XI

Équations différentielles (linéaires)

La moindre modélisation d'un phénomène en physique amène souvent à la résolution d'une *équation différentielle* voire aux *dérivées partielles* dont la solution cherchée sera la trajectoire, la température, la tension, … du système considérée. Les fonctions considérées dépendent généralement des trois dimensions spatiales x, y, z et du temps t.

Un *opérateur* $\mathrm{F} : \mathbb{R}^{n+1} \longmapsto \mathbb{R}^{4 \text{ ou plus}}$ et une fonction f excitatrice donnés, une *équation différentielle* prend la forme générale :

$$y^{(n)} = \mathrm{F}(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y', y, f).$$

Les équations aux dérivées partielles ont une forme analogue.

On est loin de savoir résoudre *i.e.* trouver les *courbes intégrales*, toutes les équations différentielles existantes sous forme exacte ou même approchée.

L'exemple le plus connu est la résolution des *équations de Navier-Stokes* qui vous apportera un million de dollars et la gloire éternelle tant ses applications sont nombreuses et le problème difficile :

$$\underbrace{\rho}_{m} \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v.\nabla v\right)}_{a} = \underbrace{-\nabla p}_{\mathrm{F}_{pression}} + \underbrace{\mu \nabla^2 v}_{\mathrm{F}_{visqueuse}} .$$

Les équations différentielles sont en général très difficiles à résoudre, aussi nous contenterons-nous de travailler dans le cadre à peu près agréable des équations de la forme :

- $y' + a(x)y = b(x)$ (équations différentielles linéaires du premier ordre),
- $ay'' + by' + cy = d(x)$ (équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.)

Dans ces cas là, les méthodes sont clairement définies et leur application quasi mécanique.

Les autres types ne peuvent en général **pas** se résoudre explicitement, à moins de pouvoir se ramener à des *équations différentielles linéaires*. Cela n'empêche pas de pouvoir donner des conditions d'existence et d'unicité, et de savoir étudier les solutions de ces équations différentielles, mais la problématique de résolution explicite qui nous occupe dans ce chapitre est absente dans ce contexte.

Contenu

Remarques liminaires :

1. *Dans tout ce chapitre,* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$*. Nous nous intéresserons parfois aux solutions réelles d'une équation différentielle et parfois à ses solutions complexes. Les solutions réelles sont bien sûr aussi complexes, mais quand on connaît toutes les solutions complexes et qu'on cherche les réelles, il reste du travail : la connaissance des solutions complexes ne suffit pas.*

   Pour cette raison, nous travaillerons avec des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ *où* $\mathbb{K}$ *désigne l'un des ensembles* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *suivant la situation.*

2. *L'ensemble* E *considéré au cours de la première section sera supposé stable par combinaisons linéaires* i.e.

$$\forall\, x, y \in \mathrm{E},\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda x + y \in \mathrm{E}.$$

   Nous reviendrons sur ce point au deuxième semestre mais comprenez pour l'instant, que la structure de E *permet de considérer toutes les sommes d'éléments de* E *ainsi que les éléments multipliés par une constante* $\lambda \in \mathbb{K}$ *sans que l'on ne s'échappe de* E*.*

   L'ensemble des vecteur du plan, l'ensemble des fonctions continues ou dérivables sur un intervalle I *vérifient cette propriété.*

I Équations et opérateurs linéaires

I.1 Linéarité et conséquences

Le concept de linéarité, que vous avez déjà rencontré dans différents contextes, nous occupera longuement au second semestre et une présentation très informelle sera pour l'instant suffisante.

Définition 1 : Soient E et F deux ensembles stables par combinaisons linéaires.

Un opérateur $\mathrm{T} : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ est dit *linéaire* si :

$$\forall\, x, y \in \mathrm{E},\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \mathrm{T}(\lambda x +_{\mathrm{E}} y) = \lambda \mathrm{T}(x) +_{\mathrm{F}} \mathrm{T}(y).$$

Exemples 1 (Exemples d'opérateurs linéaires) :

E	T	$\mathrm{T}(\lambda x + y) = \lambda \mathrm{T}(x) + \mathrm{T}(y)$
$\mathscr{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	$f \longmapsto f'$	$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$
$\mathscr{C}^0(x_0)$	$f \longmapsto \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} (\lambda f(x) + g(x)) = \lambda \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
$\mathbb{R}^2$	$(x\,;y) \longmapsto ax + by,\ a, b \in \mathbb{R}$	$a(\lambda x + x') + b(\lambda y + y') = \lambda(ax + by) + (ax' + by')$
$\mathscr{C}^0([a\,;b]\,, \mathbb{R})$	$f \longmapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$	$\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
$\left\{ \text{Suites convergentes} \right\}$	$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$	$\lim\limits_{n \to +\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \lim\limits_{n \to +\infty} u_n + \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$
$\vec{\mathscr{P}}$ ou $\vec{\mathscr{E}}$	$\vec{x} \longmapsto \vec{a} \cdot \vec{x}$	$\vec{a} \cdot (\lambda \vec{x} + \vec{y}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{x}) + (\vec{a} \cdot \vec{y})$
$\mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$	$f \longmapsto f' + af,\ a \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$	$(\lambda f + g)' + a(\lambda f + g) = \lambda (f' + af) + (g' + ag)$
$\mathscr{C}^2(\mathrm{I}, \mathbb{R})$	$f \longmapsto f'' + af' + bf,\ a, b \in \mathbb{R}$	$(\lambda f + g)'' + a(\lambda f + g) + b(\lambda f + g) = \lambda (f'' + af' + bf) + (g'' + ag' + bg)$

En particulier, si E est non vide alors $\forall\, x \in \mathrm{E},\ \mathrm{T}(x - x) = \mathrm{T}(x) - \mathrm{T}(x) \implies \mathrm{T}(0_{\mathrm{E}}) = 0_{\mathrm{F}}$.

Définition 2 : Soit $\mathrm{T} : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ un opérateur linéaire.

