Nombres complexes II

Exercice 1 :

1 Soit $z \in \mathbb{C}$. $\operatorname{sh}(z)$ et $\operatorname{ch}(z)$ sont définis et donc, $\operatorname{th}(z)$ existe si, et seulement si $\operatorname{ch}(z) \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\text{Or, } \operatorname{ch}(z) = 0 &\iff e^z + e^{-z} = 0 \iff e^{2z} = -1 \iff e^{2z} = e^{i\pi} \\
&\iff 2z \in i\pi + 2i\pi\mathbb{Z} \\
&\iff z \in i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right).
\end{aligned}$$

Finalement, $\operatorname{th}(z)$ existe si, et seulement si $z \notin i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

2 Soit $z \notin i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

$$\operatorname{th}(z) = 0 \iff \operatorname{sh}(z) = 0 \iff e^z = e^{-z} \iff e^{2z} = 1 \iff 2z \in 2i\pi\mathbb{Z} \iff z \in i\pi\mathbb{Z}.$$

Comme $i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \cap i\pi\mathbb{Z} = \varnothing$, $\operatorname{th}(z) = 0$ si, et seulement si $z \in i\pi\mathbb{Z}$.

3 Soit $z \notin i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. Posons $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
|\operatorname{th}(z)| < 1 &\iff |e^z - e^{-z}|^2 < |e^z + e^{-z}|^2 \iff (e^z - e^{-z})\left(e^{\bar{z}} - e^{-\bar{z}}\right) < (e^z + e^{-z})\left(e^{\bar{z}} + e^{-\bar{z}}\right) \\
&\iff -e^{z-\bar{z}} - e^{-(z-\bar{z})} < e^{z-\bar{z}} + e^{-(z-\bar{z})} \\
&\iff 2\left(e^{2iy} + e^{-2iy}\right) > 0 \\
&\iff \cos(2y) > 0.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{cases} |\operatorname{Im}(z)| < \dfrac{\pi}{2} \\ |\operatorname{th}(z)| < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} |y| < \dfrac{\pi}{2} \\ \cos(2y) > 0 \end{cases} \iff |y| < \frac{\pi}{4} \iff z \in \Delta.$$

4 Soit $z \in \Delta$.

D'après **1**, $\operatorname{th}(z)$ existe et d'après **3**, $|\operatorname{th}(z)| < 1$.

Donc, $z \in \Delta \implies \operatorname{th}(z) \in \mathrm{U}$.

Ainsi, th est une application de Δ dans U.

Soit alors $\mathrm{Z} \in \mathrm{U}$ et $z \in \Delta$.

$$\operatorname{th}(z) = \mathrm{Z} \iff \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1} = \mathrm{Z} \iff e^{2z} = \frac{1 + \mathrm{Z}}{1 - \mathrm{Z}}.$$

Comme $\mathrm{Z} \neq -1$, $\dfrac{1 + \mathrm{Z}}{1 - \mathrm{Z}} \neq 0$ et on peut poser $\dfrac{1 + \mathrm{Z}}{1 - \mathrm{Z}} = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \left]-\pi\,;\pi\right]$.

Par suite,

$$\begin{aligned}
e^{2z} = \frac{1 + \mathrm{Z}}{1 - \mathrm{Z}} &\iff e^{2z} = re^{i\theta} \iff e^{2x} = r \text{ et } 2y \equiv \theta \ [2\pi] \\
&\iff x = \frac{1}{2}\ln(r) \text{ et } y \equiv \frac{\theta}{2} \ [\pi] \\
&\iff z \equiv \frac{1}{2}\ln(r) + \frac{\theta}{2}i \ [i\pi].
\end{aligned}$$

Cependant, on ne peut avoir $\theta = \pi$ car on aurait alors $\dfrac{1+\mathrm{Z}}{1-\mathrm{Z}} = -r \in \mathbb{R}_-^*$ puis $\mathrm{Z} = \dfrac{r+1}{r-1} \in \mathbb{R}$.

Par suite, puisque $|\mathrm{Z}| < 1$, on aurait $\mathrm{Z} \in \left]-1\,;1\right[$ et donc $\dfrac{1+\mathrm{Z}}{1-\mathrm{Z}} \in \mathbb{R}_+^*$ ce qui est une contradiction.

Finalement, $\theta \in \left]-\pi\,;\pi\right[$ puis $\dfrac{\theta}{2} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Mais alors, $\begin{cases} \mathrm{th}\,(z) = \mathrm{Z} \\ z \in \Delta \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\ln(r) \\ y = \dfrac{\theta}{2} \end{cases} \iff z = \dfrac{1}{2}\ln(r) + \dfrac{\theta}{2}i.$

Ainsi, tout élément $\mathrm{Z} \in \mathrm{U}$ a un et un seul antécédent $z \in \Delta$.

$$\left(\text{à savoir } z = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\mathrm{Z}}{1-\mathrm{Z}}\right| + \frac{i}{2}\underbrace{\arg\left(\frac{1+\mathrm{Z}}{1-\mathrm{Z}}\right)}_{\in]-\pi;\pi[}\right)$$

En conclusion, th réalise bien une bijection de Δ sur U.