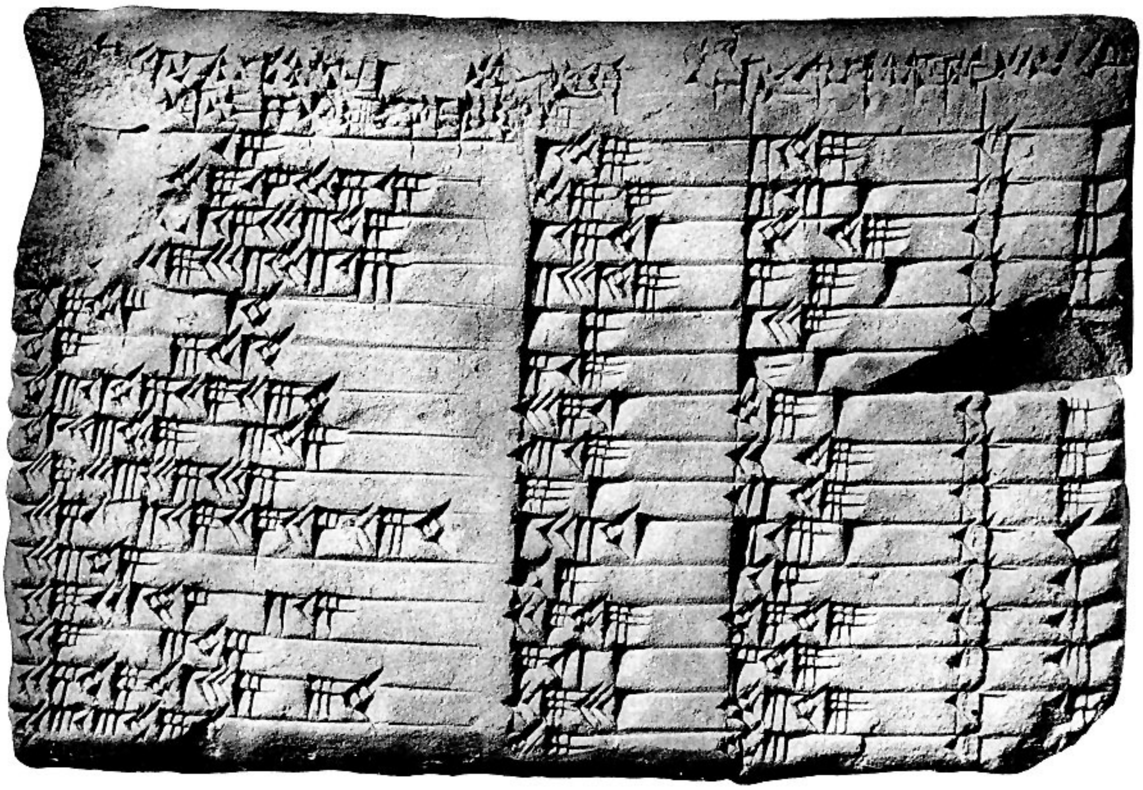
PTSI
2024

Lycée Jules Garnier

Devoir de vacances

— pratique et entraînement —



Plimpton 322, tablette d'argile babylonienne (1 800 av. JC)

Cette tablette, vieille de près de 4 000 ans, donne une liste de triplets pythagoriciens, c'est-à-dire de triplets (a, b, c) de nombres entiers vérifiant $a^2 + b^2 = c^2$.

Sommaire

Présentation et mode d'emploi

Qu'est-ce que ce cahier ?

Ce cahier est un cahier de calcul, basé sur les notions déjà abordées pour vous aider à vous améliorer en calcul.

À quoi sert-il ?

En mathématiques, la technique et le calcul sont fondamentaux.

Sans technique, il est impossible de correctement appréhender une question mathématique. De même que l'on doit faire des gammes et beaucoup pratiquer lorsque l'on apprend un instrument, on doit calculer régulièrement lorsque l'on pratique les mathématiques.

Comment est-il organisé ?

Ce cahier comporte plusieurs parties :

- Un sommaire vous permettant de voir d'un seul coup d'œil les différentes fiches et de noter celles que vous avez déjà faites ou pas.
- Une partie de **calculs élémentaires**, faisables dès le début de la première année, centrée sur les calculs « de base » : développement, factorisation, racines carrées, fractions, *etc.* Cela peut vous paraître simple, mais sachez que ce type d'erreur de calcul est toujours fréquent, même en spé, même sur les copies de concours. Travailler les techniques élémentaires de calcul vous facilitera grandement la vie !
- Une partie liée au programme de première année : sont indiqués précisément les chapitres nécessaires pour pouvoir aborder chaque fiche de calcul.

Chaque fiche de calcul est organisée ainsi :

- Une présentation du thème de la fiche et des prérequis (notamment, pour des techniques propres à certaines filières, on précise de quelle filière il s'agit)
- Une liste de calculs, dont le temps de résolution (incluant la longueur et la technicité du calcul) est symbolisé par une (), deux (), trois () ou quatre () horloges.
- À la fin de la feuille sont affichées les réponses mélangées : c'est une première indication pour savoir si la réponse que vous avez trouvée est plausible. Je vous donnerai les réponses et les corrigés au milieu de la dernière semaine des vacances pour que vous ne soyez pas trop tentés.
- Vous êtes invité à écrire directement les réponses dans les cadres prévus à cet effet.

Comment l'utiliser ?

Un travail personnalisé.