- On appelle *équation linéaire* toute équation de la forme :

$$\mathrm{T}(y) = b, \quad \text{où } b \in \mathrm{F}. \tag{$\mathcal{E}$}$$

  - $y \in \mathrm{E}$ est l'inconnue cherchée.
  - b en est appelé le *second membre*.
  - On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ et tout élément de $\mathcal{S}$ s'appelle une *solution particulière* et est notée en général y_p.
- On appelle *équation homogène associée* à $(\mathcal{E})$ ou *sans second membre* toute équation de la forme :

$$\mathrm{T}(y) = 0. \tag{$\mathcal{E}_0$}$$

  - On note $\mathcal{S}_0$ ou $\mathcal{S}_{\mathrm{H}}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_0)$.

Un des premiers avantages des équations linaires est que la recherche d'une solution particulière peut se faire en plusieurs temps lorsque le second membre b se décompose en somme de fonctions plus simples :

Théorème 1 (Principe de superposition) : Soient $\mathrm{T} : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ un opérateur linéaire et $b_1, b_2 \in \mathrm{F}$.

Si y_1 et y_2 sont respectivement solutions de $\mathrm{T}(y) = b_1$ et $\mathrm{T}(y) = b_2$ alors $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda y_1 + y_2$ est solution de $\mathrm{T}(y) = \lambda b_1 + b_2$.

Preuve : Il suffit simplement d'utiliser la linéarité de T et d'écrire :

$$\mathrm{T}(\lambda y_1 + y_2) \underset{\substack{\text{linéarité}\\ \text{de T}}}{=} \lambda \mathrm{T}(y_1) + \mathrm{T}(y_2) \underset{\substack{\text{définition de}\\ y_1 \text{ et } y_2}}{=} \lambda b_1 + b_2.$$

D'où le résultat.

L'intérêt des équations linéaires ne s'arrête pas là et s'étend à la structure de l'ensemble de ses solutions :

Théorème 2 (Structure de l'ensemble des solutions) :

1. L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de $(\mathcal{E}_0)$ est non vide et stable par combinaisons linéaires.

   On dit que $\mathcal{S}_0$ est un *sous-espace vectoriel* de E.
2. Si $\mathcal{S}$ n'est pas vide alors toute solution de $(\mathcal{E})$ est la somme d'une solution particulière y_p et d'une solution de $(\mathcal{E}_0)$:

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0 \quad i.e. \quad \forall\, y \in \mathcal{S},\, \exists\, y_0 \in \mathcal{S}_0 \,/\, y = y_p + y_0.$$

   On dit que $\mathcal{S}$ est un *sous-espace affine* de E dirigé par $\mathcal{S}_0$.

Preuve :

1. On sait déjà que $\mathrm{T}(0) = 0$ donc $0 \in \mathcal{S}_0$ qui est toujours non vide.

   La stabilité par combinaisons linéaires est encore une conséquence de la linéarité :

   Soient $\lambda \in \mathrm{K}$ et $y_{0,1}, y_{0,2}$ deux éléments de $\mathcal{S}_0$.

   Alors, $\mathrm{T}(\lambda y_{0,1} + y_{0,2}) = \lambda \mathrm{T}(y_{0,1}) + \mathrm{T}(y_{0,2}) = 0$.

   Donc, $\lambda y_{0,1} + y_{0,2} \in \mathcal{S}_0$ et le résultat cherché.
2. Comme $\mathcal{S} \neq \varnothing$ on peut considérer y_p un de ses éléments i.e. $\mathrm{T}(y_p) = b$.

   On a alors :

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{S} \iff \mathrm{T}(y) = b &\iff \mathrm{T}(y) = \mathrm{T}\left(y_p\right) \iff \mathrm{T}(y) - \mathrm{T}\left(y_p\right) = 0 \underset{\text{Linéarité}}{\iff} \mathrm{T}\left(y - y_p\right) = 0 \\ &\iff y - y_p \text{ est solution de l'équation homogène associée} \\ &\iff y - y_p \in \mathcal{S}_0 \\ &\iff \exists\, y_0 \in \mathcal{S}_0,\ y - y_p = y_0 \\ &\iff \exists\, y_0 \in \mathcal{S}_0,\ y = y_p + y_0. \end{aligned}$$

   Comme $y \in \mathcal{S}$ était quelconque, on vient bien de montrer que $\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0$.

Toute solution générale d'une équation linéaire est donc la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène associée.

ATTENTION Toute solution de $(\mathcal{E})$ est une solution particulière de $(\mathcal{E})$! Elle est dite particulière dans le sens où c'est celle que l'on a trouvée et que c'est sur elle que l'on va s'appuyer, pivoter.

Pour trouver toutes les solutions d'une équation linéaire $\mathrm{T}(y) = b$, il suffira d'en connaître une solution particulière et toutes les solutions de l'équation homogène $\mathrm{T}(y) = 0$.

Ceci est un guide pour nos démarches futures :

Méthode I (Résoudre une équation linéaire) :
Pour résoudre une équation linéaire :

1. Déterminer $\mathcal{S}_0$.
2. Déterminer une solution particulière y_p.
3. Les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme $y_p + y_0$ où $y_0 \in \mathcal{S}_0$.

Exemple 2 : Posons $\mathrm{E} = \mathscr{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, T l'opérateur différentiel et $b = \cos$.

On considère l'équation linéaire :

$$\mathrm{T}(f) = \cos \iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \cos(x).$$

1. Les solutions de l'équation homogène associée $f' = 0$ sont toutes les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$ *i.e.* $\mathcal{S}_0 = \{x \longmapsto \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
2. La fonction $y_p = \sin$ est une solution particulière.

Il ne reste plus qu'à additionner :

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0 = \Big\{x \longmapsto \sin(x) + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}\Big\}.$$

I.2 Équations différentielles linéaires

Définition 3 (Équation différentielle linéaire) : Soient $a_1, \dots, a_r, b \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}\,;\mathbb{K})$.

- On appelle *équation différentielle linéaire* d'ordre r d'une fonction inconnue y, toute équation de la forme :
$$a_r(x)y^{(r)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \qquad (\mathcal{E})$$
où a_r n'est pas la fonction nulle.
- On appelle *équation homogène* associée à $(\mathcal{E})$, l'équation :
$$a_r(x)y^{(r)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \qquad (\mathcal{E}_0)$$
- On appelle *ordre* d'une équation différentielle, le plus haut degré de dérivation apparaissant dans l'équation.
- *Résoudre* ou *intégrer* une telle équation différentielle revient à trouver toutes les fonctions $x \longmapsto y(x)$ solutions de $(\mathcal{E})$ sur un intervalle à préciser.
- On appelle $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions et tout élément de $\mathcal{S}$ s'appelle une *solution particulière*.

