Calculs d'intégrales

Exercice 1 (Pour la technique) :

1 On considère la fonction $f\colon x \longmapsto \dfrac{1}{x^3+1}$ définie pour $x \neq -1$.

(a) Déterminer trois réels a, b et c tels que $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\;\; f(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$.

(b) Calculer alors la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$.

(c) À l'aide du changement de variables $x = \tan(u)$, déterminer la valeur de

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(u)}{\cos^3(u)+\sin^3(u)}\,\mathrm{d}u.$$

2 Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{ch}\,(x)}$. On pourra effectuer un changement de variables judicieux.

3 Calculer les primitives ou intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int \sin^{2018}(x)\,\cos(x)\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \sin^2(x)\,\cos^7(x)\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^4(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 (Et les classiques) :

Pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on définit l'intégrale $\mathrm{I}_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x$.

1 Justifier l'existence de $\mathrm{I}_{p,q}$.

2 Calculer $\mathrm{I}_{p,0}$ en fonction de p et $\mathrm{I}_{0,q}$ en fonction de q.

3 À l'aide d'un changement de variable, montrer que $\mathrm{I}_{p,q} = \mathrm{I}_{q,p}$. *La justification du changement de variable n'est pas attendue.*

4 Grâce à une intégration par parties, établir la relation $\mathrm{I}_{p+1,q} = \dfrac{p+1}{q+1}\mathrm{I}_{p,q+1}$.

5 En procédant par récurrence sur p, démontrer que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \forall\, q \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{I}_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

6 On définit à présent $\mathrm{J}_{p,q} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}(t)\cos^{2q+1}(t)\,\mathrm{d}t$. Calculer $\mathrm{J}_{p,q}$ en fonction de p et q au moyen de factorielles.

Les élèves motivés pourront montrer que $\mathrm{I}_{p,q} = \dfrac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}$.