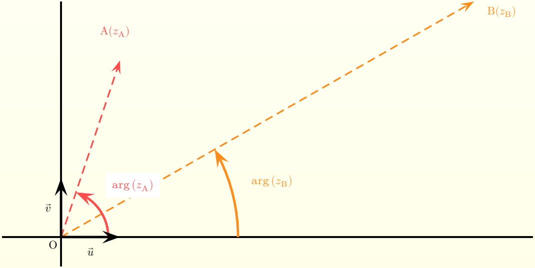


Figure 5 – Angle de deux vecteurs

Proposition 9 (Angle de deux vecteurs) :

Soient $\mathrm{A}(z_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(z_\mathrm{B})$ deux points du plan complexe $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ d'affixe respective z_A et z_B.

1. $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) \equiv \arg\left(z_\mathrm{A}\right)\ [2\pi]$.
2. $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) \equiv \arg\left(z_\mathrm{B}-z_\mathrm{A}\right)\ [2\pi]$.

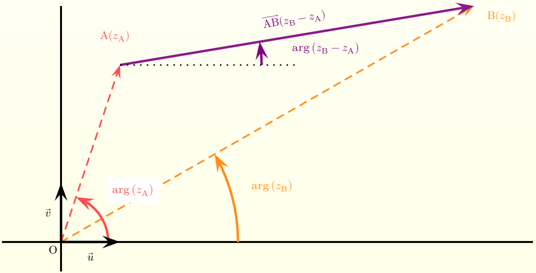


Figure 5 – Angle de deux vecteurs

Proposition 9 (Angle de deux vecteurs) :

Soient $\mathrm{A}(z_{\mathrm{A}})$ et $\mathrm{B}(z_{\mathrm{B}})$ deux points du plan complexe $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ d'affixe respective z_{A} et z_{B}.

1. $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) \equiv \arg\left(z_{\mathrm{A}}\right)\ [2\pi]$.
2. $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) \equiv \arg\left(z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}\right)\ [2\pi]$.
4. $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \equiv \arg\left(z_{\mathrm{B}}\right) - \arg\left(z_{\mathrm{A}}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{A}}}\right)\ [2\pi]$.

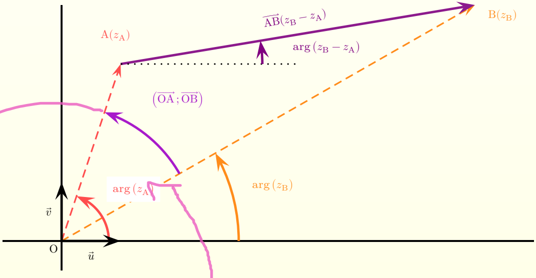


Figure 5 – Angle de deux vecteurs

Proposition 9 (Angle de deux vecteurs) :

Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ d'affixe respective z_A et z_B.

1. $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OA}\right) \equiv \arg(z_A) \; [2\pi]$.
2. $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg(z_B - z_A) \; [2\pi]$.
4. $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right) \equiv \arg(z_B) - \arg(z_A) \equiv \arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right) \; [2\pi]$.

Preuve :

1. La première assertion est la définition.

Proposition 9 (Angle de deux vecteurs) :

Soient $\mathrm{A}(z_{\mathrm{A}})$ et $\mathrm{B}(z_{\mathrm{B}})$ deux points du plan complexe $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ d'affixe respective z_{A} et z_{B}.

1. $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) \equiv \arg(z_{\mathrm{A}})\ [2\pi]$.
2. $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) \equiv \arg(z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}})\ [2\pi]$.
4. $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \equiv \arg(z_{\mathrm{B}}) - \arg(z_{\mathrm{A}}) \equiv \arg\left(\dfrac{z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{A}}}\right)\ [2\pi]$.

Preuve :

1. *La première assertion est la définition.*
2. *Quant à la deuxième, il existe un unique point* M *tel que* $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ *i.e.* $z_{\mathrm{M}} = z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}$. *On applique alors les résultats précédents :*

$$\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) \equiv \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) \equiv \arg(z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}})\ [2\pi].$$

Proposition 9 (Angle de deux vecteurs) :

Soient $\mathrm{A}(z_{\mathrm{A}})$ et $\mathrm{B}(z_{\mathrm{B}})$ deux points du plan complexe $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ d'affixe respective z_{A} et z_{B}.

1. $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) \equiv \arg(z_{\mathrm{A}})\ [2\pi]$.
2. $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) \equiv \arg(z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}})\ [2\pi]$.
4. $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \equiv \arg(z_{\mathrm{B}}) - \arg(z_{\mathrm{A}}) \equiv \arg\left(\dfrac{z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{A}}}\right)\ [2\pi]$.

Preuve :

1. La première assertion est la définition.
2. Quant à la deuxième, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ i.e. $z_{\mathrm{M}} = z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}$. On applique alors les résultats précédents :

$$\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) \equiv \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) \equiv \arg(z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}})\ [2\pi]\,.$$

3. Enfin, $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \equiv \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) - \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$

$$\equiv \arg(z_{\mathrm{B}}) - \arg(z_{\mathrm{A}}) \equiv \arg\left(\frac{z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{A}}}\right)\ [2\pi]\,.$$

Exemple 7 :

On donne $\mathrm{A}(2+\mathrm{i})$ et $\mathrm{B}(-1-2\mathrm{i})$.

Comment déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, la longueur AB et l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$?

- $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}} = -1-2\mathrm{i}-2-\mathrm{i} = -3-3\mathrm{i}$. Donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(-3\,;-3)$.

Exemple 7 :

On donne $\mathrm{A}(2+\mathrm{i})$ et $\mathrm{B}(-1-2\mathrm{i})$.

Comment déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, la longueur AB et l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$?

- $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}} = -1-2\mathrm{i}-2-\mathrm{i} = -3-3\mathrm{i}$. Donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(-3\,;-3)$.
- $\mathrm{AB} = |z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}| = |-3-3\mathrm{i}| = 3\sqrt{2}$.

Exemple 7 :

On donne $\mathrm{A}(2+\mathrm{i})$ et $\mathrm{B}(-1-2\mathrm{i})$.

Comment déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, la longueur AB et l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$?

- $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}} = -1-2\mathrm{i}-2-\mathrm{i} = -3-3\mathrm{i}$. Donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(-3\,;-3)$.
- $\mathrm{AB} = |z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}| = |-3-3\mathrm{i}| = 3\sqrt{2}$.
- Soit θ un argument de $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$. On a :

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= -\frac{3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta &= -\frac{3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \implies \theta \equiv -\frac{3\pi}{4}\ [2\pi].$$

Donc $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) \equiv -\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

Corollaire 9.1 :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D deux à deux distincts et d'affixes respectivement z_{A}, z_{B}, z_{C} et z_{D}.

Alors :
$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_{\mathrm{D}}-z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}}\right)\ [2\pi]\,.$$

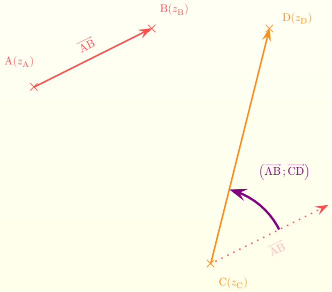


Figure 5 – Angle formé par 4 points.

Corollaire 9.2 :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D deux à deux distincts et d'affixes respectivement z_A, z_B, z_C et z_D.

Alors :
$$\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]\,.$$

Preuve :

La démonstration est identique à la précédente en utilisant les propriétés de l'argument :

$$\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD}\right)$$

Corollaire 9.3 :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D deux à deux distincts et d'affixes respectivement z_{A}, z_{B}, z_{C} et z_{D}.

Alors :
$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_{\mathrm{D}}-z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}}\right)\ [2\pi]\,.$$

Preuve :

La démonstration est identique à la précédente en utilisant les propriétés de l'argument :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right) \equiv \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right) - \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$$

Corollaire 9.4 :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D deux à deux distincts et d'affixes respectivement z_{A}, z_{B}, z_{C} et z_{D}.

Alors :
$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_{\mathrm{D}}-z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}}\right)\ [2\pi]\,.$$

Preuve :

La démonstration est identique à la précédente en utilisant les propriétés de l'argument :

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right) &\equiv \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right) - \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\\ &\equiv \arg\left(z_{\mathrm{D}}-z_{\mathrm{C}}\right) - \arg\left(z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}\right)\end{aligned}$$

Corollaire 9.5 :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D deux à deux distincts et d'affixes respectivement z_A, z_B, z_C et z_D.

Alors : $$\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]\,.$$

Preuve :

La démonstration est identique à la précédente en utilisant les propriétés de l'argument :

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD}\right) &\equiv \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{CD}\right) - \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}\right)\\ &\equiv \arg\left(z_D - z_C\right) - \arg\left(z_B - z_A\right)\\ &\equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]\,.\end{aligned}$$

Exercice 8 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes. Sauf mention contraire, on résoudra ces équations modulo 2π et modulo π.

1. $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}$

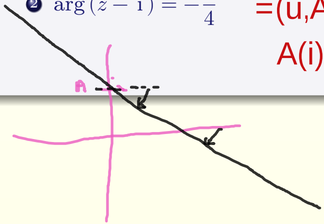
(u,OM)

Exercice 8 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes. Sauf mention contraire, on résoudra ces équations modulo 2π et modulo π.

1. $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}$
2. $\arg(z - \mathrm{i}) = -\dfrac{\pi}{4}$ $=(u,AM)$

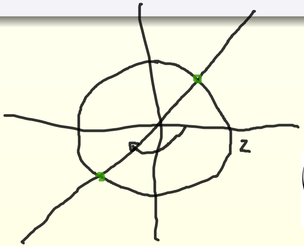
   A(i)



Exercice 8 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes. Sauf mention contraire, on résoudra ces équations modulo 2π et modulo π.

1. $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}$
2. $\arg(z - \mathrm{i}) = -\dfrac{\pi}{4}$
3. $\begin{cases} \arg(z) = -\dfrac{3\pi}{4} \\ |z| = 2. \end{cases}$



II. Ensembles de points

4. Alignement, orthogonalité, angles

Lemme 1 (Produit scalaire et déterminant) :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe respective $z_u = a + \mathrm{i}\,b$ et $z_v = a' + \mathrm{i}\,b'$.

- $\mathrm{Re}\,(z_v \overline{z_u}) = aa' + bb'$.
- $\mathrm{Im}\,(z_v \overline{z_u}) = ab' - a'b$.

Lemme 1 (Produit scalaire et déterminant) :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe respective $z_u = a + \mathrm{i}\, b$ et $z_v = a' + \mathrm{i}\, b'$.

- $\operatorname{Re}\left(z_v \overline{z_u}\right) = aa' + bb'$.
- $\operatorname{Im}\left(z_v \overline{z_u}\right) = ab' - a'b$.

Preuve :

Il suffit de calculer $z_v \overline{z_u} = (ac + bd) + \mathrm{i}\ (ad - bc)$ pour reconnaitre dans les parties réelles et imaginaires les produits scalaires et vectoriels des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Lemme 1 (Produit scalaire et déterminant) :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe respective $z_u = a + \mathrm{i}\, b$ et $z_v = a' + \mathrm{i}\, b'$.

- $\mathrm{Re}\left(z_v \overline{z_u}\right) = aa' + bb'$.
- $\mathrm{Im}\left(z_v \overline{z_u}\right) = ab' - a'b$.

Remarques :

- Dans l'écriture du lemme précédent, on reconnait le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = aa' + bb'.$$

Lemme 1 (Produit scalaire et déterminant) :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe respective $z_u = a + \mathrm{i}\,b$ et $z_v = a' + \mathrm{i}\,b'$.

- $\mathrm{Re}\left(z_v \overline{z_u}\right) = aa' + bb'$.
- $\mathrm{Im}\left(z_v \overline{z_u}\right) = ab' - a'b$.

Remarques :

- Dans l'écriture du lemme précédent, on reconnait le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = aa' + bb'.$$

- La deuxième expression s'appelle le déterminant des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\det\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right) = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b.$$

ax+b=c

a'x+b'y=c'

Lemme 1 (Produit scalaire et déterminant) :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe respective $z_u = a + \mathrm{i}\, b$ et $z_v = a' + \mathrm{i}\, b'$.

- $\mathrm{Re}\left(z_v \overline{z_u}\right) = aa' + bb'$.
- $\mathrm{Im}\left(z_v \overline{z_u}\right) = ab' - a'b$.

Théorème 10 (Colinéarité et orthogonalité de vecteurs) :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe respective z_u et z_v.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si $\mathrm{Re}\left(z_v \overline{z_u}\right) = 0$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si $\mathrm{Im}\left(z_v \overline{z_u}\right) = 0$.