Vocabulaire et notations :

— On notera EDL_n pour « signifier équation différentielle linéaire d'ordre n ».

— On note traditionnellement la fonction inconnue y ou x, et x ou t sa variable.

— Lorsque $a_r(x)$ est constante à 1, on dit que l'équation est *normalisée* ou *résolue*.

— Les courbes représentatives des solutions de $(\mathcal{E})$ sont appelées *courbes intégrales*.

Exemples 3 :

- $y' + a(x) = b(x)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
- $y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2.
- $y''x + x^2y' = y^2$ est une équation homogène non linéaire.

  En effet, $x \longmapsto x$ en est solution mais pas $x \longmapsto 2x$ ce qui contredit la première assertion du théorème (2).
- $2y' - y = e^x$ n'est pas homogène.

Remarques :

— La fonction nulle $x \longmapsto 0$ est toujours solution d'une équation homogène.

— Les solutions d'une équation différentielle d'ordre r seront donc, par construction, r fois dérivables.

Elles seront en fait de classe $\mathcal{C}^r$ sur tout intervalle où a_r ne s'annule pas car :

$$y^{(r)} = \frac{1}{a_r(x)}\left(b(x) - a_0(x)y - a_1(x)y' - \dots - a_{r-1}y^{(r-1)}\right),$$

somme de fonctions continues donc continues.

— On notera souvent l'inconnue y au lieu de $y(x)$, y compris dans l'équation afin de bien différencier notre inconnue.

Ainsi, on parlera, par exemple, de l'équation $xy' + 3x^2y^2 = 0$.

— L'équation $(\mathcal{E})$ correspond à l'opérateur

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{T}: & \mathscr{C}^r(\mathbb{R}\,;\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(\mathbb{R}\,;\mathbb{K}) \\ & f & \longmapsto & a_r f^{(r)} + \dots + a_1 f' + a_0 f \end{array}$$

où les coefficients a_i sont des fonctions continues.

Exemples 4 (Un peu de physique) :

- La tension u aux bornes d'un condensateur de capacité C en série avec une résistance R et un générateur de force électromotrice $\mathrm{E}(t)$ vérifie l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$\mathrm{RC}u' + u = \mathrm{E}(t).$$

- L'intensité i dans un circuit RL constitue d'une résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un générateur de force électromotrice $\mathrm{E}(t)$ vérifie l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$\mathrm{L}i' + \mathrm{R}i = \mathrm{E}(t).$$

- La proportion y de carbone 14 dans le carbone total des êtres vivants est constante. Après la mort, la vitesse de désintégration $y'(t)$ est proportionnelle à sa concentration dans un rapport de $1/8000$ par an et vérifie donc l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante (où le temps est exprimé en années) :

$$y' + \frac{1}{8000}y = 0.$$

  On peut ainsi dater la mort d'un être vivant grâce à cette relation (datation au carbone 14).

- L'allongement x d'un ressort vertical de raideur k sans frottement auquel on a suspendu une masse m est régi par l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 :

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0.$$

- L'évolution au cours du temps de θ l'angle formé par un pendule de longueur ℓ et de masse m avec la verticale est donnée par l'équation différentielle **non** linéaire d'ordre 2 :

$$\theta'' + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) = 0.$$

Exercice 1 :

1 Montrer que, quels que soient les réels α, β, la fonction $x \longmapsto (x^3+\alpha x+\beta)e^x$ est une solution de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = 6xe^x. \qquad (\mathrm{E}_1)$$

2 Déterminer une solution affine de l'équation différentielle :

$$\mathrm{e}^x y'' + xy' + 2y = x - 3. \qquad (\mathrm{E}_2)$$

3 Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

Déterminer une équation différentielle du premier ordre dont f soit solution.

Correction :

1 Soit $f : x \longmapsto (x^3+\alpha x+\beta)e^x$ qui est bien deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= (3x^2+\alpha)e^x + (x^3+\alpha x+\beta)e^x \\
&= [x^3+3x^2+\alpha x+(\alpha+\beta)]e^x. \\
f''(x) &= (3x^2+6x+\alpha)e^x + (x^3+3x^2+\alpha x+\alpha+\beta)e^x \\
&= [x^3+6x^2+(\alpha+6)x+(2\alpha+\beta)]e^x. \\
f''(x) - 2f'(x) + f(x) &= [x^3+6x^2+(\alpha+6)x+(2\alpha+\beta)]e^x \\
&\quad - 2[x^3+3x^2+\alpha x+(\alpha+\beta)]e^x \\
&\quad + (x^3+\alpha x+\beta)e^x \\
&= 6xe^x.
\end{aligned}$$

La fonction $x \longmapsto (x^3+\alpha x+\beta)e^x$ est donc bien solution de (E_1).

2 Soit $f : x \longmapsto ax+b$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) &= ax+b \\
f'(x &= a \\
f''(x) &= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f \text{ est solution de } (\mathrm{E}_2) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x y'' + xy' + 2y = x-3 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 + xa + 2(ax+b) = x-3 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad 3ax + 2b = x-3 \\
&\iff \begin{cases} 3a = 1 \\ 2b = -3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ 2b = -\dfrac{3}{2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{3}x - \dfrac{3}{2}$ est solution de (E_2).

3 Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \arcsin(x)$ dérivable sur $]-1\,;1[$.

$$\forall\, x \in\,]-1\,;1[\,,\ f'(x) = \left[-\frac{1}{2}(-2x)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\right] \arcsin(x) + (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{x}{1-x^2} \times \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1-x^2}$$
$$= \frac{x}{1-x^2} f(x) + \frac{1}{1-x^2}$$

En multipliant par $1-x^2$, non nul sur $]-1\,;1[$:

$$\forall\, x \in\,]-1\,;1[\,, \quad (1-x^2)f'(x) = xf(x) + 1$$

La fonction f est donc une solution de l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y' - xy = 1.$$

II ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE 1

Le programme prévoit l'étude des équations différentielles linéaires du premier ordre, **résolues** (i.e. le coefficient de y' vaut 1) :

$$y' + a(x)y = b(x), \qquad (\mathrm{EDL}_1)$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I.