Ce cahier de calcul est prévu pour être **utilisé en autonomie**.

Choisissez les calculs que vous faites en fonction des difficultés que vous rencontrez et des chapitres que vous étudiez, ou bien en fonction des conseils de votre professeur de mathématiques.

Enfin, ne cherchez pas à faire linéairement ce cahier : les fiches ne sont pas à faire dans l'ordre, mais en fonction des points que vous souhaitez travailler.

Un travail régulier.

Essayez de pratiquer les calculs à un rythme régulier : **une quinzaine de minutes par jour** par exemple. Privilégiez un travail régulier sur le long terme plutôt qu'un objectif du type « faire 10 fiches par jour pendant les vacances » .

Point important : pour réussir à calculer, il faut répéter. C'est pour cela que j'ai mis plusieurs exemples illustrant chaque technique de calcul.

Il peut être utile de parfois refaire certains calculs : n'hésitez pas à cacher les réponses déjà écrites dans les cadres, ou à écrire vos réponses dans les cadres au crayon à papier.

Un travail efficace.

Attention à l'utilisation des réponses et des corrigés : il est important de chercher suffisamment par vous-même avant de regarder les réponses et/ou les corrigés. Il faut vraiment **faire les calculs** afin que le corrigé vous soit profitable.

N'hésitez pas à ne faire qu'en partie une feuille de calculs : il peut être utile de revenir plusieurs fois à une même feuille, afin de voir à quel point telle technique a bien été assimilée.

La progression

Avoir une solide technique de calcul s'acquiert sur le long terme alors n'essayez pas de tout faire tout de suite mais répartissez votre travail sur la longueur des vacances.

Dans tous les cas, prenez soin de vous.

On se revoit très vite.

M. PUCCI

Tel : 90 94 50

Fiche de calcul n° 1 **001A**

Fractions

Prérequis
Règles de calcul sur les fractions.

Calculs dans l'ensemble des rationnels

Calcul 1.1 — Les fractions et le calcul littéral.

Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

a) $\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ ....

b) $\dfrac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \dfrac{(a+b)^2}{a-b}$ pour $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, distincts deux à deux. ....

c) $\dfrac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$ pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. ....

Calcul 1.2 — Le quotient de deux sommes de Gauss.

Simplifier $\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n^2} k}{\sum\limits_{k=0}^{n} k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la formule $1 + 2 + \cdots + p = \dfrac{p(p+1)}{2}$. .....

Calcul 1.3 — Décomposition en somme d'une partie entière et d'une partie décimale.

Soit $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Écrire les fractions suivantes sous la forme $a + \dfrac{b}{X}$ avec a et b entiers et $X \in \mathbb{R}$.

a) $\dfrac{29}{6}$ ......

b) $\dfrac{k}{k-1}$ ...

c) $\dfrac{3x-1}{x-2}$ ..

Calcul 1.4 — Un produit de fractions.

Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On donne $A = \dfrac{1}{1+t^2} - \dfrac{1}{(1+t)^2}$ et $B = \left(1+t^2\right)(1+t)^2$.

Simplifier AB autant que possible. ....

Calcul 1.5

Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel x.

a) $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-1}$ ....

b) $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{8}{x^2-4}$ ....

c) $\dfrac{x^2}{x^2-x} + \dfrac{x^3}{x^3+x^2} - \dfrac{2x^2}{x^3-x}$ ....

d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{x^2-4} + \dfrac{2}{x^2-2x}$ ....

Réponses mélangées

$\dfrac{2}{x-2}$ $\quad 2t \quad$ $4 + \dfrac{5}{6}$ $\quad \dfrac{3}{2}n \quad$ $\dfrac{1}{x-2}$ $\quad -\dfrac{ab}{a-b} \quad$ $\dfrac{n^3+n}{n+1}$

$1 + \dfrac{1}{k-1}$ $\quad \dfrac{2x}{x+1} \quad$ $\dfrac{-1}{n(n+1)^2}$ $\quad \dfrac{x}{x+1} \quad$ $3 + \dfrac{5}{x-2}$

Fiche de calcul n° 2

Calcul littéral

Prérequis
Les identités remarquables.

Développer, réduire et ordonner

Dans cette section, on tâchera de mener les calculs avec le minimum d'étapes. Idéalement, on écrira directement le résultat. La variable x représente un nombre réel (ou complexe).

Calcul 2.1

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de x.

a) $(x-1)^2(x+1)\left(x^2+x+1\right)$ ....

b) $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$ ......

c) $\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(1-\sqrt{2}x+x^2\right)$

d) $\left(x^2+x+1\right)^2$ ....

Factoriser

Calcul 2.2 — Avec plusieurs variables.

Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) $(x+y)^2-z^2$ ....

b) $x^2+6xy+9y^2-169x^2$ ....

c) $xy+x+y+1$ ....

d) $xy-x-y+1$ ....

e) $x^3+x^2y+2x^2+2xy+x+y$ ..

f) $y^2\left(a^2+b^2\right)+16x^4\left(-a^2-b^2\right)$ ..

Calcul 2.3 — On passe au niveau supérieur.

Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) x^4-1 ....

b) $\left(-9x^2+24\right)\left(8x^2+8\right)+64x^4-64$ ....

c) x^4+x^2+1 ....

d) $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ ....

