Calculs d'intégrales

Exercice 1 :

1 (a) Comme $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$, si une telle décomposition existe alors

$$\forall x \neq -1,\ \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}. \tag{DES.1}$$

Pôle de 1ère espèce : Après avoir multiplié les deux membre de (DES.1) par $x+1$, on évalue en $x=-1$ pour obtenir

$$\frac{1}{3} = a.$$

Pôle de 2ème espèce : Multiplions les deux membres de (DES.1) par x et regardons les limites en $+\infty$. On a alors :

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{3(x+1)} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}\right) = \frac{1}{3} + b.$$

En identifiant, on trouve $b = -\frac{1}{3}$.

Il ne reste qu'à identifier les deux membres pour une valeur quelconque comme $x=0$ par exemple pour trouver :

$$f(0) = 1 = \frac{1}{3} + \frac{c}{1} \iff c = \frac{2}{3}.$$

Commentaires : *Une méthode plus élégante nécessite de passer par les complexes et de poser $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de x^2-x+1.*

On multiplie encore les deux membres de (DES.1) par x^2-x+1 avant d'évaluer en $x=\alpha$ (ce qui est autorisé car α n'est plus un pôle de $(x^2-x+1)f(x)$ et obtenir :

$$\frac{1}{\alpha+1} = b\alpha + c \iff 1 = (\alpha+1)(b\alpha+c) \iff 1 = \alpha^2 b + (b+c)\alpha + c$$

Or, α racine de x^2-x+1 vérifie $\alpha^2 = \alpha - 1$. On remplace :

$$\iff 1 = (2b+c)\alpha - b + c \iff \begin{cases} 2b+c = & 0 \\ -b+c = & 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b & = -\frac{1}{3} \\ c & = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

On retrouve évidemment les mêmes valeurs.

Finalement, $\boxed{\forall x \neq -1,\ \frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\right).}$

(b) Il suffit d'appliquer le résultat précédent :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \int_0^1 \frac{x-2}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x\right) \quad \text{par linéarité de l'intégrale,}\\
&= \frac{1}{3}\left(\Big[\ln\underbrace{(x+1)}_{\geqslant 0 \text{ sur } [0;1]}\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(\ln(2) - \frac{1}{2}\Big[\ln\underbrace{(x^2-x+1)}_{\geqslant 0 \text{ sur } \mathbb{R}}\Big]_0^1 + \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(\ln(2) - \frac{1}{2}\times 0 + \frac{3}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right]_0^1\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(\ln(2) + \sqrt{3}\left[\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(\ln(2) + \sqrt{3}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(\ln(2) + \sqrt{3}\times\frac{\pi}{3}\right)\\
&= \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{\sqrt{3}}{9}\pi.
\end{aligned}$$

(c) En remarquant, sur un intervalle adéquat, que

$$\frac{\cos(u)}{\cos^3(u)+\sin^3(u)} = \frac{\cos(u)}{\cos^3(u)\left(1+\frac{\sin^3(u)}{\cos^3(u)}\right)} = \frac{1}{1+\tan^3(u)}\times\underbrace{\frac{1}{\cos^2(u)}}_{\tan'(u)},$$

il est légitime de vouloir poser $t=\tan(u)$ ce qui est équivalent à $u=\arctan(t)$.

Or, $\psi : u \longmapsto \arctan(u)$ est strictement croissante et de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0\,;1]$ sur $\psi([0\,;1]) = \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$.