L'équation homogène associée (EDL_1) s'écrit :

$$y' + a(x)y = 0. \qquad (\mathrm{EDL}_1)_0$$

Le théorème (2) de structure s'applique à cette situation. On peut donc se contenter d'étudier l'équation homogène, et de trouver une solution particulière.

À retenir ! :

Solution générale de (EDL_1) $=$ Solution particulière de (EDL_1) $+$ Solution générale de l'équation homogène $(\mathrm{EDL}_1)_0$

II.1 Solutions de l'équation homogène

Théorème 3 (Résolution $y' + a(x)y = 0$, a continue) : Soit $a \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$.
L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ sur I est :

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ y : x \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)},\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K} \right\},$$

où A est une primitive sur I de a.

Toutes les solutions de $(\mathcal{E}_0)$ sont donc colinéaires à $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$. On dit alors que l'ensemble des solutions est une *droite vectorielle*, ou d'une autre manière que $\mathcal{S}_0$ est un espace (vectoriel) de dimension un.

ATTENTION Il n'y a qu'une solution de $(\mathrm{EDL}_1)_0$ qui s'annule : la fonction nulle.

Preuve : Par hypothèse, la fonction a est continue sur I donc elle y admet une primitive A. Sachant que y est une fonction dérivable par nécessité, la fonction $x \longmapsto y(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}$ est donc également dérivable sur I et on a :

$$y \in \mathcal{S}_0 \iff y' + a(x)y = 0$$

En multipliant les deux membres par $\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)} \neq 0$, on obtient :

$$\iff y'\,\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)} + \mathrm{A}'(x)y\,\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)} = 0$$
$$\iff \forall\, x \in \mathrm{I},\ \left(y\,\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}\right)' = 0 \qquad \text{(on reconnaît)}$$

La fonction $x \longmapsto y(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}$, de dérivée nulle sur l'intervalle I est donc constante sur I :

$$\iff \exists\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, x \in \mathrm{I},\ y(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)} = \lambda$$
$$\iff \exists\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, x \in \mathrm{I},\ y(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}.$$

Exemple 5 : Si a est une constante, les solutions de l'équation $y' + ay = 0$ sont toutes les fonctions

$$x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-ax},\ \lambda \in \mathbb{K}.$$

Exemple 6 : $(1 + x^2)y' + y = 1$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients continus (non constants), avec second membre.

1. L'équation homogène associée a pour solution les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\arctan(x)},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. La fonction constante égale à 1 est solution particulière évidente.

D'après le théorème (2), la solution générale est donc

$$x \longmapsto 1 + \lambda\,\mathrm{e}^{-\arctan(x)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemple 7 : $y' + xy = x$.

1. L'équation homogène associée a pour ensemble de solutions les fonctions de la forme $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.
2. Une solution particulière évidente est la fonction constante égale à 1.
3. Les solutions de l'équation sont donc de la forme :

$$x \longmapsto 1 + \lambda\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Méthode 2 :
Comment retrouver cette formule si on l'a oubliée.

1. Au brouillon ou à la manière des physiciens,
   (a) on s'autorise des divisions par y (rigoureusement incorrect si on n'a pas justifié que la fonction ne s'annule pas !).
   L'équation s'écrit alors $\dfrac{y'}{y} = a(x)$.
   (b) On reconnait la dérivée de $\ln|y|$ (appelée dérivée logarithmique de y).
   (c) On primitive, on passe à l'exponentielle et le tour est joué.
2. Au propre, il est préférable d'utiliser directement la formule du cours, pour éviter les problèmes de justification issus de la division par y.

Exercice 2 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = ay$ où a est une constante.
2. $y' = yx^\alpha$ sur $\mathbb{R}$ si $\alpha \geqslant 0$, sur $\mathbb{R}_+^*$ sinon.
3. $\sin(x)y' - \cos(x)y = 0$ sur $\mathrm{I} =]0\,;\pi[$.

Correction :

1. Si $a \neq 0$, $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{ax}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
   Sinon toute fonction constante convient.
2. $x \longmapsto x^\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Les solutions sont de la forme $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
3. $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ est continue sur $]0\,;\pi[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
   Les solutions de $y' - \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}y = 0$ sont de la forme $x \longmapsto \lambda\sin(x)$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

II.2 Solution particulière

Pour commencer, il s'agit de fractionner éventuellement le problème en problèmes plus simples par le théorème (1) de superposition.

Supposant cette première étape effectuée, on cherche une solution particulière de l'équation générale

$$y' + a(x)y = b(x). \qquad (\mathrm{EDL}_1)$$

En premier lieu, essayez de DEVINER une solution particulière. Vous pouvez par exemple pour cela vous aider de l'homogénéité. Vous pouvez aussi rechercher une solution constante ou polynomiale comme dans l' exemple (7) ou l' exemple (8) .

Exemple 8 : Soient $a, \alpha \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}^*$.

1. $y' + ay = b$: La fonction constante $x \longmapsto -\dfrac{b}{a}$ est solution.
2. $y' + ay = b\,\mathrm{e}^{\alpha x}$: La fonction $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ est solution si λ vérifie l'équation $(\alpha + a)\lambda = b$ ce qui n'est possible que si $\alpha + a \neq 0$.
   a. $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}$ est solution de $y' + y = 3\,\mathrm{e}^{2x}$.
   b. $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}$ n'est pas solution de $y' - 2y = 3\,\mathrm{e}^{2x}$.

Mais n'y perdez pas trop de temps : s'il n'y a pas de solution évidente qui vous saute aux yeux, voici une méthode efficace, attribuée à Lagrange [1], pour trouver une solution particulière (au moins sous forme intégrale) à partir d'une solution de l'équation homogène.

Méthode 3 (Variation de la constante) :

1. Les solutions de l'équation homogène étant de la forme $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ on recherche une solution particulière de l'équation (EDL_1) non homogène sous la forme $x \longmapsto \lambda(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ i.e. on « rend la constante variable ».
2. En remplaçant dans l'équation différentielle (EDL_1) et après simplification, $x \longmapsto \lambda(x)$ s'obtient par primitivation.