On en déduit une caractérisation plus commode :

Corollaire 10.1 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe respective z_u et z_v.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \vec{u} \mathbin{/\!/} \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathbb{R}.$$

($\vec{u}$ non nul) ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls)

Corollaire 10.2 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe respective z_u et z_v.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \vec{u} \,/\!/\, \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathbb{R}.$$

($\vec{u}$ non nul) ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls)

Preuve :

En effet, si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors $z_v\overline{z_u} \neq 0$ et on a :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

Corollaire 10.3 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe respective z_u et z_v.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \vec{u} \,/\!/\, \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathbb{R}.$$

($\vec{u}$ non nul) ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls)

Preuve :

En effet, si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors $z_v \overline{z_u} \neq 0$ et on a :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} \iff z_v \overline{z_u} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$$

Corollaire 10.4 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe respective z_u et z_v.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \vec{u} \,/\!/\, \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathbb{R}.$$

($\vec{u}$ non nul) ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls)

Preuve :

En effet, si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors $z_v\overline{z_u} \neq 0$ et on a :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} \iff z_v\overline{z_u} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \iff \arg\left(z_v\overline{z_u}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi]$$

Corollaire 10.5 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe respective z_u et z_v.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \vec{u} \,/\!/\, \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathbb{R}.$$

($\vec{u}$ non nul) ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls)

Preuve :

En effet, si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors $z_v \overline{z_u} \neq 0$ et on a :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} \iff z_v\overline{z_u} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \iff \arg\left(z_v\overline{z_u}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \;[\pi]$$

$$\iff \arg\left(\frac{z_v}{z_u}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \;[2\pi]$$

Corollaire 10.6 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe respective z_u et z_v.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \vec{u} \,/\!/\, \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathbb{R}.$$

($\vec{u}$ non nul) ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls)

Preuve :

En effet, si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors $z_v\overline{z_u} \neq 0$ et on a :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} \iff z_v\overline{z_u} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \iff \arg\left(z_v\overline{z_u}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi]$$

$$\iff \arg\left(\frac{z_v}{z_u}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}.$$

Corollaire 10.1 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe respective z_u et z_v.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \vec{u} \,/\!/\, \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathbb{R}.$$

($\vec{u}$ non nul) ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls)

Preuve :
En effet, si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors $z_v\overline{z_u} \neq 0$ et on a :

$$\begin{aligned} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} &\iff z_v\overline{z_u} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \iff \arg\left(z_v\overline{z_u}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi] \\ &\iff \arg\left(\frac{z_v}{z_u}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}. \end{aligned}$$

On vérifie que l'équivalence perdure si $\vec{v} = \vec{0}$, le vecteur nul étant orthogonaux à tous vecteurs du plan et $0 \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$.

II. Ensembles de points

4. Alignement, orthogonalité, angles

Corollaire 10.8 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe respective z_u et z_v.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \vec{u} \,/\!/\, \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathbb{R}.$$

($\vec{u}$ non nul) ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls)

Preuve :

De même, pour $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, on a :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Corollaire 10.9 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe respective z_u et z_v.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \vec{u} \,/\!/\, \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathbb{R}.$$

($\vec{u}$ non nul) ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls)

Preuve :

De même, pour $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, on a :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \iff z_v \overline{z_u} \in \mathbb{R}$$

Corollaire 10.10 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe respective z_u et z_v.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \vec{u} \,/\!/\, \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathbb{R}.$$

($\vec{u}$ non nul) ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls)

Preuve :

De même, pour $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, on a :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \iff z_v\overline{z_u} \in \mathbb{R} \iff \arg\left(z_v\overline{z_u}\right) \equiv 0 \ [\pi]$$

Corollaire 10.11 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe respective z_u et z_v.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \vec{u} \,/\!/\, \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathbb{R}.$$

($\vec{u}$ non nul) ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls)

Preuve :

De même, pour $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, on a :

$$\begin{aligned} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} &\iff z_v\overline{z_u} \in \mathbb{R} \iff \arg(z_v\overline{z_u}) \equiv 0 \ [\pi] \\ &\iff \arg(z_v) + \arg(\overline{z_u}) \equiv 0 \ [\pi] \end{aligned}$$

Corollaire 10.12 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe respective z_u et z_v.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \vec{u} \,/\!/\, \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathbb{R}.$$

($\vec{u}$ non nul) ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls)

Preuve :

De même, pour $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, on a :

$$\begin{aligned} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} &\iff z_v\overline{z_u} \in \mathbb{R} \iff \arg\left(z_v\overline{z_u}\right) \equiv 0 \ [\pi] \\ &\iff \arg\left(z_v\right) + \arg\left(\overline{z_u}\right) \equiv 0 \ [\pi] \\ &\iff \arg\left(z_v\right) - \arg\left(z_u\right) \equiv 0 \ [\pi] \end{aligned}$$

Corollaire 10.13 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe respective z_u et z_v.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \vec{u} \,/\!/\, \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathbb{R}.$$

($\vec{u}$ non nul) ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls)

Preuve :

De même, pour $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, on a :

$$\begin{aligned}
\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} &\iff z_v\overline{z_u} \in \mathbb{R} \iff \arg\left(z_v\overline{z_u}\right) \equiv 0 \ [\pi] \\
&\iff \arg\left(z_v\right) + \arg\left(\overline{z_u}\right) \equiv 0 \ [\pi] \\
&\iff \arg\left(z_v\right) - \arg\left(z_u\right) \equiv 0 \ [\pi] \\
&\iff \arg\left(\frac{z_v}{z_u}\right) \equiv 0 \ [\pi]
\end{aligned}$$

Corollaire 10.14 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe respective z_u et z_v.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \vec{u} \,/\!/\, \vec{v} \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathbb{R}.$$

($\vec{u}$ non nul) ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls)

Preuve :

De même, pour $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, on a :

$$\begin{aligned}
\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} &\iff z_v\overline{z_u} \in \mathbb{R} \iff \arg\left(z_v\overline{z_u}\right) \equiv 0 \ [\pi] \\
&\iff \arg\left(z_v\right) + \arg\left(\overline{z_u}\right) \equiv 0 \ [\pi] \\
&\iff \arg\left(z_v\right) - \arg\left(z_u\right) \equiv 0 \ [\pi] \\
&\iff \arg\left(\frac{z_v}{z_u}\right) \equiv 0 \ [\pi] \iff \frac{z_v}{z_u} \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Corollaire 10.15 (Colinéarité et orthogonalité) :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$ et d'affixe respective z_A, z_B, z_C et z_D.

A, B et C sont distincts et alignés $\iff$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires non nuls $\iff$ $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.

Preuve :

Il suffit de traduire le théorème (10) et le corollaire (10.1) attenant :

- Soient trois points A, B et C distincts. En particulier, $z_{\overrightarrow{AC}}$ et $z_{\overrightarrow{AB}}$ sont non nuls.

A, B et C sont alignés

Corollaire 10.16 (Colinéarité et orthogonalité) :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$ et d'affixe respective z_A, z_B, z_C et z_D.

$$\text{A, B et C sont distincts et alignés} \iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires non nuls} \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}.$$

Preuve :

Il suffit de traduire le théorème (10) et le corollaire (10.1) attenant :

- Soient trois points A, B et C distincts. En particulier, $z_{\overrightarrow{AC}}$ et $z_{\overrightarrow{AB}}$ sont non nuls.

$$\text{A, B et C sont alignés} \iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires}$$

Corollaire 10.17 (Colinéarité et orthogonalité) :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$ et d'affixe respective z_A, z_B, z_C et z_D.

$$\text{A, B et C sont distincts et alignés} \iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires non nuls} \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}.$$

Preuve :

Il suffit de traduire le théorème (10) et le corollaire (10.1) attenant :

- Soient trois points A, B et C distincts. En particulier, $z_{\overrightarrow{AC}}$ et $z_{\overrightarrow{AB}}$ sont non nuls.

$$\begin{aligned}\text{A, B et C sont alignés} &\iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires}\\ &\iff \frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Corollaire 10.18 (Colinéarité et orthogonalité) :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$ et d'affixe respective z_A, z_B, z_C et z_D.

$$\text{A, B et C sont distincts et alignés} \iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires non nuls} \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}.$$

Preuve :

Il suffit de traduire le théorème (10) et le corollaire (10.1) attenant :

- Soient trois points A, B et C distincts. En particulier, $z_{\overrightarrow{AC}}$ et $z_{\overrightarrow{AB}}$ sont non nuls.

$$\begin{aligned}\text{A, B et C sont alignés} &\iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff \frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} \in \mathbb{R} \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Corollaire 10.19 (Colinéarité et orthogonalité) :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$ et d'affixe respective z_A, z_B, z_C et z_D.

$$(AB) \mathbin{/\!/} (CD) \iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ sont colinéaires non nuls} \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}.$$

Preuve :

Il suffit de traduire le théorème (10) et le corollaire (10.1) attenant :

- Soient (AB) et (CD) deux droites, chacune définie par des points distincts. En particulier, $z_{\overrightarrow{AB}}$ et $z_{\overrightarrow{CD}}$ sont non nuls.

(AB) et (CD) sont parallèles

Corollaire 10.20 (Colinéarité et orthogonalité) :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D tels que $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ et $\mathrm{C} \neq \mathrm{D}$ et d'affixe respective z_{A}, z_{B}, z_{C} et z_{D}.

$$(\mathrm{AB}) \,/\!/\, (\mathrm{CD}) \iff \overrightarrow{\mathrm{AB}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{CD}} \text{ sont colinéaires non nuls} \iff \frac{z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}} \in \mathbb{R}.$$

Preuve :

Il suffit de traduire le théorème (10) et le corollaire (10.1) attenant :

- Soient (AB) et (CD) deux droites, chacune définie par des points distincts. En particulier, $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$ et $z_{\overrightarrow{\mathrm{CD}}}$ sont non nuls.

$$(\mathrm{AB}) \text{ et } (\mathrm{CD}) \text{ sont parallèles} \iff \overrightarrow{\mathrm{AB}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{CD}} \text{ sont colinéaires}$$

Corollaire 10.21 (Colinéarité et orthogonalité) :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D tels que $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ et $\mathrm{C} \neq \mathrm{D}$ et d'affixe respective z_{A}, z_{B}, z_{C} et z_{D}.

$$(\mathrm{AB}) \mathbin{/\!/} (\mathrm{CD}) \iff \overrightarrow{\mathrm{AB}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{CD}} \text{ sont colinéaires non nuls} \iff \frac{z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}} \in \mathbb{R}.$$

Preuve :

Il suffit de traduire le théorème (10) et le corollaire (10.1) attenant :

- Soient (AB) et (CD) deux droites, chacune définie par des points distincts. En particulier, $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$ et $z_{\overrightarrow{\mathrm{CD}}}$ sont non nuls.

$$\begin{aligned}(\mathrm{AB}) \text{ et } (\mathrm{CD}) \text{ sont parallèles } &\iff \overrightarrow{\mathrm{AB}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{CD}} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff \frac{z_{\overrightarrow{\mathrm{CD}}}}{z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}} \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Corollaire 10.22 (Colinéarité et orthogonalité) :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D tels que $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ et $\mathrm{C} \neq \mathrm{D}$ et d'affixe respective z_{A}, z_{B}, z_{C} et z_{D}.

$$(\mathrm{AB}) \mathbin{/\!/} (\mathrm{CD}) \iff \overrightarrow{\mathrm{AB}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{CD}} \text{ sont colinéaires non nuls} \iff \frac{z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}} \in \mathbb{R}.$$

Preuve :

Il suffit de traduire le théorème (10) et le corollaire (10.1) attenant :

- Soient (AB) et (CD) deux droites, chacune définie par des points distincts. En particulier, $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$ et $z_{\overrightarrow{\mathrm{CD}}}$ sont non nuls.

$$\begin{aligned}(\mathrm{AB}) \text{ et } (\mathrm{CD}) \text{ sont parallèles} &\iff \overrightarrow{\mathrm{AB}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{CD}} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff \frac{z_{\overrightarrow{\mathrm{CD}}}}{z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}} \in \mathbb{R} \iff \frac{z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}} \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Corollaire 10.23 (Colinéarité et orthogonalité) :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$ et d'affixe respective z_A, z_B, z_C et z_D.

$$(AB) \perp (CD) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}.$$

Preuve :

Il suffit de traduire le théorème (10) et le corollaire (10.1) attenant :

- Enfin, Soient (AB) et (CD) deux droites, chacune définie par des points distincts. En particulier, $z_{\overrightarrow{AB}}$ est non nul.