D'où, avec $t=\tan(u)$ et $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}u}{\cos^2(u)}$, on obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(u)}{\cos^3(u)+\sin^3(u)}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^3(u)}\times\frac{\mathrm{d}u}{\cos^2(u)} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\ln(2)+\frac{\sqrt{3}}{9}\pi.$$

Commentaires : *En PTSI, on ne demande pas plus de rigueur mais, on peut coller au théorème du cours en partant de la dernière intégrale pour plus de lisibilité et en posant :*

$$f : \begin{array}{ccc} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^3+1} \end{array} \quad \text{et} \quad \varphi : \begin{array}{ccc} \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right] & \longrightarrow & [0\,;1] \\ t & \longmapsto & \tan(t) \end{array}.$$

*i. La fonction f est **continue** sur $\mathrm{I}=[0\,;1]$ comme inverse d'un polynôme ne s'y annulant pas.*

*ii. La fonction φ est **à valeurs dans** $\mathrm{I}=[0\,;1]$; en effet, si $t\in\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ alors par croissance de la fonction $\tan$ sur cet intervalle, on obtient $\tan(t)\in\left[\tan(0)\,;\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=[0\,;1]$.*

*iii. La fonction φ est **de classe $\mathscr{C}^1$ sur** $\mathrm{J}=\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ car c'est la fonction tangente. De plus, on a $\forall\, t\in\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right],\ \varphi'(t)=\dfrac{1}{\cos^2(t)}$.*

On peut donc appliquer le théorème de changement de variable pour les fonctions continues sur un segment (ici, les anciennes bornes sont $0 = \varphi(0)$ *et* $1 = \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$ *où* 0 *et* $\frac{\pi}{4}$ *sont donc les nouvelles bornes et appartiennent bien à* $\mathrm{J} = \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$*) :*

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{4})} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Calculons $f(\varphi(t)) = \dfrac{1}{\varphi(t)^3+1} = \dfrac{1}{\tan^3(t)+1} = \dfrac{\cos^3(t)}{\sin^3(t)+\cos^3(t)}$.

Finalement,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3(t)}{\sin^3(t)+\cos^3(t)}\,\frac{1}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(t)}{\cos^3(t)+\sin^3(t)}\,\mathrm{d}t.$$

2 Comme $1+\mathrm{ch}\,(x) \geqslant 2 > 0$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{ch}\,(x)}$ est clairement continues sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0\,;\ln(2)]$.

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{ch}\,(x)} = \int_0^{\ln(2)} \frac{\mathrm{d}x}{2\mathrm{ch}^{\,2}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

En posant $t = \mathrm{th}\,\left(\frac{x}{2}\right)$, on a $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{2\mathrm{ch}^{\,2}\left(\frac{x}{2}\right)}$ puis,

$$= \int_0^{\mathrm{th}\left(\frac{\ln(2)}{2}\right)} \mathrm{d}t = \mathrm{th}\,\left(\frac{\ln(2)}{2}\right) - \mathrm{th}\,(0)$$

Or, $\mathrm{th}\,\left(\dfrac{\ln(2)}{2}\right) = \mathrm{th}\,\left(\ln\left(\sqrt{2}\right)\right) = \dfrac{\mathrm{e}^{\ln\left(\sqrt{2}\right)} - \mathrm{e}^{-\ln\left(\sqrt{2}\right)}}{\mathrm{e}^{\ln\left(\sqrt{2}\right)} + \mathrm{e}^{-\ln\left(\sqrt{2}\right)}} = \dfrac{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{2-1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$.

D'où, $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{ch}\,(x)} = \frac{1}{3}$.

Commentaires : *En revenant à la définition de* $\mathrm{ch}\,(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$*, on pouvait aussi poser* $x = \ln(t) \iff \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$ *après avoir développé :*

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{ch}\,(x)} = \int_0^{\ln(2)} \frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}} = \int_0^{\ln(2)} \frac{2\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+2\,\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_1^2 \frac{2t}{t^2+2t+1}\,\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^2 \frac{2}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = 2\Big[-\frac{1}{t+1}\Big]_1^2 = \frac{1}{3}.$$

3 Dans les questions qui suivent, les trois fonctions à primitiver sont clairement continues sur $\mathbb{R}$. Les primitives sont évidemment données à une constante réelle près.