Preuve : Soit $y_0 : x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ une solution de $(\mathrm{EDL}_1)_0$ i.e. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $y_0' + ay_0 = 0$.
On cherche alors une solution (particulière) y_p de $(\mathrm{EDL}_1)_0$ sous la forme $y_p(x) = \lambda(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ où λ est une fonction dérivable.

---

[1]. **Joseph Louis, comte de Lagrange** (en italien Giuseppe Lodovico ou aussi Giuseppe Luigi De la Grange Tournier), né à Turin en **1736** et mort à Paris en **1813**, est un mathématicien, mécanicien et astronome italien naturalisé français. À l'âge de trente ans, il quitte le Piémont et va séjourner à Berlin pendant vingt-et-un ans. Ensuite, il s'installe pour ses vingt-six dernières années à Paris, où il obtient la nationalité française sur l'instance d'Antoine Lavoisier.

Fondateur du calcul des variations avec Euler et de la théorie des formes quadratiques, il démontre le théorème de Wilson sur les nombres premiers et la conjecture de Bachet sur la décomposition d'un entier en quatre carrés. On lui doit un cas particulier du théorème auquel on donnera son nom en théorie des groupes, un autre sur les fractions continues, l'équation différentielle de Lagrange.

En physique, en précisant le principe de moindre action, avec le calcul des variations, vers 1756, il invente la fonction de Lagrange, qui vérifie les équations de Lagrange, puis développe la mécanique analytique, vers 1788, pour laquelle il introduit les multiplicateurs de Lagrange. Il entreprend aussi des recherches importantes sur le problème des trois corps en astronomie, un de ses résultats étant la mise en évidence des points de libration (dits points de Lagrange) (1772).

Il élabore le système métrique avec Lavoisier pendant la Révolution. Il est membre fondateur du Bureau des longitudes (1795) avec, entre autres, Laplace et Cassini. Il participe à l'enseignement de mathématiques de l'École normale de l'an III avec Joseph Lakanal, de l'École polytechnique (dès 1797) avec Monge et Fourcroy. Il a aussi été le fondateur de l'Académie de Turin (1758).

En mécanique des fluides, il introduit le concept de potentiel de vitesse en 17817, bien en avance sur son temps. Il démontre que le potentiel de vitesse existe pour tout écoulement de fluide réel, pour lequel la résultante des forces dérive d'un potentiel. Dans le même mémoire de 1781, il introduit en plus deux notions fondamentales : le concept de la fonction de courant, pour un fluide incompressible, et le calcul de la célérité d'une petite onde dans un canal peu profond.

Rétrospectivement, cet ouvrage marque une étape décisive dans le développement de la mécanique des fluides moderne.

Lagrange a aussi œuvré dans le domaine de la théorie des probabilités.

On a alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ y_p(x) &= \lambda(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}\\ y_p'(x) &= (\lambda'(x) - a(x)\lambda(x))\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}\\ y_p'(x) + a(x)y_p(x) &= \Big(\lambda'(x) + \underbrace{a(x)\lambda(x) - a(x)\lambda(x)}_{=0}\Big)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}\\ &= \lambda'(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}\end{aligned}$$

Or, y_p est solution de (EDL_1) si, et seulement si

$$y_p'(x) + a(x)y_p(x) = b(x)$$

si, et seulement si

$$\begin{aligned}\lambda'(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} &= b(x)\\ \lambda'(x) &= b(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}.\end{aligned}$$

En conclusion, y_p est solution de (EDL_1) si, et seulement si λ est solution de l'équation différentielle du premier ordre :

$$\mathrm{Z}' = b\,\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}. \tag{XI.1}$$

Toute primitive Z convient puisque l'on cherche une solution particulière de (EDL_1). Cette dernière sera alors de la forme :

$$y_p : x \longmapsto \mathrm{Z}(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}.$$

Remarque : Les solutions générales s'écriront alors :

$$y = y_0 + y_p : x \longmapsto \Big(\lambda + \mathrm{Z}(x)\Big)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Exercice 3 : Résoudre sur $\mathbb{R}$, $(1+x^2)y' + 2xy - 1 = 0$.

Correction :

1. Comme $1 + x^2 > 0$, la fonction $a : x \longmapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ dont une primitive est $\mathrm{A} : x \longmapsto \ln(1+x^2)$.

   Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $y_0 : x \longmapsto \dfrac{\lambda}{1+x^2}$.

2. On cherche donc une solution particulière sous la forme $y_p : x \longmapsto \dfrac{\lambda(x)}{1+x^2}$:

   y_p est solution de $(1+x^2)y' + 2xy = 1$ si, et seulement si

$$\begin{aligned}(1+x^2)\left(\frac{\lambda'(x)}{1+x^2} - \frac{2x\lambda(x)}{(1+x^2)^2}\right) + \frac{2x\lambda(x)}{1+x^2} &= 1\\ \lambda'(x) &= 1\\ \lambda(x) &= x\ (+\mu).\end{aligned}$$

   Une solution particulière est donc $y_p : x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^2}$.

3. Les solutions générales de $(1+x^2)y' + 2xy - 1 = 0$ sont donc de la forme :

$$y : x \longmapsto \frac{\lambda + x}{1+x^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dans certains cas de seconds membres bien particuliers, quand a est une fonction constante, on peut systématiquement se dispenser de la méthode de variation de la constante développée ci après, et chercher directement une solution particulière d'une forme pas trop compliquée.

Théorème 4 (Second membre particulier) : Soient $\lambda, \alpha \in \mathbb{K}$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ un polynôme à coefficients complexes.

On considère l'équation

$$y' + ay = \lambda\, \mathrm{P}(x)\, \mathrm{e}^{\alpha x}, \quad \text{où } a \in \mathbb{K}. \tag{EDL$_1$}$$

L'équation (EDL_1) admet au moins une solution particulière sous la forme :

$$x \longmapsto \mu\, x^m\, \mathrm{Q}(x)\, \mathrm{e}^{\alpha x},$$

où $\mu \in \mathbb{K}$ et $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est un polynôme de degré $\deg(\mathrm{Q}) = \deg(\mathrm{P})$ et

- $m = 0$ si $a + \alpha \neq 0$.
- $m = 1$ sinon.