Réponses mélangées

x^4+x^2+1 $\quad 3(14x+3y)(-4x+y)$ $\quad (x+y-z)(x+y+z)$ $\quad \left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$

$(x+y)(x+1)^2$ $\quad 1+2x+3x^2+2x^3+x^4$ $\quad -8\left(x^2+1\right)(x-4)(x+4)$

$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)$ $\quad x^5-x^3-x^2+1$ $\quad 1+x^4$ $\quad (x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$

$\left(a^2+b^2\right)\left(y-4x^2\right)\left(y+4x^2\right)$ $\quad (x+1)(y+1)$ $\quad (x-1)(y-1)$

Sommes et produits

Prérequis
Factorielle. Identités remarquables. Décomposition en éléments simples.
Fonctions usuelles (racine carrée, logarithme népérien).

Calculs de sommes simples

Calcul 3.1

Calculer les sommes et les produits suivants, où p et q sont des entiers naturels non nuls tels que $p \geqslant q$.

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} 3^k$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{n-k}$ ....

c) $\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2}$ ....

d) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3^k$ ....

e) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 5\sqrt{k} \times k$ ....

f) $\displaystyle\prod_{k=-10}^{10} k$ ....

Avec des changements d'indice

Calcul 3.2

Calculer les sommes suivantes en effectuant le changement d'indice demandé.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} n+1-k$ avec $j = n+1-k$. ....

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}$ avec $j = n+1-k$. ....

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$ avec $j = k-1$. ....

d) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+2} (k-2)^3$ avec $j = k-2$. ....

Sommes et produits télescopiques

Calcul 3.3 — Sommes télescopiques.

Calculer les sommes et produits suivants.

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} (k+1)^3 - k^3$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$ ....

e) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$ ....

g) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$ ....

f) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{2k-3}$ ....

h) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ ....

À l'aide d'une décomposition en éléments simples

Calcul 3.4

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+2)(k+3)}$ ...

Sommation par paquets

Calcul 3.5

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k^2$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\min(k,n)$ ....

Sommes doubles

Calcul 3.6

Calculer les sommes doubles suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(i+j)$.

c) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\ln(i^j)$ ..

b) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i+j)^2$

d) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\max(i,j)$

Réponses mélangées

$(n+3)^3-2^3$ $\quad \dfrac{5^{n+1}-2^{n+1}}{3}$ $\quad 1-\dfrac{1}{n+1}$ $\quad \dfrac{n(3n+1)}{2}$ $\quad \dfrac{n(n^2-1)}{2}$ $\quad \dfrac{n+1}{2n}$

$3^{\frac{n(n+1)}{2}}$ $\quad \dfrac{n(n+1)(7n^2+13n+4)}{12}$ $\quad n+1$ $\quad 1-4n^2$ $\quad 2n^2+n$ $\quad \dfrac{n(n+1)}{2}\ln(n!)$

$\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ $\quad \ln(n+1)$ $\quad \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+3}$ $\quad n2^{n+1}+2(1-2^n)$ $\quad 0$ $\quad \dfrac{n(n+1)(4n-1)}{6}$

$1-\dfrac{1}{(n+1)!}$ $\quad (n+1)!-1$ $\quad \dfrac{9}{2}(3^{n-2}-1)$ $\quad \dfrac{n(n+1)}{2}$ $\quad 5^n(n!)^{\frac{3}{2}}$ $\quad \dfrac{n+1}{2n}$ $\quad 0$ $\quad \dfrac{1}{n}$

018A

Coefficients binomiaux

Prérequis

Factorielle. Coefficients binomiaux. Formule du binôme de Newton.

La lettre n désigne un entier naturel non nul.

Manipulations de factorielles et de coefficients binomiaux

Calcul 4.1 — Pour s'échauffer – *bis.*

Simplifier les expressions suivantes à l'aide de factorielles, de coefficients binomiaux et, le cas échéant, à l'aide de puissances. La lettre k désigne un entier naturel tel que $k < n$.

a) $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$ ....

b) $3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)$ ...

c) $\dbinom{n}{3}$ (pour $n \geqslant 3$) ....

d) $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$ ....

e) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{n}{(n+1)!}$ ....

f) $\dfrac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \dfrac{n!}{2^{2n}}$ ....

Autour du binôme de Newton

Calcul 4.2

Calculer les sommes ci-dessous à l'aide de la formule du binôme de Newton.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{2n-k} \binom{n}{k}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{k+2} \binom{n}{k} \times 3^{2n-k+1}$

Calcul 4.3

En utilisant la fonction $x \longmapsto (1+x)^n$, ses dérivées d'ordre 1 et 2 et sa primitive s'annulant en 0, calculer

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}$ ......

Réponses mélangées

2^n $\quad \dfrac{1}{(n+1)!}$ $\quad \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ $\quad \dfrac{k+1}{n-k}$ $\quad 3^n$ $\quad \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$ $\quad n(n+1)2^{n-2}$

6^n $\quad 12 \times 15^n$ $\quad 0$ $\quad 2^n \times n!$ $\quad n2^{n-1}$ $\quad \dfrac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}$ $\quad \dfrac{(2n+1)!}{2^n \times n!}$

Fiche de calcul n° 5

Racines carrées

Prérequis

Racines carrées. Méthode de la quantité conjuguée.

Premiers calculs

Calcul 5.1 — Définition de la racine carrée.

Simplifier les expressions suivantes en simplifiant les symboles $\sqrt{\cdot}$ qui peuvent l'être (et en prenant à ne pas se tromper sur les signes).

a) $\sqrt{(3-\pi)^2}$ ....

b) $\sqrt{(3-a)^2}$ ....