  (AB) et (CD) sont perpendiculaires

Corollaire 10.24 (Colinéarité et orthogonalité) :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D tels que $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ et $\mathrm{C} \neq \mathrm{D}$ et d'affixe respective z_{A}, z_{B}, z_{C} et z_{D}.

$$(\mathrm{AB}) \perp (\mathrm{CD}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}} \in i\mathbb{R}.$$

Preuve :

Il suffit de traduire le théorème (10) et le corollaire (10.1) attenant :

- Enfin, Soient (AB) et (CD) deux droites, chacune définie par des points distincts. En particulier, $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$ est non nul.

$$(\mathrm{AB}) \text{ et } (\mathrm{CD}) \text{ sont perpendiculaires} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AB}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{CD}} \text{ sont orthogonaux}$$

Corollaire 10.25 (Colinéarité et orthogonalité) :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D tels que $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ et $\mathrm{C} \neq \mathrm{D}$ et d'affixe respective z_A, z_B, z_C et z_D.

$$(\mathrm{AB}) \perp (\mathrm{CD}) \quad \iff \quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0 \quad \iff \quad \frac{z_\mathrm{D} - z_\mathrm{C}}{z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}.$$

Preuve :

Il suffit de traduire le théorème (10) et le corollaire (10.1) attenant :

- Enfin, Soient (AB) et (CD) deux droites, chacune définie par des points distincts. En particulier, $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$ est non nul.

$$\begin{aligned}(\mathrm{AB}) \text{ et } (\mathrm{CD}) \text{ sont perpendiculaires} &\iff \overrightarrow{\mathrm{AB}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{CD}} \text{ sont orthogonaux} \\ &\iff \frac{z_{\overrightarrow{\mathrm{CD}}}}{z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}\end{aligned}$$

Corollaire 10.26 (Colinéarité et orthogonalité) :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D tels que $\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$ et $\mathrm{C}\neq\mathrm{D}$ et d'affixe respective z_A, z_B, z_C et z_D.

$$(\mathrm{AB})\perp(\mathrm{CD}) \quad\Longleftrightarrow\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{z_\mathrm{D}-z_\mathrm{C}}{z_\mathrm{B}-z_\mathrm{A}}\in\mathrm{i}\,\mathbb{R}.$$

Preuve :

Il suffit de traduire le théorème (10) et le corollaire (10.1) attenant :

- Enfin, Soient (AB) et (CD) deux droites, chacune définie par des points distincts. En particulier, $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$ est non nul.

$$\begin{aligned}(\mathrm{AB}) \text{ et } (\mathrm{CD}) \text{ sont perpendiculaires} &\Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AB}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{CD}} \text{ sont orthogonaux}\\ &\Longleftrightarrow \frac{z_{\overrightarrow{\mathrm{CD}}}}{z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}}\in\mathrm{i}\,\mathbb{R} \Longleftrightarrow \frac{z_\mathrm{D}-z_\mathrm{C}}{z_\mathrm{B}-z_\mathrm{A}}\in\mathrm{i}\,\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Remarque : En particulier, trois points distincts A, B et C sont alignés si, et seulement si

$$\underset{\text{théorème (10)}}{\mathrm{Im}\left((z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}})(\overline{z_{\mathrm{B}}} - \overline{z_{\mathrm{A}}})\right) = 0} \iff \underset{\textit{corollaire } (10.15)}{\frac{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}} \in \mathbb{R}}$$

$$\iff \exists\, k \in \mathbb{R} \text{ tel que } z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}} = k(z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}).$$

La première assertion signifie donc simplement que deux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont colinéaires si, et seulement si leur affixe $z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}$ et $z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}$ sont proportionnelles dans $\mathbb{R}$.

Exercice 9 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}z$ soient alignés.

z-i/iz-z dans R

z-i/z(i-1)

iz-i/iz-z dans R

Proposition 11 (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle **non dégénéré**.

$$\text{ABC est isocèle en A} \iff AB = AC$$

Proposition 11 (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle non dégénéré.

$$\text{ABC est isocèle en A} \iff \text{AB} = \text{AC} \iff |z_{\text{B}} - z_{\text{A}}| = |z_{\text{C}} - z_{\text{A}}|.$$

(BC,BA)=(CA,CB) <=>arg(za-zb/zc-zb)=arg(...)

Proposition 11 (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle non dégénéré.

$$\text{ABC est équilatéral} \iff \text{AB} = \text{AC} = \text{BC}$$

Proposition ll (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle **non dégénéré**.

$$\begin{aligned}\text{ABC est équilatéral} &\iff \mathrm{AB} = \mathrm{AC} = \mathrm{BC} \\ &\iff |z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}| = |z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}| = |z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{B}}|\end{aligned}$$

Proposition 11 (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle **non dégénéré**.

$$\begin{aligned} \text{ABC est équilatéral} &\iff \mathrm{AB} = \mathrm{AC} = \mathrm{BC} \\ &\iff |z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}| = |z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}| = |z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{B}}| \\ \text{ou} & \\ &\iff \mathrm{AB} = \mathrm{AC} \ \text{ et } \ \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{3} \ [2\pi] \end{aligned}$$

Proposition II (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle **non dégénéré**.

$$\begin{aligned}
\text{ABC est équilatéral} &\iff \mathrm{AB} = \mathrm{AC} = \mathrm{BC} \\
&\iff |z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}| = |z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}| = |z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{B}}|
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
&\iff \mathrm{AB} = \mathrm{AC} \ \text{ et } \ \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{3} \ [2\pi] \\
&\iff |z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}| = |z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}| \ \text{ et } \ \arg\left(\frac{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{3} \ [2\pi].
\end{aligned}$$

Proposition II (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle non dégénéré.

$$
\begin{aligned}
\text{ABC est équilatéral} &\iff \mathrm{AB} = \mathrm{AC} = \mathrm{BC} \\
&\iff |z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}| = |z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}| = |z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{B}}|
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
&\iff \mathrm{AB} = \mathrm{AC} \ \text{ et } \ \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{3} \ [2\pi] \\
&\iff |z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}| = |z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}| \ \text{ et } \ \arg\left(\frac{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{3} \ [2\pi].
\end{aligned}
$$

ou

$$
\iff \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{BC}}\,;\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{3} \ [2\pi]
$$

Proposition 11 (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle **non dégénéré**.

$$\begin{aligned}
\text{ABC est équilatéral} &\iff \mathrm{AB} = \mathrm{AC} = \mathrm{BC} \\
&\iff |z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}| = |z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}| = |z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{B}}|
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
&\iff \mathrm{AB} = \mathrm{AC} \ \text{ et } \ \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{3} \ [2\pi] \\
&\iff |z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}| = |z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}| \ \text{ et } \ \arg\left(\frac{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{3} \ [2\pi].
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
&\iff \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{BC}}\,;\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{3} \ [2\pi] \\
&\iff \arg\left(\frac{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}}\right) = \arg\left(\frac{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{B}}}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{3} \ [2\pi].
\end{aligned}$$

Proposition 11 (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle non dégénéré.

ABC est rectangle en A

Proposition II (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle **non dégénéré**.

$$\text{ABC est rectangle en A} \iff \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \\ \\ \end{cases}$$

Proposition II (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle **non dégénéré**.

$$\text{ABC est rectangle en A} \iff \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \text{ou} \\ \arg\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) \equiv \pm\dfrac{\pi}{2} \ [2\pi] \end{cases}$$

Proposition 11 (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle **non dégénéré**.

$$\text{ABC est rectangle en A} \iff \begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0 \\ \text{ou} \\ \arg\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \equiv \pm\dfrac{\pi}{2}\ \ [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \frac{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}.$$

Proposition II (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle **non dégénéré**.

ABC est rectangle isocèle en A

Proposition II (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle non dégénéré.

$$\text{ABC est rectangle isocèle en A} \iff \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \text{ et } AB = AC$$

Proposition II (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle **non dégénéré**.

$$\text{ABC est rectangle isocèle en A} \iff \overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0 \ \text{ et } \ \mathrm{AB} = \mathrm{AC}$$
$$\iff \frac{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}} = \pm\, \mathrm{i}\,.$$

Proposition 11 (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle non dégénéré.

$$\text{ABC est rectangle isocèle en A} \iff \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \text{ et } AB = AC$$
$$\iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm\, i\,.$$

Preuve :

Le triangle étant non dégénéré, les sommets ne sont ni confondus, ni alignés i.e. leur affixe sont distinctes.

Proposition 11 (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle **non dégénéré**.

$$\begin{aligned} \text{ABC est rectangle isocèle en A} &\iff \overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0 \ \text{ et } \ \mathrm{AB} = \mathrm{AC} \\ &\iff \frac{z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}}{z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}} = \pm \mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

Preuve :

On sait déjà que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0 \iff \dfrac{z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}}{z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$

Proposition 11 (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle non dégénéré.

$$\begin{aligned} \text{ABC est rectangle isocèle en A} &\iff \overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0 \ \text{ et } \ \mathrm{AB} = \mathrm{AC} \\ &\iff \frac{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}} = \pm\,\mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

Preuve :

On sait déjà que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0 \iff \dfrac{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$ i.e. $\exists r \in \mathbb{R}+$ tel que $\dfrac{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}} = r\,\mathrm{e}^{\pm\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}$.

Proposition II (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle non dégénéré.

$$\begin{aligned} \text{ABC est rectangle isocèle en A} &\iff \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \ \text{ et } \ AB = AC \\ &\iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm\, i\,. \end{aligned}$$

Preuve :

On sait déjà que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \iff \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\,\mathbb{R}$ i.e. $\exists r \in \mathbb{R}+$ tel que $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = r\, e^{\pm i \frac{\pi}{2}}$.

Or, $|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$.

Proposition II (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle **non dégénéré**.

$$\text{ABC est rectangle isocèle en A} \iff \overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0 \ \text{ et } \ \mathrm{AB} = \mathrm{AC}$$
$$\iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm \mathrm{i}\,.$$

Preuve :

On sait déjà que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0 \iff \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$ i.e. $\exists r \in \mathbb{R}+$ tel que $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = r\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}$.

Or, $|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$.

D'où,

$$r = \left| r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}} \right| = \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1.$$

Proposition II (Nature d'un triangle) :

Soit ABC un triangle non dégénéré.

$$\begin{aligned} \text{ABC est rectangle isocèle en A} &\iff \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \ \text{ et } \ AB = AC \\ &\iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm\, \mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

Preuve :

On sait déjà que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \iff \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$ *i.e.* $\exists r \in \mathbb{R}+$ tel que $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = r\,\mathrm{e}^{\pm\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}$.

Or, $|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$.

D'où,

$$r = \left| r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}} \right| = \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1.$$

Conclusion : $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \mathrm{e}^{\pm\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}} = \pm\,\mathrm{i}\,.$

Exercice 10 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}z$ forment un triangle équilatéral.

III. Transformations du plan (Hors-Programme)

Définition 4 :

On considère une application $\mathcal{F} : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longmapsto & \mathcal{P} \\ \mathrm{M} & & \mathrm{M}' \end{array}$.

- Lorsque $\mathcal{F}$ est bijective, on dit que $\mathcal{F}$ est une transformation du plan.

Définition 4 :

On considère une application $\mathscr{F} : \begin{array}{ccc} \mathscr{P} & \longmapsto & \mathscr{P} \\ \mathrm{M} & & \mathrm{M}' \end{array}$.

- Lorsque $\mathscr{F}$ est bijective, on dit que $\mathscr{F}$ est une transformation du plan.
- Lorsque $\mathscr{F}$ est une transformation du plan, la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longmapsto & \mathbb{C} \\ z & & z' \end{array} =(z-1)/(z-2i)$$

qui, à chaque z affixe de M associe z' l'affixe de $\mathscr{F}(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'$ est appelée représentation ou représentation complexe de $\mathscr{F}$.

Définition 4 :

On considère une application $\mathcal{F}$: $\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longmapsto & \mathcal{P} \\ \mathrm{M} & & \mathrm{M}' \end{array}$.

- Lorsque $\mathcal{F}$ est bijective, on dit que $\mathcal{F}$ est une transformation du plan.
- Lorsque $\mathcal{F}$ est une transformation du plan, la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longmapsto & \mathbb{C} \\ z & & z' \end{array}$$

  qui, à chaque z affixe de M associe z' l'affixe de $\mathcal{F}(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'$ est appelée représentation ou représentation complexe de $\mathcal{F}$.

On l'écrit souvent $z' = f(z)$ au lieu de $z \longmapsto f(z)$.

Définition 4 :

On considère une application $\mathcal{F} : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longmapsto & \mathcal{P} \\ \mathrm{M} & & \mathrm{M}' \end{array}$.

- Lorsque $\mathcal{F}$ est bijective, on dit que $\mathcal{F}$ est une **transformation du plan**.
- Lorsque $\mathcal{F}$ est une transformation du plan, la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longmapsto & \mathbb{C} \\ z & & z' \end{array}$$

  qui, à chaque z affixe de M associe z' l'affixe de $\mathcal{F}(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'$ est appelée **représentation** ou **représentation complexe** de $\mathcal{F}$.