Ceci dit, on applique les méthodes :

(a) $\displaystyle\int \cos(x)\sin^{2018}(x)\,\mathrm{d}x = \int (\sin)'\,(x)\sin^{2018}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2019}\sin^{2019}(x).$

(b) Ici, on a une puissance impaire sur le cosinus, on écrit

$$\cos^7(x) = \cos^6(x)\cos(x) = \left(1-\sin^2(x)\right)^3\cos(x)$$

et on pose $u = \sin(x)$ soit $\mathrm{d}u = \cos(x)\,\mathrm{d}x$.

On a donc :

$$\begin{aligned}\int \sin^2(x)\,\cos^7(x)\,\mathrm{d}x &= \int \sin^2(x)\left(1-3\sin^2(x)+3\sin^4(x)-\sin^6(x)\right)\cos(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int u^2\left(1-3u^2(x)+3u^4(x)-u^6(x)\right)\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{3}u^3-\frac{3}{5}u^5+\frac{3}{7}u^7-\frac{1}{9}u^9\\ &= \frac{1}{3}\sin^3(x)-\frac{3}{5}\sin^5(x)+\frac{3}{7}\sin^7(x)-\frac{1}{9}\sin^9(x).\end{aligned}$$

(c) Pas grand chose à faire à part linéariser à l'aide des formules d'Euler, par exemple :

$$\begin{aligned}\cos^4(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)^4 &= \frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{4ix}+4\,\mathrm{e}^{3ix}\,\mathrm{e}^{-ix}+6\,\mathrm{e}^{2ix}\,\mathrm{e}^{-2ix}+4\,\mathrm{e}^{ix}\,\mathrm{e}^{-3ix}+\mathrm{e}^{-4ix}\right)\\ &= \frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{4ix}+\mathrm{e}^{-4ix}+4(\mathrm{e}^{2ix}+\mathrm{e}^{-2ix})+6\right)\\ &= \frac{1}{16}\left(2\cos(4x)+8\cos(2x)+6\right) \qquad \text{(on reconnaît les formules d'Euler)}\\ &= \frac{1}{8}\left(\cos(4x)+4\cos(2x)+3\right).\end{aligned}$$

On peut maintenant calculer l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos^4(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{8}\int_0^\pi \left(\cos(4x)+4\cos(2x)+3\right)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin(4x)+2\sin(2x)+3x\right]_0^\pi\\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\sin(4\pi)+2\sin(2\pi)+3\pi-0\right)\\ &= \frac{3\pi}{8}.\end{aligned}$$

Exercice 2 : Pour $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, on définit l'intégrale $\mathrm{I}_{p,q}=\displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x$.

1. La fonction polynôme $x\longmapsto x^p(1-x)^q$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur le segment $[0\,;1]$. L'intégrale $\mathrm{I}_{p,q}$ est correctement définie.

2. Pas grand chose à dire à part calculer :

$$\mathrm{I}_{p,0}=\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1=\frac{1}{p+1}.$$

De même,

$$\mathrm{I}_{0,q}=\int_0^1 (1-x)^q\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1}\right]_0^1=\frac{1}{q+1}.$$

3. Dans $\mathrm{I}_{p,q}$, on pose $t=1-x$ *i.e.* $x=1-t$, donc $\mathrm{d}x=-\,\mathrm{d}t$ puis

$$\mathrm{I}_{p,q}=\int_1^0 (1-t)^p t^q\cdot(-\,\mathrm{d}t)=-\int_1^0 t^q(1-t)^p\,\mathrm{d}t=\int_0^1 t^q(1-t)^p\,\mathrm{d}t=\mathrm{I}_{q,p}.$$

4. Sur $[0\,;1]$, les fonctions $x\longmapsto x^{p+1}$ et $x\longmapsto -\dfrac{(1-x)^{q+1}}{q+1}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$. On peut donc effectuer une intégration par parties et obtenir :

comme primitive. En tant que fonctions polynômes, u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $u' : x \longmapsto (p+1)x^p$, $v' : x \longmapsto (1-x)^q$. On peut intégrer par parties :