Avec la méthode de la quantité conjuguée

Calculs variés

Calcul 5.2 — Avec une variable.

On considère la fonction f qui à $x > 1$ associe $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Pour tout $x > 1$, calculer et simplifier les expressions suivantes.

a) $\dfrac{f(x+2)-f(x)}{f(x+2)+f(x)}$ ....

b) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ ....

c) $f(x) + 4f''(x)$ ....

d) $\dfrac{f(x)}{f''(x)}$ ....

Calcul 5.3 — Mettre au carré.

Élever les quantités suivantes au carré pour en donner une expression simplifiée.

a) $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$ ....

b) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ....

Calcul 5.4 — Méli-mélo.

Donner une écriture simplifiée des réels suivants.

a) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$ ....

b) $\dfrac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ....

c) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ ....

d) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ....

e) $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$ ....

f) $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$ ....

Réponses mélangées

$x-\sqrt{x^2-1}$	$\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x-1}$	$\ln(1+\sqrt{2})$	$1+\sqrt{2}$	$\lvert 3-a\rvert$	$2\sqrt{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}$
$2\sqrt{2}$	$\dfrac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}$	$-11+5\sqrt{5}$	$\pi-3$	$\sqrt{2}$	$-4(x-1)^2$	$1+\sqrt{2}$

Manipulation des fonctions usuelles

Prérequis
Dérivation, équations du second degré.

Calculs de valeurs

Calcul 6.1 — Fonctions circulaires réciproques.

Calculer les valeurs suivantes.

a) $\dfrac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$ ....

b) $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ....

Calcul 6.2 — Valeurs des fonctions hyperboliques.

Calculer les valeurs suivantes. On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\operatorname{th}(x) = \operatorname{sh}(x)/\operatorname{ch}(x)$.

a) $\operatorname{ch}(0)$ ....

b) $\operatorname{sh}(\ln(3))$ ....

c) $\operatorname{ch}(\ln(2/3))$ ....

d) $\operatorname{th}(\ln(2))$ ....

Résolution d'équations

Calcul 6.3 — Fonctions $x \longmapsto a^x$.

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

On pourra faire intervenir une équation de degré 2 en posant une nouvelle variable.

a) $2^x + 4^x = 4$ ....

b) $16^x - 3 \times 4^x + 2 = 0$ ....

c) $3^x + 3^{2x} - 1 = 0.$ ....

Calcul 6.4 — Équations avec les fonctions circulaires réciproques.

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in [-1, 1]$ pour les deux premiers calculs, et $x \in \mathbb{R}$ pour les autres.

a) $\arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$ ....

b) $\cos(\arccos(x)) = 0$ ......

c) $\arcsin(\sin(x)) = \dfrac{\pi}{3}$ ......

d) $\tan(\arctan(x)) = 1$ ......

Calcul 6.5 — Équations avec des fonctions hyperboliques.

Résoudre les (in)équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\operatorname{th}(x) = \operatorname{sh}(x)/\operatorname{ch}(x)$.

a) $\operatorname{ch}(x)=\sqrt{5}$ ....

c) $\operatorname{ch}(x)\leqslant 4$ ....

b) $\operatorname{th}(x)=\dfrac{1}{3}$ ....

d) $\operatorname{th}(x)\leqslant \dfrac{1}{2}$ ....

Dérivation

Calcul 6.6 — Quelques calculs de dérivées.

Dériver les fonctions suivantes. On rappelle que, pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $\operatorname{th}(x)=\operatorname{sh}(x)/\operatorname{ch}(x)$.

a) $x\longmapsto 2^x+x^2$ ....

e) $x\longmapsto \arctan(\operatorname{th}(x))$ ..

b) $x\longmapsto x^x$ ....

f) $x\longmapsto \operatorname{sh}(\operatorname{ch}(x))$ ......

c) $x\longmapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}$ ......

g) $x\longmapsto \arcsin(x)+\arccos(x)$

d) $x\longmapsto \arcsin(x^2)$ .....

h) $x\longmapsto \arctan(x)+\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Réponses mélangées

1 $\quad$ $x\mapsto 2x\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ $\quad$ $x\mapsto \dfrac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}\arccos(x)^2}.$ $\quad$ $x\mapsto \ln(2)\times 2^x+2x$ $\quad$ $\dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\ln(3)}$

$\{\ln(\sqrt{5}-2);\ln(\sqrt{5}+2)\}$ $\quad$ 2 $\quad$ $x\mapsto \dfrac{1-\operatorname{th}^2(x)}{1+\operatorname{th}^2(x)}$ $\quad$ $\dfrac{13}{12}$ $\quad$ $\left\{0;\dfrac{1}{2}\right\}$ $\quad$ $\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

$\dfrac{4}{3}$ $\quad$ $\dfrac{1}{2}\ln(2)$ $\quad$ $\dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}$ $\quad$ $\dfrac{\pi}{6}$ $\quad$ 1 $\quad$ $\left]-\infty,\dfrac{1}{2}\ln(3)\right]$ $\quad$ $\dfrac{3}{5}$ $\quad$ 0

$[-\ln(4+\sqrt{15}),\ln(4+\sqrt{15})]$ $\quad$ $x\mapsto(\ln(x)+1)x^x$ $\quad$ $x\mapsto 0$ $\quad$ 1 $\quad$ $x\mapsto \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(\operatorname{ch}(x))$ $\quad$ $x\mapsto 0$

Fiche de calcul n° 7 005A

Expressions algébriques

Prérequis
Identités remarquables.