Exemple 8 :

la symétrie axiale d'axe $(\mathrm{O}x)$ est une transformation du plan.

Son écriture complexe est : $z \longmapsto \overline{z}$.

Exercice 11 :

1. Donner l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre O.

Exercice 11 :

1. Donner l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre O.
2. Donner l'écriture complexe de la symétrie axiale d'axe $(\mathrm{O}y)$.

Définition 5 :

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.

On appelle **translation de vecteur $\vec{u}$**, notée $t_{\vec{u}}$, toute transformation de $\mathcal{P}$ qui, à tout point M associe le point M′ tel que :

$$\overrightarrow{\mathrm{MM'}} = \vec{u}.$$

Définition 5 :

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.

On appelle translation de vecteur $\vec{u}$, notée $t_{\vec{u}}$, toute transformation de $\mathcal{P}$ qui, à tout point M associe le point M′ tel que :

$$\overrightarrow{\mathrm{MM}'} = \vec{u}.$$

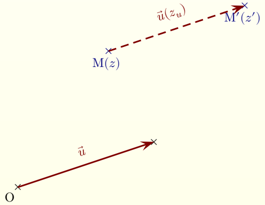


Figure 5 – Translation de vecteur $\vec{u}$.

Proposition 12 (Écriture complexe d'une translation) :

Soit $\vec{u}(a)$ un vecteur du plan.

L'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$ est :

$$z' = z + a$$

Proposition 12 (Écriture complexe d'une translation) :

Soit $\vec{u}(a)$ un vecteur du plan.

L'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$ est :

$$z' = z + a$$

Remarque : $t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}$

Définition 6 :

Soient Ω un point du plan et $k \in \mathbb{R}^*$.

On appelle homothétie de centre Ω et de rapport k, notée $h_{\Omega,k}$, toute transformation de $\mathcal{P}$ qui, à tout point M associe le point M′ tel que :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM'}} = k\overrightarrow{\mathrm{OM}}.$$

Définition 6 :

Soient Ω un point du plan et $k \in \mathbb{R}^*$.

On appelle homothétie de centre Ω et de rapport k, notée $h_{\Omega,k}$, toute transformation de $\mathcal{P}$ qui, à tout point M associe le point M′ tel que :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM'}} = k\overrightarrow{\mathrm{OM}}.$$

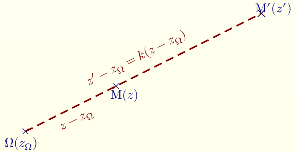


Figure 6 – Homothétie de centre Ω et de rapport r.

Proposition 13 (Écriture complexe d'une homothétie) :

Soient $\Omega(\omega)$ un point du plan et $k \in \mathbb{R}^\star$.

L'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω et de rapport k est :

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

Proposition 13 (Écriture complexe d'une homothétie) :

Soient $\Omega(\omega)$ un point du plan et $k \in \mathbb{R}^\star$.

L'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω et de rapport k est :

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

En particulier, pour $k \in \mathbb{R}^*$, $z \longmapsto kz$ est l'écriture complexe de l'homothétie de centre O et de rapport k.

Proposition 13 (Écriture complexe d'une homothétie) :

Soient $\Omega(\omega)$ un point du plan et $k \in \mathbb{R}^\star$.

L'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω et de rapport k est :

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

En particulier, pour $k \in \mathbb{R}^*$, $z \longmapsto kz$ est l'écriture complexe de l'homothétie de centre O et de rapport k.

Remarque : $h_{\Omega,k}^{-1} = h_{\Omega,\frac{1}{k}}$

III. Transformations du plan (Hors-Programme)

4. Rotation

Définition 7 :

Soient Ω un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$.

On appelle rotation de centre Ω et d'angle θ, notée $r_{\Omega,\theta}$, toute transformation de $\mathcal{P}$ qui, à tout point M associe le point M′ tel que :

$$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta \ [2\pi] \end{cases}$$

Définition 7 :

Soient Ω un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$.

On appelle rotation de centre Ω et d'angle θ, notée $r_{\Omega,\theta}$, toute transformation de $\mathcal{P}$ qui, à tout point M associe le point M′ tel que :

$$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta \ [2\pi] \end{cases}$$

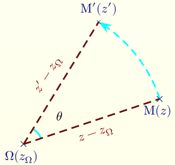


Figure 7 – Rotation de centre Ω et d'angle θ.

Proposition 14 (Écriture complexe d'une rotation) :

Soient $\Omega(\omega)$ un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$.

L'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ est :

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

Proposition 14 (Écriture complexe d'une rotation) :

Soient $\Omega(\omega)$ un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$.

L'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ est :

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

En particulier, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $z \mapsto e^{i\theta}z$ est l'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle θ, $z \mapsto e^{i\pi}z$ celle de la symétrie ce centre O.

III. Transformations du plan (Hors-Programme)

4. Rotation

Proposition 14 (Écriture complexe d'une rotation) :

Soient $\Omega(\omega)$ un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$.

L'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ est :

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

En particulier, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $z \mapsto e^{i\theta} z$ est l'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle θ, $z \mapsto e^{i\pi} z$ celle de la symétrie ce centre O.

Remarque : $r_{\Omega,\theta}^{-1} = r_{\Omega,-\theta}$.

Définition 8 :

Soit $(\mathcal{D})$ une droite du plan.

On appelle **symétrie d'axe $(\mathcal{D})$**, notée $s_{(\mathcal{D})}$, toute transformation de $\mathcal{P}$ qui, à tout point M associe le point M′ tel que $(\mathcal{D})$ soit la médiatrice du segment [MM′].

Définition 8 :

Soit $(\mathcal{D})$ une droite du plan.

On appelle symétrie d'axe $(\mathcal{D})$, notée $s_{(\mathcal{D})}$, toute transformation de $\mathcal{P}$ qui, à tout point M associe le point M′ tel que $(\mathcal{D})$ soit la médiatrice du segment [MM′].

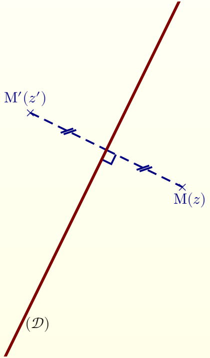


Figure 8 – Symétrie d'axe $(\mathcal{D})$.

Proposition 15 (Écriture complexe d'une symétrie axiale) :

Soit $(\mathcal{D})$ une droite passant par le point A d'affixe z_{A}, et de vecteur directeur unitaire $\vec{u}$, d'affixe $z_{\vec{u}}$.

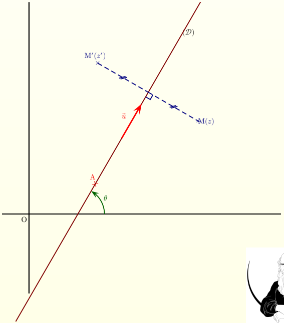
La symétrie orthogonale d'axe $(\mathcal{D})$ est donnée par la fonction

$$s_{(\mathcal{D})} : z \longmapsto z_{\mathrm{A}} + {z_{\vec{u}}}^2(\overline{z} - \overline{z_{\mathrm{A}}}).$$

Preuve :

Notons M le point d'affixe z et $\mathrm{M}'(z')$ son image par la symétrie d'axe $(\mathcal{D})$.

Soit θ l'argument de de $z_{\vec{u}}$.



Proposition 15 (Écriture complexe d'une symétrie axiale) :

Soit $(\mathcal{D})$ une droite passant par le point A d'affixe z_{A}, et de vecteur directeur unitaire $\vec{u}$, d'affixe $z_{\vec{u}}$.

La symétrie orthogonale d'axe $(\mathcal{D})$ est donnée par la fonction

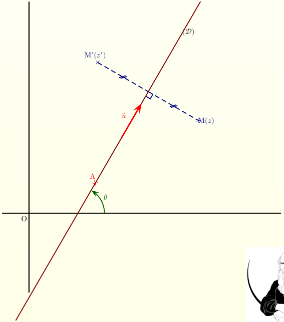
$$s_{(\mathcal{D})} : z \longmapsto z_{\mathrm{A}} + {z_{\vec{u}}}^2(\overline{z} - \overline{z_{\mathrm{A}}}).$$

Preuve :

Notons M le point d'affixe z et $\mathrm{M}'(z')$ son image par la symétrie d'axe $(\mathcal{D})$.

Soit θ l'argument de de $z_{\vec{u}}$.

On commence par faire une rotation de centre O et d'angle $-\theta$ pour nous ramener à une symétrie d'axe parallèle à l'axe des abscisses.



Proposition 15 (Écriture complexe d'une symétrie axiale) :

Soit $(\mathcal{D})$ une droite passant par le point A d'affixe z_{A}, et de vecteur directeur unitaire $\vec{u}$, d'affixe $z_{\vec{u}}$.

La symétrie orthogonale d'axe $(\mathcal{D})$ est donnée par la fonction

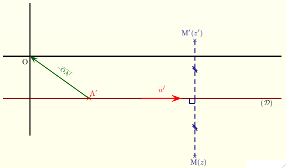
$$s_{(\mathcal{D})} : z \longmapsto z_{\mathrm{A}} + {z_{\vec{u}}}^2 (\overline{z} - \overline{z_{\mathrm{A}}}).$$

Preuve :

Notons M le point d'affixe z et $\mathrm{M}'(z')$ son image par la symétrie d'axe $(\mathcal{D})$.

Soit θ l'argument de de $z_{\vec{u}}$.

On commence par faire une rotation de centre O et d'angle $-\theta$ pour nous ramener à une symétrie d'axe parallèle à l'axe des abscisses. Les affixes seront donc multipliées par $\overline{z_{\vec{u}}}$. Le point $\mathrm{A}(z_{\mathrm{A}})$, par exemple, est transformé en A' $(z_{\mathrm{A}'} = \overline{z_{\vec{u}}} z_{\mathrm{A}})$.



Proposition 15 (Écriture complexe d'une symétrie axiale) :

Soit $(\mathcal{D})$ une droite passant par le point A d'affixe z_{A}, et de vecteur directeur unitaire $\vec{u}$, d'affixe $z_{\vec{u}}$.

La symétrie orthogonale d'axe $(\mathcal{D})$ est donnée par la fonction

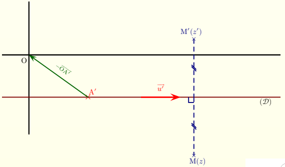
$$s_{(\mathcal{D})} : z \longmapsto z_{\mathrm{A}} + {z_{\vec{u}}}^2\left(\overline{z} - \overline{z_{\mathrm{A}}}\right).$$

Preuve :

Notons M le point d'affixe z et $\mathrm{M}'(z')$ son image par la symétrie d'axe $(\mathcal{D})$.

Soit θ l'argument de de $z_{\vec{u}}$.

On commence par faire une rotation de centre O et d'angle $-\theta$ pour nous ramener à une symétrie d'axe parallèle à l'axe des abscisses. Les affixes seront donc multipliées par $\overline{z_{\vec{u}}}$. Le point $\mathrm{A}(z_{\mathrm{A}})$, par exemple, est transformé en A' $(z_{\mathrm{A}'} = \overline{z_{\vec{u}}}z_{\mathrm{A}})$.

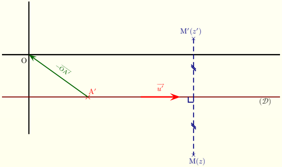


Proposition 15 (Écriture complexe d'une symétrie axiale) :

Soit $(\mathcal{D})$ une droite passant par le point A d'affixe z_A, et de vecteur directeur unitaire $\vec{u}$, d'affixe $z_{\vec{u}}$.

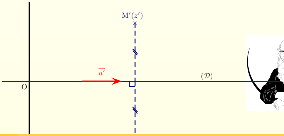
La symétrie orthogonale d'axe $(\mathcal{D})$ est donnée par la fonction

$$s_{(\mathcal{D})} : z \longmapsto z_A + z_{\vec{u}}^{\,2}(\overline{z} - \overline{z_A}).$$



Preuve :

Par une translation de vecteur $-\overrightarrow{OA'}$, on transforme cette symétrie en la conjugaison



Proposition 15 (Écriture complexe d'une symétrie axiale) :

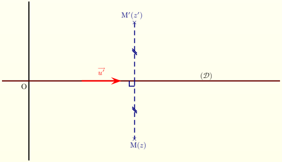
Soit $(\mathcal{D})$ une droite passant par le point A d'affixe z_{A}, et de vecteur directeur unitaire $\vec{u}$, d'affixe $z_{\vec{u}}$.

La symétrie orthogonale d'axe $(\mathcal{D})$ est donnée par la fonction

$$s_{(\mathcal{D})} : z \longmapsto z_{\mathrm{A}} + {z_{\vec{u}}}^2(\overline{z} - \overline{z_{\mathrm{A}}}).$$

Preuve :

Par une translation de vecteur $-\overrightarrow{\mathrm{OA}'}$, on transforme cette symétrie en la conjugaison



i.e. Symétries et translations étant des isométries, M′ est l'image de M par la symétrie d'axe $(\mathcal{D})$ si, et seulement si c'est encore le cas pour leur image par la composée de ces deux transformations.