Ce théorème permet d'envisager les cas suivants :

— $y' + ay = \mathrm{P}(x)$, où $a \in \mathbb{K}$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est une fonction polynômiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré n, admet une solution particulière polynomiale de degré n.

— $y' + ay = \lambda\, \mathrm{e}^{\alpha x}$, où $a, \lambda, \alpha \in \mathbb{K}$, admet une solution particulière de la forme :

$$x \longmapsto y_p(x) = \mu\, \mathrm{e}^{\alpha x} \quad \text{ou} \quad x \longmapsto y_p(x) = \mu x\, \mathrm{e}^{\alpha x}, \qquad \mu \in \mathbb{K}.$$

— $y' + ay = \lambda \cos(\omega x)$ et $y' + ay = \lambda \sin(\omega x)$, où $a, \lambda \in \mathbb{K}$, et $\omega \in \mathbb{R}$, admet une solution particulière de la forme :

$$x \longmapsto y_p(x) = \mu \cos(\omega x) + \nu \sin(\omega x), \qquad (\mu\,; \nu) \in \mathbb{K}^2.$$

— $y' + ay = \lambda \mathrm{ch}\,(\omega x)$ et $y' + ay = \lambda \mathrm{sh}\,(\omega x)$, où $a, \lambda \in \mathbb{K}$, et $\omega \in \mathbb{R}$, admet une solution particulière de la forme :

$$x \longmapsto y_p(x) = \mu \mathrm{ch}\,(\omega x) + \nu \mathrm{sh}\,(\omega x), \qquad (\mu\,; \nu) \in \mathbb{K}^2.$$

Exercice 4 : Déterminer des solutions particulières pour les équations suivantes :

1. $y' + y\cos(x) = 0$.
2. $(1+x^2)y' + xy = 1 + x + 2x^2$.
3. $y' - 2y = 3\cos(x) - \sin(x)$.

Correction :

1. La fonction nulle convient comme à toute équation homogène.
2. Cherchons une solution particulière affine définie par $y_p(x) = ax + b$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} y_p(x) &= ax + b \\ y_p'(x) &= a \end{aligned}$$

y_p est solution particulière si, et seulement si

$$\begin{aligned} (1 + x^2)y_p' + xy_p &= 1 + x + 2x^2 \\ (1 + x^2)a + x(ax + b) &= 1 + x + 2x^2 \end{aligned}$$

$$2ax^2 + bx + a = 1 + x + 2x^2 \iff \begin{cases} 2a = 2 \\ b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Une solution particulière est $y_p : x \longmapsto 1 + x$.

3 Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p : x \longmapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} y_p(x) &= \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) \\ y_p'(x) &= \mu\cos(x) - \lambda\sin(x) \end{aligned}$$

y_p est solution particulière si, et seulement si

$$y_p' - 2y_p = 3\cos(x) - \sin(x)$$

$$(\mu - 2\lambda)\cos(x) - (\lambda + 2\mu)\sin(x) = 3\cos(x) - \sin(x) \iff \begin{cases} \mu - 2\lambda = 3 \\ \lambda + 2\mu = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

Une solution particulière est $y_p : x \longmapsto -\cos(x) + \sin(x)$.

II.3 Problème de Cauchy associé à une EDL_1

Pour l'instant, toutes les solutions générales de (EDL_1) sont définies à une constante près. N'y a-t-il pas moyen de déterminer cette constante ? La réponse est oui mais en rajoutant une condition, dite *initiale*.

La réunion de l'équation différentielle et de cette condition porte un nom :

Définition 4 (Problème de Cauchy[2] d'une EDL_1) :

Soient $a, b \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$, $y_0 \in \mathbb{K}$ et $x_0 \in \mathrm{I}$.

On appelle *problème de Cauchy* associé à l'équation différentielle du premier ordre tout système de la forme :

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) & (\mathrm{EDL}_1) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \qquad (\mathrm{C.L}_1)$$

La condition $y(x_0) = y_0$ est appelée sa *condition initiale*.

Le théorème qui suit affirme, sous certaines conditions, l'existence et l'unicité d'une solution, vérifiant des conditions initiales données :

Théorème 5 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les EDL_1) : Soient $a, b \in \mathscr{C}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$, $x_0 \in \mathrm{I}$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.

Pour tous $x_0 \in \mathrm{I}$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, le système $(\mathrm{C.L}_1)$ possède une unique solution sur I.

Preuve : Soit A la primitive de la fonction continue a s'annulant en x_0.

[2]. **Augustin Louis**, baron **Cauchy**, né à Paris le 21 août **1789** et mort à Sceaux le 23 mai **1857**, est un mathématicien français, membre de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique. Catholique fervent, il est le fondateur de nombreuses œuvres charitables, dont l'œuvre des Écoles d'Orient. Royaliste légitimiste, il s'exila volontairement lors de l'avènement de Louis-Philippe, après les Trois Glorieuses. Ses positions politiques et religieuses lui valurent nombre d'oppositions.

Il fut l'un des mathématiciens les plus prolifiques de tous les temps, quoique devancé par **Leonhard Euler**, **Paul Erdos** et **Arthur Cayley**, avec près de 800 parutions et sept ouvrages. Ses recherches couvrent l'ensemble des domaines mathématiques de l'époque. On lui doit notamment en analyse l'introduction des fonctions holomorphes et des critères de convergence des suites et des séries entières. Ses travaux sur les permutations furent précurseurs de la théorie des groupes. En optique, on lui doit des travaux sur la propagation des ondes électromagnétiques.

Comme $\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)} \neq 0$ sur I, on a une équation équivalente en multipliant les deux membres de (EDL_1) par $\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}$:

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathrm{I},\ \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}(y' + a(x)y) &= \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}b(x) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}y(x)\right) &= \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}b(x) \end{aligned}$$

Avec $y(x_0) = y_0$, en primitivant entre x_0 et $x \in \mathrm{I}$, on obtient :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}y(x) - \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x_0)}y_0 = \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\mathrm{A}(u)}b(u)\mathrm{d}u$$

Comme $\mathrm{A}(x_0) = 0$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}y(x) - y_0 &= \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\mathrm{A}(u)}b(u)\mathrm{d}u \\ y(x) &= \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\mathrm{A}(u)}b(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} \\ &= \underbrace{y_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}}_{y_0(x)} + \underbrace{\left(\int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\mathrm{A}(u)}b(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}}_{y_p(x)}. \end{aligned}$$

La solution y est, en particulier, déterminée de manière unique d'où le résultat.