Équations polynomiales

Calcul 7.1 — Cubique.

Soit a un nombre réel tel que $a^3 - a^2 + 1 = 0$.
Exprimer les quantités suivantes sous la forme $xa^2 + ya + z$ où x, y, z sont trois nombres rationnels.

a) $(a+2)^3$ ....

b) $a^5 - a^6$ ....

c) a^{12} ....

d) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2}$ ....

Expressions symétriques

Calcul 7.2 — Inverse.

Soit x un réel non nul. On pose $a = x - \dfrac{1}{x}$. Exprimer les quantités suivantes en fonction de a uniquement.

a) $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ ....

b) $x^3 - \dfrac{1}{x^3}$ ....

c) $x^4 + \dfrac{1}{x^4}$ ....

Calcul 7.3 — Trois variables.

Soient x, y, z trois nombres deux à deux distincts. On pose

$$a = x + y + z, \qquad b = xy + yz + zx \qquad \text{et} \qquad c = xyz.$$

Exprimer les quantités suivantes en fonction de a, b, c uniquement.

a) $x^2 + y^2 + z^2$ ....

b) $x^3 + y^3 + z^3$ ....

c) $(x+y)(y+z)(z+x)$ ....

d) $x^2yz + y^2zx + z^2xy$ ....

e) $\dfrac{x}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{y}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{z}{(z-x)(z-y)}$ ....

f) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$ ....

Réponses mélangées

$a^3 + 3a$ $\quad 0 \quad$ $a^4 + 4a^2 + 2$ $\quad a^2 + 2 \quad$ ac $\quad \dfrac{b}{c} \quad$ $-a^2 + 1$ $\quad a^2 - 2b$

$7a^2 + 12a + 7$ $\quad 4a^2 - a - 3 \quad$ $a^3 - 3ab + 3c$ $\quad a^2 - 1 \quad$ $ab - c$

Fiche de calcul n° 8

008A

Dérivation

Prérequis

Dérivées des fonctions usuelles. Formules de dérivation.

Opérations et fonctions composées

Calcul 8.1

Calculer $f'(x)$ et écrire le résultat sous forme factorisée.

a) $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. ....

b) $x \in]-3,3[$ et $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$. ....

c) $x \in]1,+\infty[$ et $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)$ ....

d) $x \in]0,\pi[$ et $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$. ....

e) $x \in \mathbb{R} \setminus 3,-2$ et $f(x) = \dfrac{1}{3-x} + \dfrac{1}{2+x}$. ....

f) $x \in]-1,+\infty[$ et $f(x) = x^2 - \ln(x+1)$ ....

g) $x \in]1,+\infty[$ et $f(x) = \ln(x^2+x-2) - \dfrac{x+2}{x-1}$. ....

h) $x \in]-1,+\infty[$ et $f(x) = \dfrac{x}{x+1} + x - 2\ln(x+1)$. ....

i) $x \in]0,e[\cup]e,+\infty[$ et $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{1-\ln(x)}$. ....

Réponses mélangées

$2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $\quad$ $\dfrac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2}$ $\quad$ $\dfrac{1}{1-x^2}$

$\dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$ $\quad$ $\dfrac{2}{x+1}\left(x+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

$\dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{x\sin(x)}$ $\quad$ $\dfrac{2}{x(1-\ln(x))^2}$ $\quad$ $\dfrac{9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$ $\quad$ $\dfrac{x^2}{(x+1)^2}$

Nombres complexes

Prérequis
Forme algébrique et forme exponentielle.

Pour s'échauffer

Calcul 9.1 — Écriture algébrique.

Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

a) $(2-3\mathrm{i})^4$ ....

b) $\dfrac{1}{3-\mathrm{i}}$ ....

c) $\dfrac{2-3\mathrm{i}}{5+2\mathrm{i}}$ ....

d) $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ ....

Calcul 9.2 — Forme exponentielle.

Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle.

a) $-2\mathrm{i}$ ....

b) $-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}}$ ....

c) $-5+5\mathrm{i}\sqrt{3}$ ....

d) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ ....

Réponses mélangées

$10\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ $\qquad$ $2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ $\qquad$ $\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}\mathrm{i}$ $\qquad$ $2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

$\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ $\qquad$ $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}$ $\qquad$ $\dfrac{4}{29}-\dfrac{19}{29}\mathrm{i}$ $\qquad$ $-119+120\mathrm{i}$

Fiche de calcul n° 10

016A

Trigonométrie et nombres complexes

Prérequis
Nombres complexes, trigonométrie.

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Linéarisations

Calcul 10.1

Linéariser :

a) $\cos^2(2x)\sin^2(x)$ ...

b) $\cos(3x)\sin^3(2x)$ ...

Arc-moitié, arc-moyen

Calcul 10.2

Écrire sous forme trigonométrique (c'est-à-dire sous la forme $re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$) :

a) $1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$ ....

b) $e^{-i\frac{\pi}{6}} - 1$ ....

c) $1 + ie^{i\frac{\pi}{3}}$ ....

d) $\dfrac{1 + e^{i\frac{\pi}{6}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{12}}}$ ....

e) $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{2}}$ ....

f) $e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{2}}$ ....