Proposition 15 (Écriture complexe d'une symétrie axiale) :

Soit $(\mathcal{D})$ une droite passant par le point A d'affixe z_{A}, et de vecteur directeur unitaire $\vec{u}$, d'affixe $z_{\vec{u}}$.

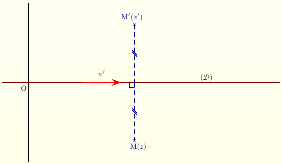
La symétrie orthogonale d'axe $(\mathcal{D})$ est donnée par la fonction

$$s_{(\mathcal{D})} : z \longmapsto z_{\mathrm{A}} + {z_{\vec{u}}}^2\left(\overline{z} - \overline{z_{\mathrm{A}}}\right).$$

Preuve :

Ce qui s'écrit :

$$\overline{z_{\vec{u}}}\,(z' - z_{\mathrm{A}}) = \overline{\overline{z_{\vec{u}}}\,(z - z_{\mathrm{A}})}$$



Proposition 15 (Écriture complexe d'une symétrie axiale) :

Soit $(\mathcal{D})$ une droite passant par le point A d'affixe z_{A}, et de vecteur directeur unitaire $\vec{u}$, d'affixe $z_{\vec{u}}$.

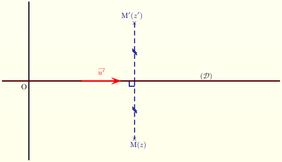
La symétrie orthogonale d'axe $(\mathcal{D})$ est donnée par la fonction

$$s_{(\mathcal{D})} : z \longmapsto z_{\mathrm{A}} + {z_{\vec{u}}}^2 \left(\overline{z} - \overline{z_{\mathrm{A}}}\right).$$

Preuve :

Ce qui s'écrit :

$$\overline{z_{\vec{u}}}\left(z' - z_{\mathrm{A}}\right) = \overline{\overline{z_{\vec{u}}}\left(z - z_{\mathrm{A}}\right)} \iff z' - z_{\mathrm{A}} = \frac{1}{\overline{z_{\vec{u}}}} \times z_{\vec{u}}\left(\overline{z} - \overline{z_{\mathrm{A}}}\right)$$



Proposition 15 (Écriture complexe d'une symétrie axiale) :

Soit $(\mathcal{D})$ une droite passant par le point A d'affixe z_{A}, et de vecteur directeur unitaire $\vec{u}$, d'affixe $z_{\vec{u}}$.

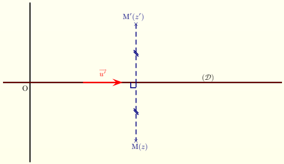
La symétrie orthogonale d'axe $(\mathcal{D})$ est donnée par la fonction

$$s_{(\mathcal{D})} : z \longmapsto z_{\mathrm{A}} + {z_{\vec{u}}}^2(\overline{z} - \overline{z_{\mathrm{A}}}).$$

Preuve :

Ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned}\overline{z_{\vec{u}}}\,(z' - z_{\mathrm{A}}) = \overline{\overline{z_{\vec{u}}}\,(z - z_{\mathrm{A}})} &\iff z' - z_{\mathrm{A}} = \frac{1}{\overline{z_{\vec{u}}}} \times z_{\vec{u}}\,(\overline{z} - \overline{z_{\mathrm{A}}}) \\ &\iff z' - z_{\mathrm{A}} = {z_{\vec{u}}}^2(\overline{z} - \overline{z_{\mathrm{A}}}) \\ &\left(\text{car } z_{\vec{u}} \in \mathbb{U} \implies \frac{1}{\overline{z_{\vec{u}}}} = z_{\vec{u}} \right)\end{aligned}$$



Proposition 15 (Écriture complexe d'une symétrie axiale) :

Soit $(\mathcal{D})$ une droite passant par le point A d'affixe z_{A}, et de vecteur directeur unitaire $\vec{u}$, d'affixe $z_{\vec{u}}$.

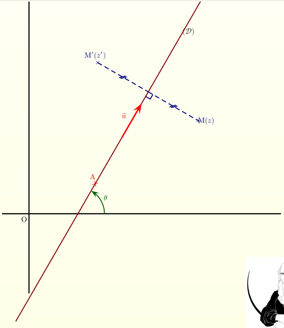
La symétrie orthogonale d'axe $(\mathcal{D})$ est donnée par la fonction

$$s_{(\mathcal{D})} : z \longmapsto z_{\mathrm{A}} + {z_{\vec{u}}}^2\left(\overline{z} - \overline{z_{\mathrm{A}}}\right).$$

Preuve :

Ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned}
\overline{z_{\vec{u}}}\,(z' - z_{\mathrm{A}}) = \overline{z_{\vec{u}}\,(z - z_{\mathrm{A}})} &\iff z' - z_{\mathrm{A}} = \frac{1}{\overline{z_{\vec{u}}}} \times z_{\vec{u}}\,\left(\overline{z} - \overline{z_{\mathrm{A}}}\right) \\
&\iff z' - z_{\mathrm{A}} = {z_{\vec{u}}}^2\left(\overline{z} - \overline{z_{\mathrm{A}}}\right) \\
&\qquad \left(\text{car } z_{\vec{u}} \in \mathbb{U} \implies \frac{1}{\overline{z_{\vec{u}}}} = z_{\vec{u}}\right) \\
&\iff z' = z_{\mathrm{A}} + {z_{\vec{u}}}^2\left(\overline{z} - \overline{z_{\mathrm{A}}}\right).
\end{aligned}$$



Les transformations usuelles étudiées ci-dessus s'écrivent toutes sous la forme $z \longmapsto az+b$ ou $z \longmapsto a\overline{z}+b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.

On montre que, réciproquement, une application de ce type correspond à une transformation usuelle, ou une composée de transformations usuelles du plan :

Théorème 16 (Interprétation des transformations affines de $\mathbb{C}$) :

Soit $(a\,;b) \in \mathbb{C}^2$.

Théorème 16 (Interprétation des transformations affines de $\mathbb{C}$) :

Soit $(a\,;b) \in \mathbb{C}^2$.

1. Soit $\varphi : z \longmapsto az + b$ avec $a \neq 0$.
   1. Si $a = 1$, φ est la représentation d'une **translation** de vecteur $\vec{u}(b)$.

Théorème 16 (Interprétation des transformations affines de $\mathbb{C}$) :

Soit $(a\,;b) \in \mathbb{C}^2$.

1. Soit $\varphi : z \longmapsto az + b$ avec $a \neq 0$.
   1. Si $a = 1$, φ est la représentation d'une **translation** de vecteur $\vec{u}(b)$.

Preuve :

1.
   1. Si $a = 1$, $z' = z + b$ est l'écriture d'une translation de vecteur $\vec{u}(b)$.

Théorème 16 (Interprétation des transformations affines de $\mathbb{C}$) :

Soit $(a\,;b) \in \mathbb{C}^2$.

1. Soit $\varphi : z \longmapsto az + b$ avec $a \neq 0$.
   2. Si $a = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \neq 1$, il existe un point Ω invariant par φ tel que φ soit la représentation de la composée d'une rotation d'angle θ et de centre Ω par une homothétie de rapport r et de même centre.
   On dit que φ est la représentation d'une similitude (directe ou indirecte) de centre Ω, de rapport r et d'angle θ.

Théorème 16 (Interprétation des transformations affines de $\mathbb{C}$) :

Soit $(a\,;b) \in \mathbb{C}^2$.

1. Soit $\varphi : z \longmapsto az + b$ avec $a \neq 0$.
   2. Si $a = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \neq 1$, il existe un point Ω invariant par φ tel que φ soit la représentation de la composée d'une rotation d'angle θ et de centre Ω par une homothétie de rapport r et de même centre.
      On dit que φ est la représentation d'une similitude (directe ou indirecte) de centre Ω, de rapport r et d'angle θ.

Preuve :

1. 2. Si $a \neq 1$, on commence par trouver le point invariant Ω (s'il existe).

Théorème 16 (Interprétation des transformations affines de $\mathbb{C}$) :

Soit $(a\,;b) \in \mathbb{C}^2$.

1. Soit $\varphi : z \longmapsto az + b$ avec $a \neq 0$.
   2. Si $a = r\,e^{i\theta} \neq 1$, il existe un point Ω invariant par φ tel que φ soit la représentation de la **composée** d'une **rotation** d'angle θ et de centre Ω par une **homothétie** de rapport r et de même centre.
      On dit que φ est la représentation d'une **similitude** (directe ou indirecte) de centre Ω, de rapport r et d'angle θ.

Preuve :

1.
   2. Si $a \neq 1$, on commence par trouver le point invariant Ω (s'il existe).

      $\Omega(\omega)$ est invariant par φ si, et seulement si $\omega = a\omega + b$

Théorème 16 (Interprétation des transformations affines de $\mathbb{C}$) :

Soit $(a\,;b) \in \mathbb{C}^2$.

1. Soit $\varphi : z \longmapsto az + b$ avec $a \neq 0$.
   2. Si $a = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 1$, il existe un point Ω invariant par φ tel que φ soit la représentation de la **composée** d'une **rotation** d'angle θ et de centre Ω par une **homothétie** de rapport r et de même centre.
   On dit que φ est la représentation d'une **similitude** (directe ou indirecte) de centre Ω, de rapport r et d'angle θ.

Preuve :

1.
   2. Si $a \neq 1$, on commence par trouver le point invariant Ω (s'il existe).

   $\Omega(\omega)$ est invariant par φ si, et seulement si $\omega = a\omega + b \iff \omega = \dfrac{b}{1-a}$ car $a \neq 1$.

Théorème 16 (Interprétation des transformations affines de $\mathbb{C}$) :

Soit $(a\,;b) \in \mathbb{C}^2$.

1. Soit $\varphi : z \longmapsto az + b$ avec $a \neq 0$.
   2. Si $a = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \neq 1$, il existe un point Ω invariant par φ tel que φ soit la représentation de la **composée** d'une **rotation** d'angle θ et de centre Ω par une **homothétie** de rapport r et de même centre.
   On dit que φ est la représentation d'une **similitude** (directe ou indirecte) de centre Ω, de rapport r et d'angle θ.

Preuve :

1.
   2. Si $a \neq 1$, on commence par trouver le point invariant Ω (s'il existe).

   $\Omega(\omega)$ est invariant par φ si, et seulement si $\omega = a\omega + b \iff \omega = \dfrac{b}{1-a}$ car $a \neq 1$.
   Notons s la transformation complexe associée à φ, $\mathrm{M}'(z')$ l'image de $\mathrm{M}(z)$ par s et $a = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$.

Théorème 16 (Interprétation des transformations affines de $\mathbb{C}$) :

Soit $(a\,;b) \in \mathbb{C}^2$.

1. Soit $\varphi : z \longmapsto az + b$ avec $a \neq 0$.
   2. Si $a = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \neq 1$, il existe un point Ω invariant par φ tel que φ soit la représentation de la composée d'une rotation d'angle θ et de centre Ω par une homothétie de rapport r et de même centre.
   On dit que φ est la représentation d'une similitude (directe ou indirecte) de centre Ω, de rapport r et d'angle θ.

Preuve :

1.
   2. Si $a \neq 1$, on commence par trouver le point invariant Ω (s'il existe).

   $\Omega(\omega)$ est invariant par φ si, et seulement si $\omega = a\omega + b \iff \omega = \dfrac{b}{1-a}$ car $a \neq 1$.
   Notons s la transformation complexe associée à φ, $\mathrm{M}'(z')$ l'image de $\mathrm{M}(z)$ par s et $a = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$.
   On traduit :

$$\mathrm{M}' = s(\mathrm{M})$$

Théorème 16 (Interprétation des transformations affines de $\mathbb{C}$) :

Soit $(a\,;b) \in \mathbb{C}^2$.

1. Soit $\varphi : z \longmapsto az + b$ avec $a \neq 0$.
   2. Si $a = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 1$, il existe un point Ω invariant par φ tel que φ soit la représentation de la composée d'une rotation d'angle θ et de centre Ω par une homothétie de rapport r et de même centre.
   On dit que φ est la représentation d'une similitude (directe ou indirecte) de centre Ω, de rapport r et d'angle θ.

Preuve :

1.
   2. On traduit :

$$\mathrm{M}' = s(\mathrm{M}) \iff z' = az + b$$

Théorème 16 (Interprétation des transformations affines de $\mathbb{C}$) :

Soit $(a\,;b) \in \mathbb{C}^2$.