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_{p+1,q} &= \int_0^1 x^{p+1}(1-x)^q \,\mathrm{d}x = \underbrace{\left[-x^{p+1}\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1}\right]_0^1}_{=0} + \int_0^1 (p+1)x^p\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{p+1}{q+1}\int_0^1 x^p(1-x)^{q+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{p+1}{q+1}\,\mathrm{I}_{p,q+1}. \end{aligned}$$

Commentaires : *Retenez bien ce procédé que vous retrouverez souvent dans vos épreuves de concours qui consiste à déterminer une relation de récurrence à partir d'une intégration par parties. Les questions qui suivent permettent alors de déterminer la dite intégrale.*

5 Définissons la propriété (H_p) : « $\forall\, q \in \mathbb{N},\ \ \mathrm{I}_{p,q} = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$ » pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Initialisation $(p = 0)$. Soit $q \in \mathbb{N}$. On a vu que $\mathrm{I}_{0,q} = \dfrac{1}{q+1}$. D'autre part, $\dfrac{0!q!}{(q+1)!} = \dfrac{1}{q+1}$ donc (H_0) est vraie.

Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que (H_p) est vraie. Montrons (H_{p+1}), c'est-à-dire :

$$\forall\, q \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{I}_{p+1,q} = \frac{(p+1)!q!}{(p+1+q+1)!}.$$

Soit donc $q \in \mathbb{N}$.

D'après la question précédente, $\mathrm{I}_{p+1,q} = \dfrac{p+1}{q+1}\,\mathrm{I}_{p,q+1}$.

Or, d'après l'hypothèse de récurrence (qui est valable pour n'importe quel q, donc appliquons-la avec $q+1$ à la place de q), on obtient :

$$\mathrm{I}_{p+1,q} = \frac{p+1}{q+1}\,\frac{p!(q+1)!}{(p+q+2)!} = \frac{(p+1)!q!}{(p+1+q+1)!}\,,$$

ce qui est exactement la formule souhaitée au rang $p+1$. Comme q est arbitraire, la propriété (H_{p+1}) est prouvée sous la condition (H_{p+1}) vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion. Initialisée pour $p = 0$ et héréditaire, la propriété (H_p) est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\forall\, p \in \mathbb{N},\ \forall\, q \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{I}_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

Commentaires : *On obtient ainsi une formule explicite de $\mathrm{I}_{p,q}$ pour toutes valeurs de p et q.*

6 L'expression

$$\sin^{2p+1}(t)\cos^{2q+1}(t) = \left(\sin^2(t)\right)^p \sin(x)\left(\cos^2(t)\right)^q \cos(x) = \left(\sin^2(t)\right)^p\left(1-\sin^2(t)\right)^q \sin(x)\cos(x)$$

ressemble bigrement à $x^p(1-x)^q$ si seulement x pouvait être égal à $\sin^2(t)$!

On a donc l'idée lumineuse de poser $x = \sin^2(t)$ soit $\mathrm{d}x = 2\sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$ et d'obtenir :

$$\begin{aligned} \mathrm{J}_{p,q} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}(t)\cos^{2q+1}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2(t)\right)^p\left(1-\sin^2(t)\right)^q \underbrace{2\sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}x} \\ &= \int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{I}_{p,q}. \end{aligned}$$

Avec le résultat précédent, on a alors $\mathrm{J}_{p,q} = \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_{p,q} = \dfrac{p!q!}{2(p+q+1)!}$.

Commentaires : *Cet exercice vous aura fait effleurer la célèbre fonction bêta que vous rencontrerez surement encore.*

Celle-ci est une des deux intégrales d'Euler, définie pour tous nombres complexes x et y de parties réelles strictement positives par :

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$$

et éventuellement prolongée analytiquement à tout le plan complexe à l'exception des entiers négatifs. Nous nous serons contenté de $x = p+1$ et $y = q+1$ entier naturels.

La fonction bêta a été étudiée par Euler et Legendre et doit son nom à Jacques Binet. Elle est en relation avec la fonction gamma que vous croiserez surement aussi par la formule

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$