Factorisations

Calcul 10.3

Factoriser :

a) $\cos(x) + \cos(3x)$ .....

b) $\sin(5x) - \sin(3x)$ .....

c) $\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)$

Réponses mélangées

$2\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{11\pi}{12}}$ $\quad$ $2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}$ $\quad$ $2\cos(4x)\sin(x)$ $\quad$ $2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{5\pi}{12}}$ $\quad$ $2\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)e^{\frac{5i\pi}{12}}$

$-\dfrac{1}{8}\cos(6x) + \dfrac{1}{4}\cos(4x) - \dfrac{3}{8}\cos(2x) + \dfrac{1}{4}$ $\quad$ $2\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)e^{\frac{-7i\pi}{12}}$ $\quad$ $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)}e^{\frac{13i\pi}{24}}$

$2\cos(2x)\cos(x)$ $\quad$ $\dfrac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ $\quad$ $-\dfrac{\sin(9x)}{8} + \dfrac{3\sin(5x)}{8} - \dfrac{\sin(3x)}{8} - \dfrac{3\sin(x)}{8}$

Fiche de calcul n° 11

Primitives

Prérequis
Intégration de Terminale. Dérivée d'une fonction composée.
Trigonométrie directe et réciproque. Trigonométrie hyperbolique.

Pour chaque fonction à intégrer on pourra commencer par chercher les domaines où elle admet des primitives.

Calculs directs

Calcul 11.1

Déterminer directement une primitive des expressions suivantes.

a) $\dfrac{3}{(t+2)^3}$ ....

b) $\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ ....

c) $\dfrac{\ln^3 t}{t}$ ....

d) $\dfrac{1}{t^2\sqrt{t}}$ ....

e) $\tan^2 t$ ....

f) $\tan^3 t$ ....

g) $\dfrac{1}{\cos^2(t)\sqrt{\tan t}}$ ....

h) $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}\operatorname{Arcsin}(t)}$ ....

Calcul 11.2 — Trigonométrie – *bis.*

Déterminer une primitive des expressions suivantes en utilisant d'abord le formulaire de trigonométrie.

a) $\sin^3 t$ ....

b) $\dfrac{\sin(2t)}{1+\sin^2 t}$ ....

c) $\dfrac{1}{\sin t\cos t}$ ....

d) $\dfrac{1}{\sin^2(t)\cos^2(t)}$ ....

e) $\dfrac{1}{\sin(4t)}$ ....

Calcul 11.3 — Fractions rationnelles.

Déterminer une primitive des expressions suivantes après quelques manipulations algébriques simples.

a) $\dfrac{t^2+t+1}{t^2}$ ....

b) $\dfrac{t^2+1}{t^3}$ ....

c) $\dfrac{1-t^6}{1-t^2}$ ....

d) $\dfrac{t^3+1}{t+1}$ ....

e) $\dfrac{t-1}{t+1}$ ....

f) $\dfrac{t^3}{t+1}$ ....

g) $\dfrac{t-1}{t^2+1}$ ....

h) $\dfrac{t}{(t+1)^2}$ ....

Réponses mélangées

$-\dfrac{3}{2(t+2)^2}$ $\quad t+\ln|t|-\dfrac{1}{t}$ $\quad \ln|\operatorname{Arcsin}(t)|$ $\quad \ln|t|-\dfrac{1}{2t^2}$ $\quad -\mathrm{cotan}t+\tan t$

$-\sqrt{1-t^2}$ $\quad \ln|\tan t|$ $\quad 2\sqrt{\tan t}$ $\quad \dfrac{1}{4}\ln|\tan 2t|$ $\quad \tan t - t$ $\quad -\cos t+\dfrac{1}{3}\cos^3 t$

$\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2)-\operatorname{Arctan}(t)$ $\quad \dfrac{1}{4}\ln^4 t$ $\quad t-2\ln|t+1|$ $\quad \ln|t+1|+\dfrac{1}{t+1}$ $\quad \ln(1+\sin^2 t)$

$\dfrac{1}{2}\tan^2 t+\ln|\cos t|$ $\quad -\dfrac{2}{3t^{\frac{3}{2}}}$ $\quad t+\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{t^5}{5}$ $\quad t-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}$ $\quad t-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}-\ln|t+1|$

Calcul d'intégrales

Prérequis
Primitives usuelles, composées simples.

Intégrales et aires algébriques

On rappelle que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire algébrique entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses du repère lorsque les bornes sont « dans le bon ordre ».

Calcul 12.1

En se ramenant à des aires, calculer de tête les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^3 7\,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_7^{-3} -5\,\mathrm{d}x$ .....

c) $\displaystyle\int_0^7 3x\,\mathrm{d}x$ ......

d) $\displaystyle\int_2^8 1-2x\,\mathrm{d}x$ ..

e) $\displaystyle\int_{-2}^2 \sin x\,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{-2}^1 |x|\,\mathrm{d}x$ ......

Calcul d'intégrales

On rappelle que si F est une primitive de f alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$, que l'on note $\Big[F(x)\Big]_a^b$.

Calcul 12.2 — Fonctions usuelles.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin x\,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ ....

c) $\displaystyle\int_1^{100} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{-3}^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_{-1}^2 (2x+1)^3\,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_0^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x$ ....

g) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\mathrm{d}x$ ....

h) $\displaystyle\int_{-2}^3 |x+1|\,\mathrm{d}x$ ....

i) $\displaystyle\int_{-1}^2 \max(1,\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$ ....

j) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin(x)\,\mathrm{d}x$ ....

k) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\cos x\sin x|\,\mathrm{d}x$ ....

l) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \arcsin x\,\mathrm{d}x$ ....

m) $\displaystyle\int_0^2 10^x\,\mathrm{d}x$ ....