1. Soit $\varphi : z \longmapsto az+b$ avec $a \neq 0$.
   2. Si $a = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 1$, il existe un point Ω invariant par φ tel que φ soit la représentation de la composée d'une rotation d'angle θ et de centre Ω par une homothétie de rapport r et de même centre.
   On dit que φ est la représentation d'une similitude (directe ou indirecte) de centre Ω, de rapport r et d'angle θ.

Preuve :

1.
   2. On traduit :

$$\begin{aligned} \mathrm{M}' = s(\mathrm{M}) \iff z' &= az+b \\ \omega &= a\omega + b \end{aligned}$$

Théorème 16 (Interprétation des transformations affines de $\mathbb{C}$) :

Soit $(a\,;b) \in \mathbb{C}^2$.

1. Soit $\varphi : z \longmapsto az+b$ avec $a \neq 0$.
    2. Si $a = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 1$, il existe un point Ω invariant par φ tel que φ soit la représentation de la **composée** d'une **rotation** d'angle θ et de centre Ω par une **homothétie** de rapport r et de même centre.
    On dit que φ est la représentation d'une **similitude** (directe ou indirecte) de centre Ω, de rapport r et d'angle θ.

Preuve :

1. 2. On traduit :

$$\mathrm{M}' = s(\mathrm{M}) \iff z' = az + b \iff z' - \omega = a(z - \omega)$$
$$\omega = a\omega + b$$

Théorème 16 (Interprétation des transformations affines de $\mathbb{C}$) :

Soit $(a\,;b) \in \mathbb{C}^2$.

1. Soit $\varphi : z \longmapsto az + b$ avec $a \neq 0$.
   2. Si $a = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 1$, il existe un point Ω invariant par φ tel que φ soit la représentation de la **composée** d'une **rotation** d'angle θ et de centre Ω par une **homothétie** de rapport r et de même centre.
      On dit que φ est la représentation d'une **similitude** (directe ou indirecte) de centre Ω, de rapport r et d'angle θ.

Preuve :

1.
2. On traduit :

$$\mathrm{M}' = s(\mathrm{M}) \iff z' = az + b \qquad \iff z' - \omega = a(z - \omega)$$

$$\iff \begin{cases} |z' - \omega| = |a||z - \omega| \\ \end{cases}$$

Théorème 16 (Interprétation des transformations affines de $\mathbb{C}$) :

Soit $(a\,;b) \in \mathbb{C}^2$.

1. Soit $\varphi : z \longmapsto az + b$ avec $a \neq 0$.
   2. Si $a = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \neq 1$, il existe un point Ω invariant par φ tel que φ soit la représentation de la **composée** d'une **rotation** d'angle θ et de centre Ω par une **homothétie** de rapport r et de même centre.
      On dit que φ est la représentation d'une **similitude** (directe ou indirecte) de centre Ω, de rapport r et d'angle θ.

Preuve :

1.
   2. On traduit :

$$\mathrm{M}' = s(\mathrm{M}) \iff z' = az + b \qquad \iff z' - \omega = a(z - \omega)$$

$$\iff \begin{cases} |z' - \omega| = |a||z - \omega| \\ \arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \equiv \arg(a) \ [2\pi] \end{cases}$$

Théorème 16 (Interprétation des transformations affines de $\mathbb{C}$) :

Soit $(a\,;b) \in \mathbb{C}^2$.

1. Soit $\varphi : z \longmapsto az+b$ avec $a \neq 0$.
   2. Si $a = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \neq 1$, il existe un point Ω invariant par φ tel que φ soit la représentation de la **composée** d'une **rotation** d'angle θ et de centre Ω par une **homothétie** de rapport r et de même centre.
      On dit que φ est la représentation d'une **similitude** (directe ou indirecte) de centre Ω, de rapport r et d'angle θ.

Preuve :

1.
   2. On traduit :

$$\mathrm{M}' = s(\mathrm{M}) \iff z' = az+b \qquad \iff z'-\omega = a(z-\omega)$$

$$\iff \begin{cases} |z'-\omega| = |a||z-\omega| \\ \arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) \equiv \arg(a) \ \ [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \Omega\mathrm{M}' = r\,\Omega\mathrm{M} \\ \end{cases}$$

Théorème 16 (Interprétation des transformations affines de $\mathbb{C}$) :

Soit $(a\,;b) \in \mathbb{C}^2$.

1. Soit $\varphi : z \longmapsto az+b$ avec $a \neq 0$.
   2. Si $a = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \neq 1$, il existe un point Ω invariant par φ tel que φ soit la représentation de la composée d'une rotation d'angle θ et de centre Ω par une homothétie de rapport r et de même centre.
   On dit que φ est la représentation d'une similitude (directe ou indirecte) de centre Ω, de rapport r et d'angle θ.

Preuve :

1.
   2. On traduit :

$$\mathrm{M}' = s(\mathrm{M}) \iff z' = az+b \qquad \iff z'-\omega = a(z-\omega)$$

$$\iff \begin{cases} |z'-\omega| = |a||z-\omega| \\ \arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) \equiv \arg(a) \;\; [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \Omega\mathrm{M}' = r\,\Omega\mathrm{M} \\ \left(\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}, \overrightarrow{\Omega\mathrm{M}'}\right) \equiv \theta \;\; [2\pi] \end{cases}$$

Théorème 16 (Interprétation des transformations affines de $\mathbb{C}$) :

Soit $(a\,;b) \in \mathbb{C}^2$.

1. Soit $\varphi : z \longmapsto az + b$ avec $a \neq 0$.
   2. Si $a = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 1$, il existe un point Ω invariant par φ tel que φ soit la représentation de la **composée** d'une **rotation** d'angle θ et de centre Ω par une **homothétie** de rapport r et de même centre.
      On dit que φ est la représentation d'une **similitude** (directe ou indirecte) de centre Ω, de rapport r et d'angle θ.

Preuve :

1.
   2. On traduit :

$$\mathrm{M}' = s(\mathrm{M}) \iff z' = az + b \iff z' - \omega = a(z - \omega)$$

$$\iff \begin{cases} |z' - \omega| = |a||z - \omega| \\ \arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \equiv \arg(a) \ [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \Omega\mathrm{M}' = r\,\Omega\mathrm{M} \\ \left(\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}, \overrightarrow{\Omega\mathrm{M}'}\right) \equiv \theta \ [2\pi] \end{cases}$$

M' est donc l'image de M par composée de la rotation de centre Ω et d'angle θ et l'homothétie de centre Ω et de rapport r.

Théorème 16 (Interprétation des transformations affines de $\mathbb{C}$) :

Soit $(a\,;b) \in \mathbb{C}^2$.

1. Soit $\varphi : z \longmapsto az + b$ avec $a \neq 0$.
2. Soit $\varphi : z \longmapsto a\bar{z} + b$ avec $a = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \neq 0$ et $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}$.
   Alors φ est la représentation de la composée d'une symétrie d'axe $(\mathcal{D})$ de vecteur directeur $\vec{u}$ et passant par A, d'une translation de vecteur $\alpha\vec{u}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ (un glissement le long de la droite $(\mathcal{D})$) et d'une homothétie de centre O et de rapport r.

Preuve :

2. Très très trop hors-programme ...

Théorème 16 (Interprétation des transformations affines de $\mathbb{C}$) :

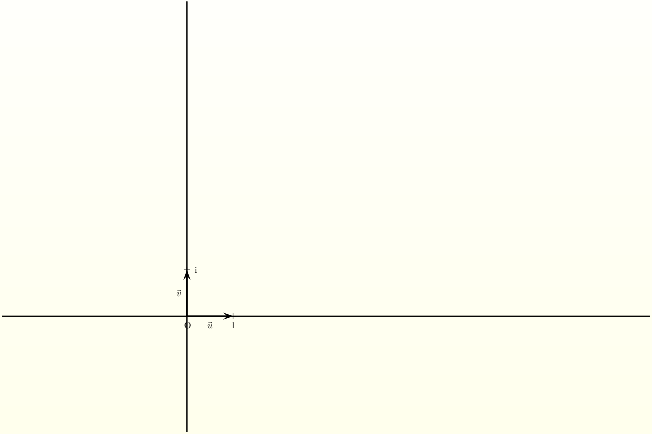
Soit $(a\,;b) \in \mathbb{C}^2$.

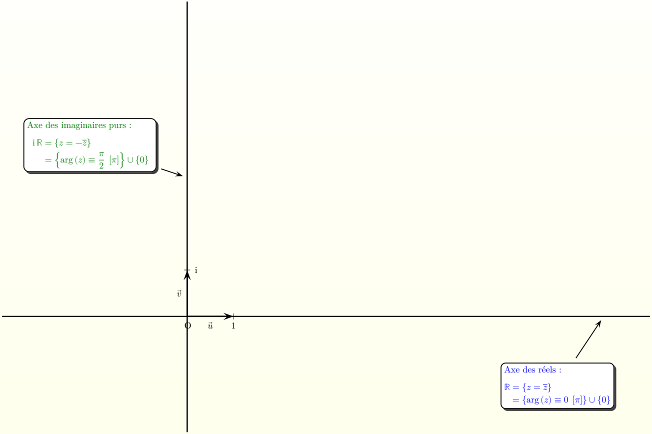
1. Soit $\varphi : z \longmapsto az + b$ avec $a \neq 0$.
2. Soit $\varphi : z \longmapsto a\overline{z} + b$ avec $a = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \neq 0$ et $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}$.

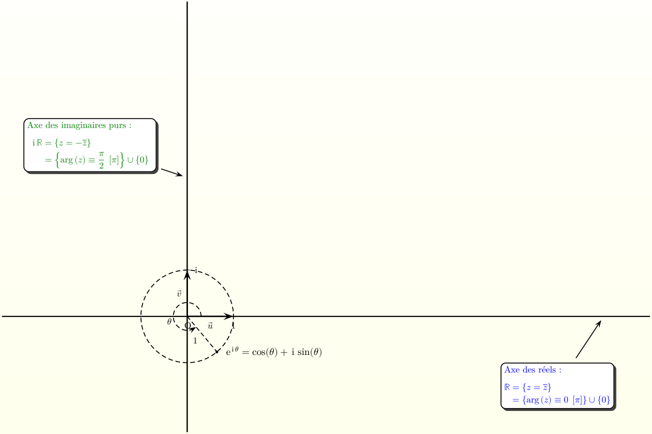
Exercice 12 :

Caractériser la transformation associée à la fonction

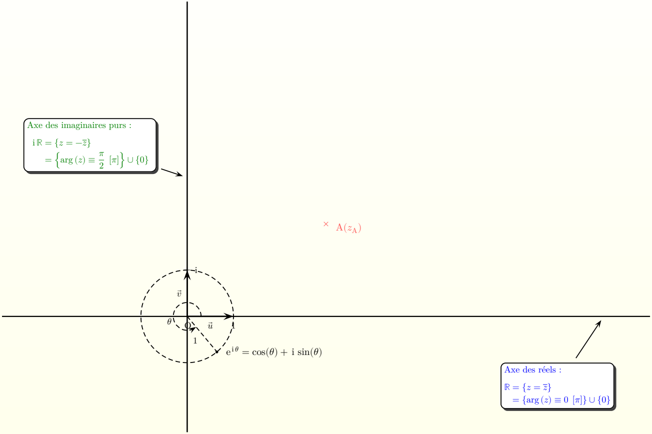
$$f : z \longmapsto 2\,\mathrm{i}\,z + 1.$$


i
$\vec{v}$
O
$\vec{u}$
1

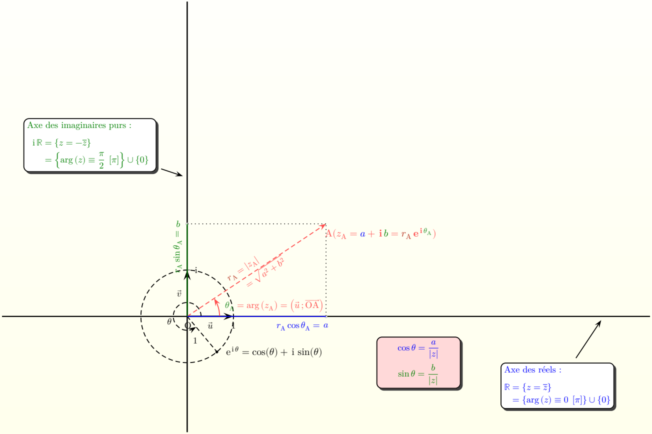

Axe des imaginaires purs :
$\mathrm{i}\,\mathbb{R} = \{z = -\overline{z}\}$
$= \left\{\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]\right\} \cup \{0\}$
i
$\vec{v}$
O
$\vec{u}$
1
Axe des réels :
$\mathbb{R} = \{z = \overline{z}\}$
$= \{\arg(z) \equiv 0\ [\pi]\} \cup \{0\}$