Remarque : La preuve de ce résultat montre que toute solution de $(\mathrm{C.L}_1)$ est bien de la forme $x \longmapsto \lambda(x)e^{-\mathrm{A}(x)}$, ce qui justifie la méthode (3) de variation de la constante.

Commentaires :

— Les problèmes de Cauchy associés à des équations linéaires **homogènes** du premier ordre ont donc toujours une solution unique : la valeur imposée permet de fixer la constante λ.

— La fonction exponentielle est l'unique solution de l'équation différentielle $y' = y$, avec condition initiale $y(0) = 1$.

Son œuvre a fortement influencé le développement des mathématiques au XIX$^{\text{ème}}$siècle, mais le fait qu'il publie ses résultats dès leur découverte sans y appliquer toute la rigueur souhaitée et la négligence dont il fit preuve concernant les travaux d'Évariste Galois et de Niels Abel entachèrent son prestige. Il rejeta en effet le mémoire de Galois qui lui avaient été soumis en mai et n'eut aucune réponse, jugé par lui « incompréhensible », et celui d'Abel, sous le prétexte d'une « encre trop pâle », alors que ces deux mathématiciens morts avant Cauchy dans des conditions misérables devaient marquer profondément les mathématiques du XX$^{\text{ème}}$ siècle.

Une telle attitude lui a été violemment reprochée. Dans sa biographie, Valson donne une explication : « On doit l'excuser de n'avoir pas toujours eu le temps de s'occuper des publications d'autrui, quand il n'a pas trouvé dans le cours de sa propre vie le loisir nécessaire pour relier et classer ses travaux personnels. »

Le génie de Cauchy fut reconnu dès son plus jeune âge. Dès 1801, **Lagrange** eut ce commentaire : « Vous voyez ce petit homme, eh bien ! Il nous remplacera tous tant que nous sommes de géomètres. »La prédominance de Cauchy en sciences s'explique par la multitude de ses domaines d'études : ses travaux embrassent à peu près toutes les branches des sciences mathématiques, depuis la théorie des nombres et la géométrie pure jusqu'à l'astronomie et l'optique.

Bien que ses talents de mathématicien aient été applaudis, les faveurs dont il bénéficia durant la Seconde Restauration ne furent pas appréciées. Critiquant ouvertement **Laplace** et **Poisson**, il connut rapidement des conflits avec ses anciens appuis à qui il devait ses premières publications. Ses rapports avec Poisson se dégradèrent avec le temps et une rivalité entre eux s'installa. Ses votes à l'Académie étaient considérés comme orientés. Malgré l'influence de Cauchy sur les nouvelles générations, ses dernières années furent obscurcies par une querelle de priorité en mécanique, où il refusa de reconnaître son erreur.

— Dans la même idée, l'unique solution de $y' + a(x)y = 0$ telle que $y(x_0) = 0$ est la fonction nulle.

En effet, la fonction nulle est solution et vérifie $y(x_0) = 0$.

D'après le théorème (5), c'est la seule.

— La formule $y(x) = \left(y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\mathrm{A}(u)} b(u)\,\mathrm{d}u\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ donnant la forme générale de la solution de $(\mathrm{C.L}_1)$ n'est à peu près d'aucune utilité pour le calcul pratique de solution, puisqu'on ne saura pas, en général, calculer l'intégrale.

Pour réellement résoudre une équation différentielle, il faut (et c'est bien le plus difficile) trouver une solution particulière.

Exemple 9 : Considérons l'équation différentielle $y' + 2xy = 0$ (sur $\mathbb{R}$), avec comme condition initiale $y(1) = 2$.

Les solutions de l'équation sont de la forme $\lambda\,\mathrm{e}^{-x^2}$, et la condition initiale se traduit alors par $\lambda\,\mathrm{e}^{-1} = 2$, soit $\lambda = 2\,\mathrm{e}$.

Donc, l'unique solution de ce problème de Cauchy est la fonction $y :\ x \longmapsto 2\,\mathrm{e}^{1-x^2}$.

Exercice 5 : Résoudre $y' - \dfrac{1}{2x}y = \sqrt{x}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+^*$ avec $y(1) = 0$.

Correction :

1. La solution de l'équation homogène sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \longmapsto \lambda\sqrt{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Par la méthode de variation de la constante, une solution particulière de $(\mathrm{C.L}_1)$ est $x \longmapsto x\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. La solution générale de $(\mathrm{C.L}_1)$ est donc $x \longmapsto (\lambda + x)\sqrt{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. La condition initiale impose $\lambda = -1$.

La solution du problème de Cauchy considéré est donc $x \longmapsto (x-1)\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Corollaire 5.1 (Étude qualitatives des courbes intégrales) : (Hors-Programme)

On considère deux fonctions a et b continues sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ ainsi que l'équation différentielle
$$y' + a(x)y = b(x). \qquad (\mathrm{EDL}_1)$$

Alors :

- Une seule courbe intégrale définie sur I passe par le point $\mathrm{M}_0(x_0, y_0) \in \mathrm{I} \times \mathbb{K}$.
- Deux courbes intégrales distinctes ne peuvent se couper dans $\mathrm{I} \times \mathbb{K}$.

Preuve : Le premier point est une reformulation du théorème (5).

Montrons le deuxième point : supposons que deux courbes intégrales se coupent en $\mathrm{M}_0\,(x_0\,;y_0)$. Notons y_1 et y_2 les solutions de (EDL_1) sur I correspondantes. Elles sont donc toutes deux solutions du même problème de Cauchy :
$$(\mathrm{C.L}_1) \quad \begin{cases} (\mathrm{EDL}_1) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Par unicité, on a donc $y_1 \equiv y_2$.

II.4 Résolution des EDL_1 à coefficients constants

Du fait de son importance pratique, on isole dans le résultat suivant la résolution complète du cas d'une équation $y' = ay + b$ dans le cas où a et b sont constants (réels ou complexes).

Ce théorème est un corollaire immédiat des résultats des sections précédentes.