Réponses mélangées

0 $\quad \dfrac{147}{2}$ $\quad \dfrac{17}{2}$ $\quad \mathrm{e}^2$ $\quad -\dfrac{1}{3}$ $\quad 6$ $\quad \dfrac{99}{\ln 10}$ $\quad 0$ $\quad 78$ $\quad \dfrac{5}{2}$

$\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad 50$ $\quad -54$ $\quad \dfrac{1}{2}$ $\quad 0$ $\quad \mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-3}$ $\quad \dfrac{5}{8}$ $\quad 18$ $\quad 14$

Intégration par parties

Prérequis
Primitives, dérivées, intégration par parties.

On rappelle le théorème d'intégration par parties. Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, si $u \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ et si $v \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Intégrales

Calcul 13.1

Calculer :

a) $\displaystyle\int_0^1 (2t+3)\mathrm{sh}(2t)\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_1^{\ln 2} t2^t\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin t\,\mathrm{d}t$ ....

e) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t$ ....

f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\tan^2 t\,\mathrm{d}t$ ....

Intégrations par parties successives

Pour ces calculs de primitives et d'intégrales, on pourra réaliser plusieurs intégrations par parties successives.

Calcul 13.2 — Calcul de primitives.

Calculer des primitives des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto \ln^2 x$ ....

b) $x \longmapsto (x\ln x)^2$ ....

c) $x \longmapsto \mathrm{e}^{\arccos(x)}$ ....

Réponses mélangées

$\dfrac{5}{2}\mathrm{ch}(2) - \dfrac{1}{2}\mathrm{sh}(2) - \dfrac{3}{2}$ $\qquad$ $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x \end{cases}$ $\qquad$ $\dfrac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \dfrac{8}{9}\sqrt{2} + \dfrac{4}{9}$

$\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{\pi^2}{32}$ $\qquad$ $\dfrac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)} - 2\ln(2) - 2^{\ln(2)} + 2}{(\ln(2))^2}$ $\qquad$ $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3\left(\dfrac{1}{3}\ln^2 x - \dfrac{2}{9}\ln x + \dfrac{2}{27}\right) \end{cases}$

$\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1$ $\qquad$ $\begin{cases}]-1,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\arccos(x)}\left(x - \sqrt{1-x^2}\right) \end{cases}$ $\qquad$ $\ln(2) - 2 + \dfrac{\pi}{2}$

Fiche de calcul n° 14

Changements de variable

Prérequis
Primitives, dérivées. Changements de variables. Intégration par parties.

Changements de variable

Calcul 14.1

Effectuer le changement de variable indiqué et en déduire la valeur de l'intégrale.

a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sqrt{t}$ ....

b) $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{4t-t^2}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \dfrac{t}{2} - 1$ ....

c) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \dfrac{1}{t}$ ....

d) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln t}{t+t\ln^2 t}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \ln t$ ....

Calculs de primitives par changement de variable

Calcul 14.2

Déterminer une primitive de f en utilisant le changement de variable donné.

a) $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\longmapsto \dfrac{\cos x + \sin x}{\sin x \cos^2 x}$ avec $u = \tan x$ ....

b) $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}}$ avec $u = \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$ ....

c) $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \dfrac{1}{x + \sqrt[3]{x}}$ avec $u = \sqrt[3]{x}$ ....

d) $x > 1 \longmapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ avec $u = \sqrt{x^2-1}$ ....

Réponses mélangées

$\left\{\begin{array}{ccc} \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan x + \ln\tan(x) \end{array}\right.$ $\quad$ $\left\{\begin{array}{ccc}]1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan\sqrt{x^2-1} \end{array}\right.$ $\quad$ $\dfrac{\pi}{2}$ $\quad$ $2\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$

$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\arctan\left(\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}\right) \end{array}\right.$ $\quad$ $\dfrac{\pi}{12}$ $\quad$ $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{2}$ $\quad$ $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{3}{2}\ln\left(x^{\frac{2}{3}} + 1\right) \end{array}\right.$

Intégration des fractions rationnelles

Prérequis
Fonctions ln et arctan. Division euclidienne entre polynômes.
Petites décompositions en éléments simples.
Forme canonique d'un trinôme du second degré.
Changements de variable affines dans les intégrales.

Classiques

Calcul 15.1 — Exemple détaillé d'un calcul d'intégrale.

a) Quels sont les deux zéros de $t \longmapsto t^2 - 3t + 2$? ....

b) Trouver deux réels A et B tels que

pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, on ait $\dfrac{1}{(t-1)(t-2)} = \dfrac{A}{t-1} + \dfrac{B}{t-2}$ ....

c) Calculer $\displaystyle\int_3^4 \frac{2}{(t-1)(t-2)}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 15.2

Calculer les intégrales suivantes, en procédant comme ci-dessus.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{t^2-4}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{2}{t^2-t}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 15.3

Calculer les intégrales suivantes, en effectuant d'abord une division euclidienne entre le numérateur et le dénominateur des fractions en jeu.

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1+t+t^2}{1+t}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1+2t+3t^2}{4t+5}\,\mathrm{d}t$ ....