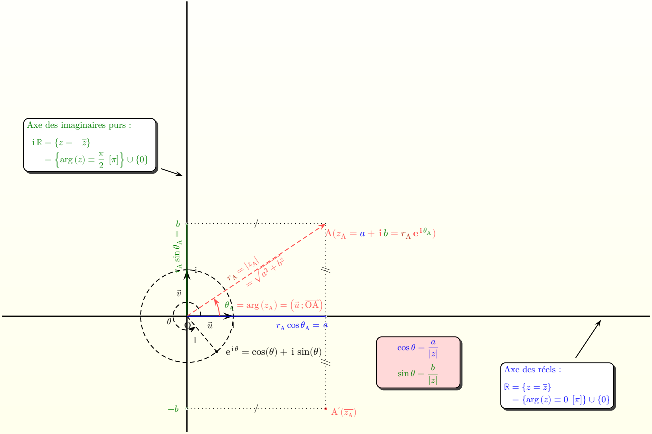
$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} + 1 = 0}$$



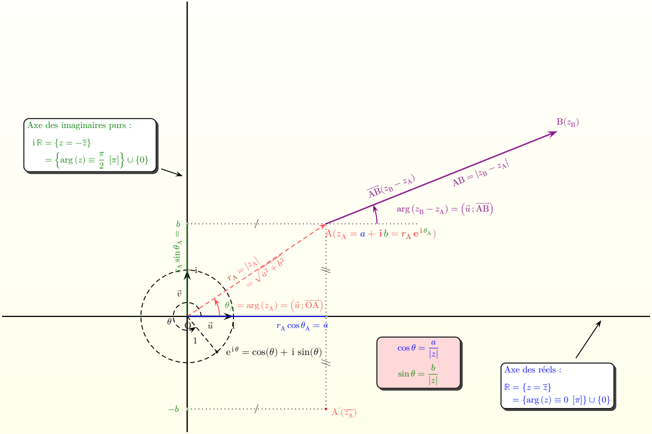
$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$



$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} + 1 = 0$$

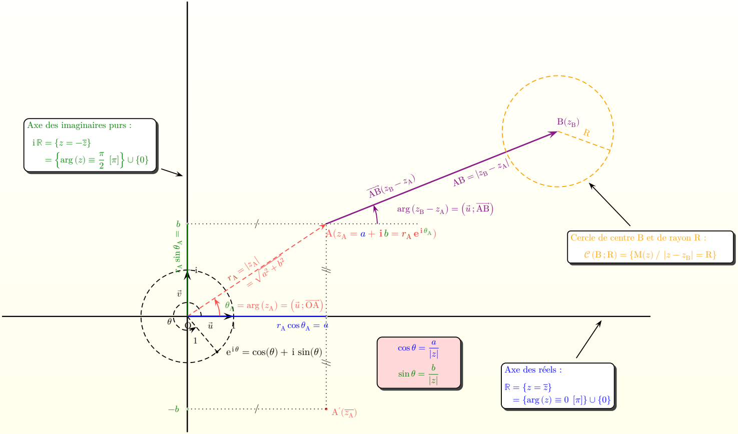


$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} + 1 = 0$$

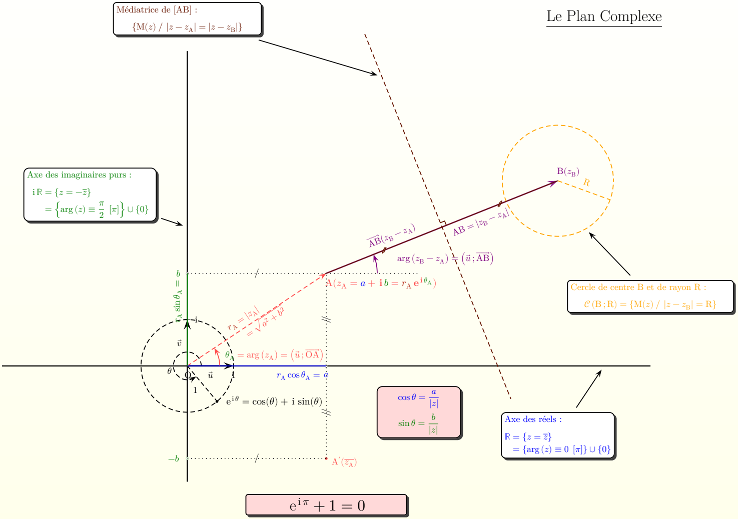


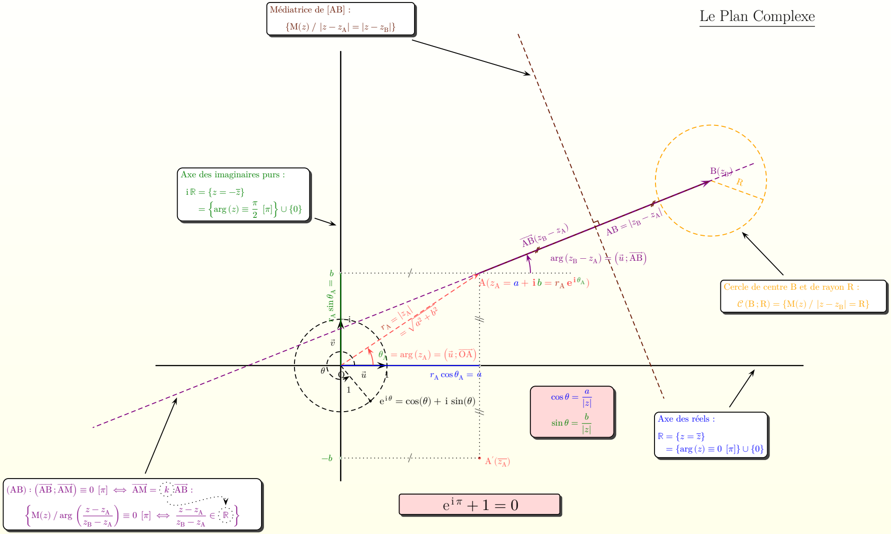
Axe des imaginaires purs :
$i\,\mathbb{R} = \{z = -\bar{z}\}$
$= \left\{\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]\right\} \cup \{0\}$
$B(z_B)$
$\overrightarrow{AB}(z_B - z_A)$
$AB = |z_B - z_A|$
$\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}\,; \overrightarrow{AB})$
b
$A(z_A = a + i\,b = r_A\,e^{i\theta_A})$
$r_A \sin\theta_A =$
$r_A = |z_A| = \sqrt{a^2+b^2}$
$\vec{v}$
$\theta_A = \arg(z_A) = (\vec{u}\,; \overrightarrow{OA})$
θ
O
$\vec{u}$
1
$r_A \cos\theta_A = a$
$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\sin(\theta)$
$\cos\theta = \frac{a}{|z|}$
$\sin\theta = \frac{b}{|z|}$
Axe des réels :
$\mathbb{R} = \{z = \bar{z}\}$
$= \{\arg(z) \equiv 0\ [\pi]\} \cup \{0\}$
$-b$
$A'(\overline{z_A})$

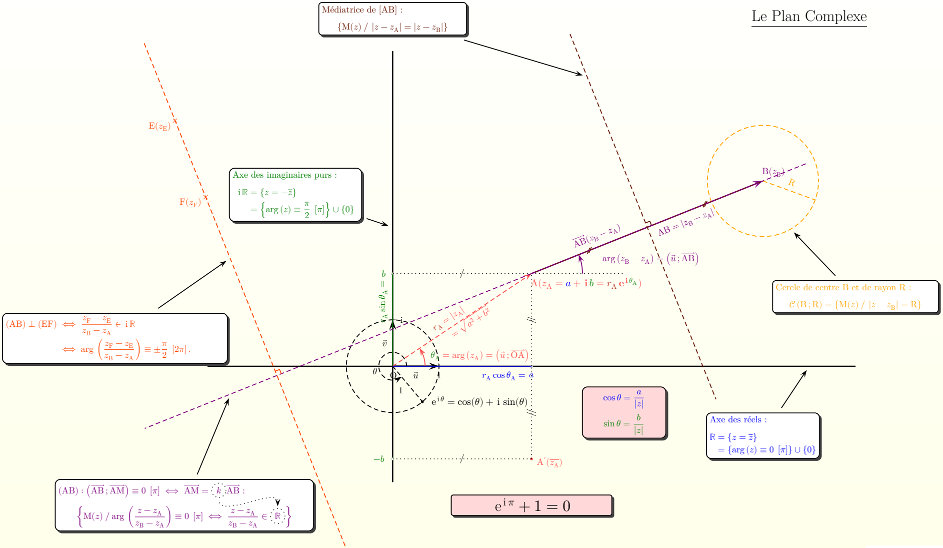
$$e^{i\pi} + 1 = 0$$



$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} + 1 = 0$$

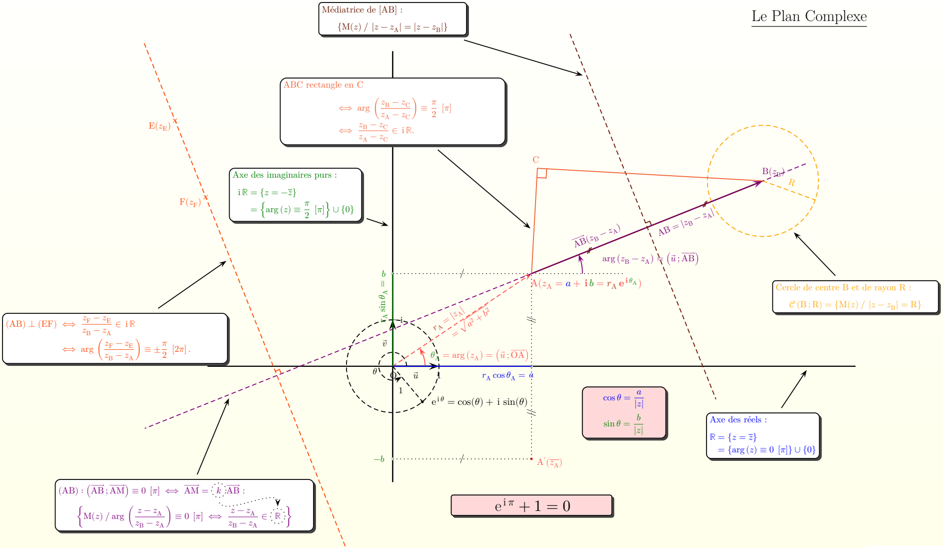

Médiatrice de [AB] :
{M(z) / |z − z_A| = |z − z_B|}
Axe des imaginaires purs :
i ℝ = {z = −z̄}
= {arg (z) ≡ π/2 [π]} ∪ {0}
B(z_B)
R
AB(z_B − z_A)
AB = |z_B − z_A|
arg (z_B − z_A) = (u⃗ ; AB⃗)
A(z_A = a + i b = r_A e^{iθ_A})
Cercle de centre B et de rayon R :
𝒞 (B ; R) = {M(z) / |z − z_B| = R}
b
r_A sin θ_A =
i
v⃗
r_A = |z_A| = √(a² + b²)
θ_A = arg (z_A) = (u⃗ ; OA⃗)
θ
O
u⃗
1
r_A cos θ_A = a
1
e^{iθ} = cos(θ) + i sin(θ)
cos θ = a/|z|
sin θ = b/|z|
Axe des réels :
ℝ = {z = z̄}
= {arg (z) ≡ 0 [π]} ∪ {0}
−b
A′(z̄_A)
e^{iπ} + 1 = 0


Médiatrice de [AB] :
$\{M(z) \;/\; |z - z_A| = |z - z_B|\}$
Axe des imaginaires purs :
$i\mathbb{R} = \{z = -\overline{z}\}$
$= \left\{\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]\right\} \cup \{0\}$
$B(z_B)$
R
$AB = |z_B - z_A|$
$\overrightarrow{AB}(z_B - z_A)$
$\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}\,;\overrightarrow{AB})$
$A(z_A = a + i\,b = r_A\,e^{i\theta_A})$
Cercle de centre B et de rayon R :
$\mathcal{C}(B\,;R) = \{M(z) \;/\; |z - z_B| = R\}$
b
$r_A \sin\theta_A =$
i
$\vec{v}$
$r_A = |z_A|$
$= \sqrt{a^2 + b^2}$
$\theta_A = \arg(z_A) = (\vec{u}\,;\overrightarrow{OA})$
θ
O
$\vec{u}$
1
1
$r_A \cos\theta_A = a$
$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\sin(\theta)$
$\cos\theta = \frac{a}{|z|}$
$\sin\theta = \frac{b}{|z|}$
Axe des réels :
$\mathbb{R} = \{z = \overline{z}\}$
$= \{\arg(z) \equiv 0\ [\pi]\} \cup \{0\}$
$-b$
$A'(\overline{z_A})$
$(AB) : (\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AM}) \equiv 0\ [\pi] \iff \overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$:
$\left\{M(z) \;/\; \arg\left(\frac{z - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv 0\ [\pi] \iff \frac{z - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}\right\}$
$e^{i\pi} + 1 = 0$