Synthèse

Calcul 15.4 — Mise sous forme canonique.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Mettre sous forme canonique les expressions suivantes (où $x \in \mathbb{R}$).

a) $x^2 + x + 1$ ....

b) $2x^2 - 3x + 1$ ....

c) $\sqrt{2}x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}$ ....

d) $ax^2 + a^2x + a^3$ ....

Calcul 15.5

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+2t+t^2}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-t+t^2}\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{6t^2-5t+1}\,\mathrm{d}t$ ....

e) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$ ....

Réponses mélangées

$2\ln\frac{4}{3}$ $\quad$ $2\ln\frac{4}{3}$ $\quad$ $\frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{1}{3}\left(\ln(2)+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$ $\quad$ 1 et 2 $\quad$ $-\frac{1}{48}+\frac{51}{64}\ln\frac{21}{19}$

$\sqrt{2}\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\sqrt{2}\frac{15}{16}$ $\quad$ $\frac{3}{2}+\ln(3)-\ln(2)$ $\quad$ $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ $\quad$ $\ln\frac{1}{3}$

$A=-1$ et $B=1$ $\quad$ $2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$ $\quad$ $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ $\quad$ $\ln(2)$ $\quad$ $a\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3a^3}{4}$ $\quad$ $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

Décomposition en éléments simples

Prérequis
Polynômes (factorisation, division euclidienne), primitives usuelles

Calculs de décompositions en éléments simples

Calcul 16.1 — Uniquement des pôles simples.

Effectuer la décomposition en éléments simples (sur $\mathbb{C}$) des fractions rationnelles suivantes.

a) $\dfrac{X^4-2}{X(X+1)(X+2)}$ ....

b) $\dfrac{X^3+2}{(X-1)X(X+1)}$ ....

c) $\dfrac{X^2}{(X-\pi)(X+\pi)}$ ....

Calcul 16.2

Même exercice.

a) $\dfrac{X+1}{(X+2)(X+\mathrm{e})}$ ....

b) $\dfrac{X^2+X+1}{(X-i)(X+i)(X-1)}$ ....

c) $\dfrac{X^2+2}{(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{3})}$ ....

Calcul 16.3 — Avec des pôles multiples.

Effectuer la décomposition en éléments simples (sur $\mathbb{C}$) des fractions rationnelles suivantes.

a) $\dfrac{X+1}{(X-1)^2(X-2)(X-3)}$ ..

b) $\dfrac{2+X^2}{(X+1)X^2(X-1)^2}$ ....

c) $\dfrac{1-X}{X(X+\pi)^2}$ ....

d) $\dfrac{1}{(X-i)^2(X-1-i)^2}$ ......

Calcul 16.4 — À vous de factoriser.

Effectuer la décomposition en éléments simples (sur $\mathbb{C}$) des fractions rationnelles suivantes.

a) $\dfrac{X-3}{X^4-1}$ ....

b) $\dfrac{2X^3+1}{X^4-3X^2+2X}$ ....

Calcul d'intégrales de fractions rationnelles

Calcul 16.5 — Pôles simples ou multiples.

Calculer les intégrales suivantes

a) $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x$ .....

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x+2)(x-2)}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(2x+1)(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$ .....

e) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$ ....

Réponses mélangées

$\frac{2}{X}+\frac{2}{X^2}-\frac{11}{4(X-1)}+\frac{3}{2(X-1)^2}+\frac{3}{4(X+1)}$ $\qquad$ $\frac{2}{X-i}+\frac{1}{(X-i)^2}-\frac{2}{X-(1+i)}+\frac{1}{(X-(1+i))^2}$

$X-3-\frac{1}{X}+\frac{1}{X+1}+\frac{7}{X+2}$ $\qquad$ $\frac{\pi}{8}$ $\qquad$ $1+\frac{\pi}{2(X-\pi)}-\frac{\pi}{2(X+\pi)}$

$1-\frac{2}{X}+\frac{1}{2(X+1)}+\frac{3}{2(X-1)}$ $\qquad$ $1-2\ln(3)$ $\qquad$ $\frac{-3}{X-2}+\frac{1}{X-3}+\frac{2}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}$

$\frac{1}{2X}+\frac{5}{6(X+2)}+\frac{2}{3(X-1)}+\frac{1}{(X-1)^2}.$ $\qquad$ $\frac{1}{2}\ln(2)-\frac{1}{4}\ln(3)$ $\qquad$ $-\frac{1}{2}\ln(3)+\frac{2}{3}\ln(2)$

$\frac{1}{X+1}-\frac{1}{2(X-1)}-\frac{1+3i}{4(X-i)}-\frac{1-3i}{4(X+i)}$ $\qquad$ $\frac{\mathrm{e}-1}{(\mathrm{e}-2)(X+\mathrm{e})}+\frac{1}{(2-\mathrm{e})(X+2)}$

$1-\frac{5}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(X+\sqrt{3})}-\frac{4}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-X)}$ $\qquad$ $\frac{1}{\pi^2 X}-\frac{1}{\pi^2(X+\pi)}-\frac{1+\pi}{\pi(X+\pi)^2}$

$\frac{3}{2(X-1)}-\frac{1+i}{4(X-i)}-\frac{1-i}{4(X+i)}$ $\qquad$ $\frac{2}{3}-4\ln(2)+2\ln(3)$ $\qquad$ $\frac{1}{18}-\frac{1}{9}\ln(5)+\frac{2}{9}\ln(2)$