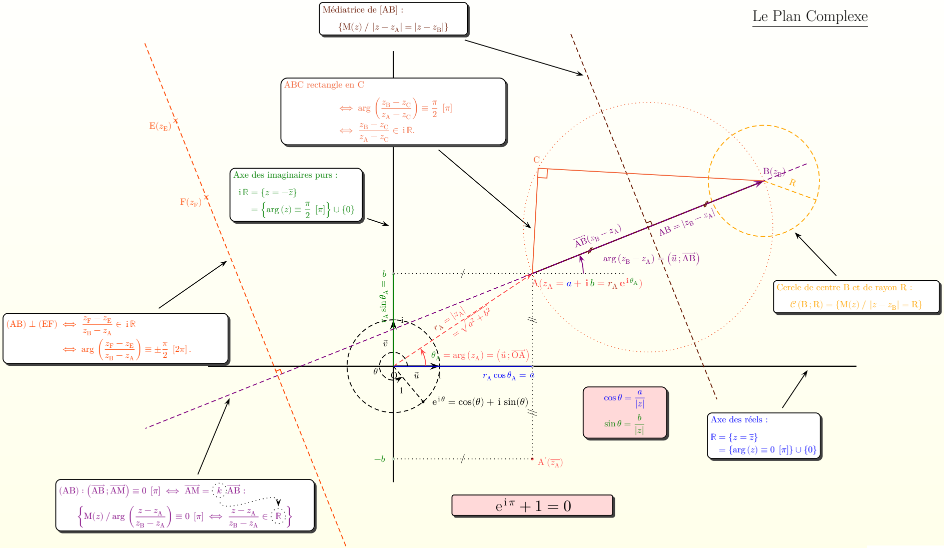


Médiatrice de [AB] :
$\{M(z)\ /\ |z - z_A| = |z - z_B|\}$
Axe des imaginaires purs :
$i\mathbb{R} = \{z = -\overline{z}\}$
$= \left\{\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]\right\} \cup \{0\}$
$E(z_E)$
$F(z_F)$
$(AB) \perp (EF) \iff \frac{z_F - z_E}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$
$\iff \arg\left(\frac{z_F - z_E}{z_B - z_A}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
$(AB) : (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AM}) \equiv 0\ [\pi] \iff \overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$:
$\left\{M(z)\ /\ \arg\left(\frac{z - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv 0\ [\pi] \iff \frac{z - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}\right\}$
$B(z_B)$
R
Cercle de centre B et de rayon R :
$\mathscr{C}(B ; R) = \{M(z)\ /\ |z - z_B| = R\}$
$\overrightarrow{AB}(z_B - z_A)$
$AB = |z_B - z_A|$
$\arg(z_B - z_A) = (\vec{u} ; \overrightarrow{AB})$
$A(z_A = a + i\,b = r_A\,e^{i\,\theta_A})$
b
$r_A \sin\theta_A =$
$r_A = |z_A|$
$= \sqrt{a^2 + b^2}$
$\theta_A = \arg(z_A) = (\vec{u} ; \overrightarrow{OA})$
i
$\vec{v}$
θ
O
$\vec{u}$
1
1
$r_A \cos\theta_A = a$
$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\sin(\theta)$
$\cos\theta = \frac{a}{|z|}$
$\sin\theta = \frac{b}{|z|}$
Axe des réels :
$\mathbb{R} = \{z = \overline{z}\}$
$= \{\arg(z) \equiv 0\ [\pi]\} \cup \{0\}$
$-b$
$A'(\overline{z_A})$
$e^{i\,\pi} + 1 = 0$

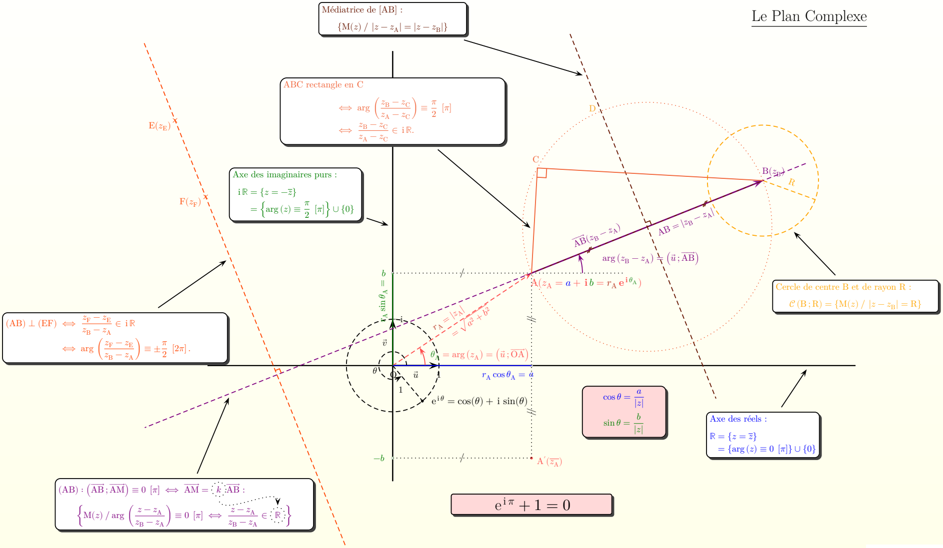
Le Plan Complexe



$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

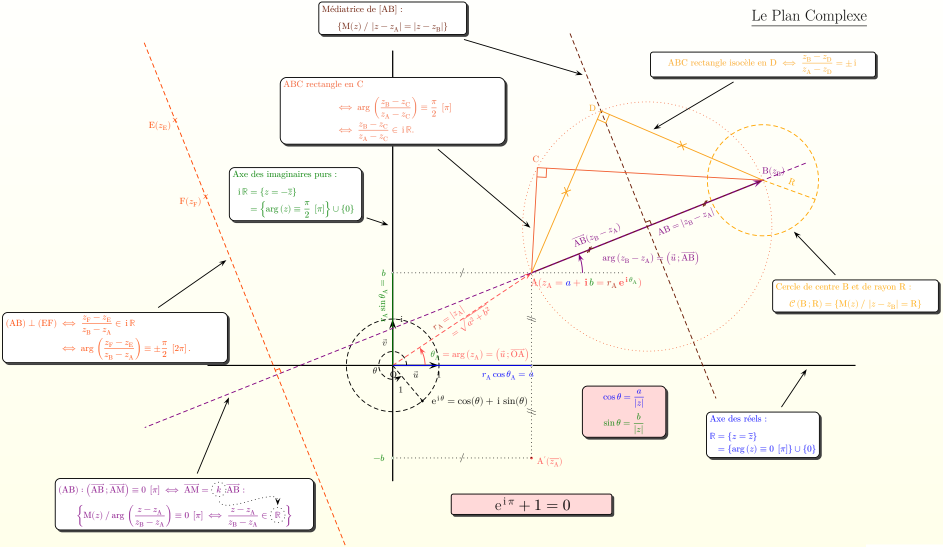


Médiatrice de [AB] :
$\{\mathrm{M}(z)\ /\ |z-z_{\mathrm{A}}|=|z-z_{\mathrm{B}}|\}$
ABC rectangle en C
$\iff \arg\left(\dfrac{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{C}}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$
$\iff \dfrac{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{C}}}\in \mathrm{i}\,\mathbb{R}.$
Axe des imaginaires purs :
$\mathrm{i}\,\mathbb{R}=\{z=-\overline{z}\}$
$=\left\{\arg(z)\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [\pi]\right\}\cup\{0\}$
$\mathrm{E}(z_{\mathrm{E}})$
$\mathrm{F}(z_{\mathrm{F}})$
C
$\mathrm{B}(z_{\mathrm{B}})$
R
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}(z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}})$
$\mathrm{AB}=|z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}|$
$\arg(z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}})=(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}})$
$\mathrm{A}(z_{\mathrm{A}}=a+\mathrm{i}\,b=r_{\mathrm{A}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_{\mathrm{A}}})$
Cercle de centre B et de rayon R :
$\mathscr{C}(\mathrm{B}\,;\mathrm{R})=\{\mathrm{M}(z)\ /\ |z-z_{\mathrm{B}}|=\mathrm{R}\}$
$(\mathrm{AB})\perp(\mathrm{EF}) \iff \dfrac{z_{\mathrm{F}}-z_{\mathrm{E}}}{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}}\in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$
$\iff \arg\left(\dfrac{z_{\mathrm{F}}-z_{\mathrm{E}}}{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}}\right)\equiv\pm\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi].$
b
$r_{\mathrm{A}}\sin\theta_{\mathrm{A}}=$
i
$\vec{v}$
$r_{\mathrm{A}}=|z_{\mathrm{A}}|$
$=\sqrt{a^2+b^2}$
$\theta_{\mathrm{A}}=\arg(z_{\mathrm{A}})=(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OA}})$
θ
O
$\vec{u}$
1
1
$r_{\mathrm{A}}\cos\theta_{\mathrm{A}}=a$
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}=\cos(\theta)+\mathrm{i}\,\sin(\theta)$
$\cos\theta=\dfrac{a}{|z|}$
$\sin\theta=\dfrac{b}{|z|}$
Axe des réels :
$\mathbb{R}=\{z=\overline{z}\}$
$=\{\arg(z)\equiv 0\ [\pi]\}\cup\{0\}$
$-b$
$\mathrm{A}'(\overline{z_{\mathrm{A}}})$
$(\mathrm{AB}):(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AM}})\equiv 0\ [\pi] \iff \overrightarrow{\mathrm{AM}}=k\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$:
$\left\{\mathrm{M}(z)\ /\ \arg\left(\dfrac{z-z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}}\right)\equiv 0\ [\pi] \iff \dfrac{z-z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}}\in\mathbb{R}\right\}$
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}+1=0$



Médiatrice de [AB] :
$\{\mathrm{M}(z) \;/\; |z - z_{\mathrm{A}}| = |z - z_{\mathrm{B}}|\}$
ABC rectangle en C
$\iff \arg\left(\dfrac{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{C}}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} \;[\pi]$
$\iff \dfrac{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{C}}} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}.$
Axe des imaginaires purs :
$\mathrm{i}\,\mathbb{R} = \{z = -\overline{z}\}$
$= \left\{\arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2} \;[\pi]\right\} \cup \{0\}$
$(\mathrm{AB}) \perp (\mathrm{EF}) \iff \dfrac{z_{\mathrm{F}} - z_{\mathrm{E}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$
$\iff \arg\left(\dfrac{z_{\mathrm{F}} - z_{\mathrm{E}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}}\right) \equiv \pm\dfrac{\pi}{2} \;[2\pi].$
$(\mathrm{AB}) : \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} ; \overrightarrow{\mathrm{AM}}\right) \equiv 0 \;[\pi] \iff \overrightarrow{\mathrm{AM}} = k\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$:
$\left\{\mathrm{M}(z) \;/\; \arg\left(\dfrac{z - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}}\right) \equiv 0 \;[\pi] \iff \dfrac{z - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}} \in \mathbb{R}\right\}$
$\mathrm{E}(z_{\mathrm{E}})$
$\mathrm{F}(z_{\mathrm{F}})$
D
C
$\mathrm{B}(z_{\mathrm{B}})$
R
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}(z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}})$
$\mathrm{AB} = |z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}|$
$\arg(z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}) = \left(\vec{u} ; \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$
$\mathrm{A}(z_{\mathrm{A}} = a + \mathrm{i}\,b = r_{\mathrm{A}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_{\mathrm{A}}})$
Cercle de centre B et de rayon R :
$\mathscr{C}(\mathrm{B} ; \mathrm{R}) = \{\mathrm{M}(z) \;/\; |z - z_{\mathrm{B}}| = \mathrm{R}\}$
b
$r_{\mathrm{A}} \sin\theta_{\mathrm{A}} =$
i
$\vec{v}$
$r_{\mathrm{A}} = |z_{\mathrm{A}}|$
$= \sqrt{a^2 + b^2}$
$\theta_{\mathrm{A}} = \arg(z_{\mathrm{A}}) = \left(\vec{u} ; \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$
θ
O
$\vec{u}$
1
1
$r_{\mathrm{A}} \cos\theta_{\mathrm{A}} = a$
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\,\sin(\theta)$
$\cos\theta = \dfrac{a}{|z|}$
$\sin\theta = \dfrac{b}{|z|}$
Axe des réels :
$\mathbb{R} = \{z = \overline{z}\}$
$= \{\arg(z) \equiv 0 \;[\pi]\} \cup \{0\}$
$-b$
$\mathrm{A}'(\overline{z_{\mathrm{A}}})$
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} + 1 = 0$

Le Plan Complexe



Le Plan Complexe