Corollaire 5.2 (Équation linéaire $y' + ay = b$ à coefficients constants) : Soit a et b deux éléments de $\mathbb{K}$.

L 'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ est :

$$\mathcal{S} = \left\{ y : x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-ax} + \frac{b}{a},\ \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

En particulier, l'unique solution telle que $y(x_0) = y_0$ est :

$$y : x \longmapsto \left(y_0 - \frac{b}{a} \right) \mathrm{e}^{-a(x-x_0)} + \frac{b}{a}.$$

Exemple 10 (Un peu de physique : Circuit RL) : On considère un circuit électrique constitué d'un échelon de tension E, une résistance R, une bobine d'inductance L et un interrupteur.

À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur, qui était jusque là ouvert.

On note $i : t \longmapsto i(t)$ l'intensité dans le circuit en fonction du temps t.

L'intensité vérifie l'équation différentielle :

$$\mathrm{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \mathrm{R}i = \mathrm{E}, \tag{XI.2}$$

et la condition initiale $i(0) = 0$.

En notant $\tau = \dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}}$ (constante de temps du circuit), l'équation (XI.2) s'écrit :

$$i' + \frac{i}{\tau} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{L}}.$$

1. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $i_{\mathrm{H}} : t \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$,
2. la fonction constante à $i_p : t \longmapsto \dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}$ est solution particulière de l'équation.
3. Les solutions générales sont donc de la forme

$$i : t \longmapsto \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}} + \lambda\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}.$$

4. Comme $i(0) = 0$, on obtient $\lambda = -\dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}$ soit :

$$i : t \longmapsto i(t) = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad (\text{si } t \geqslant 0, \text{ bien entendu}).$$

Commentaires : En pratique, $t \in [0\,;+\infty[$ et $\tau > 0$. La fonction i est alors une fonction d'atténuation dont la courbe ressemble à la figure (XI.2) .

- En particulier, la fonction i est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- La courbe de i admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = \dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}$.
- La tangente à la courbe en $t = 0$ a pour coefficient directeur

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0) = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{L}} - \mathrm{R}i(0) = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{L}}.$$

Cette tangente, d'équation $y = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{L}} t$, coupe donc l'asymptote à la courbe $y = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}$ en

$$x = \frac{\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}}{\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{L}}} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}} = \tau.$$

- En physique, on dit que l'intensité est :
  - en *régime permanent* quand elle s'approche fortement de son asymptote.
  - et en *régime transitoire* dans sa période de forte croissance.

En pratique, on considère le *régime permanent* atteint pour $t = 3\tau$. À cet instant, l'intensité vaut environ 95% de sa valeur maximale.

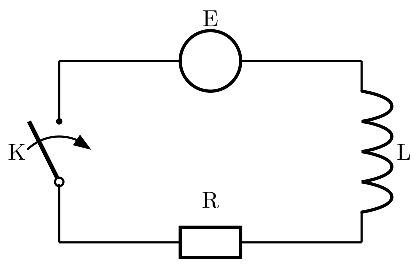

Figure XI.1 – Circuit RL

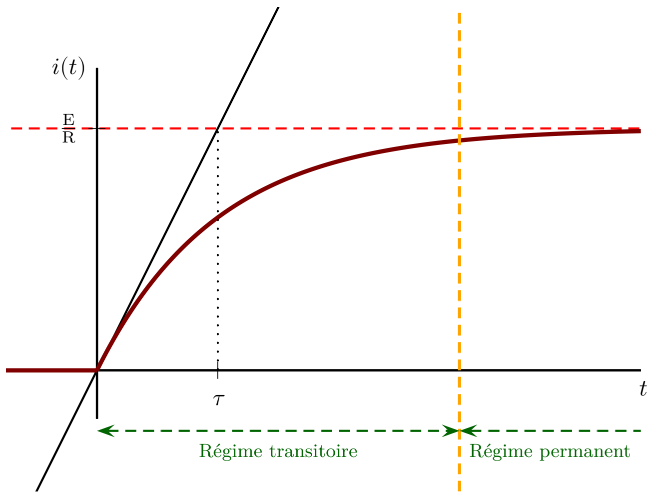

Figure XI.2 – Intensité dans un circuit RL en régime forcé.

Exercice 6 : Quelle est la réponse en intensité d'un circuit RL en régime alternatif lorsque $\mathrm{E} = \sqrt{2}\cos(\omega t)$, où $\omega \in \mathbb{R}$?

III ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE 2 À COEFFICIENTS CONSTANTS

Le programme prévoit l'étude des équations différentielles linéaires du deuxième ordre, à coefficients constants

$$ay'' + by' + cy = f(x) \qquad (\mathrm{EDL}_2)$$

où a, b, c sont des constantes, et f est une fonction de la forme :

$$x \longmapsto \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{\alpha x} \text{ avec } \mathrm{A}, \alpha \in \mathbb{C} \quad \text{ou} \quad x \longmapsto \mathrm{B}\cos(\omega x) \quad \text{ou} \quad x \longmapsto \mathrm{B}\sin(\omega x) \text{ avec } \mathrm{B} \in \mathbb{C}, \omega \in \mathbb{R}.$$

Les méthodes ne sont pas très différentes de celles vues pour le premier ordre même si leur complexité augmente.

En accord avec le programme, on se restreindra au cas de **coefficients constants** :

$$ay'' + by' + cy = f(x), \text{ où } a, b, c \in \mathbb{K} \text{ et } f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{K}). \qquad (\mathrm{EDL}_2)$$

L'équation homogène associée (EDL_2) s'écrit :

$$ay'' + by' + cy = 0. \qquad (\mathrm{EDL}_2)_0$$

Ici aussi le théorème (2) de structure s'applique :

À retenir 2 :

Solution générale de (EDL_2) = Solution particulière de (EDL_2) + Solution générale de l'équation homogène $(\mathrm{EDL}_2)_0$

Notre démarche sera donc la même que pour les EDL_1.

III.1 Solutions de l'équation homogène

En pratique, ce sont généralement les solutions réelles des équations différentielles qui nous intéressent, mais nous commencerons pourtant par le cas complexe car c'est lui le cas théorique fondamental, celui dont la preuve est naturelle, et ceci entièrement grâce à l'*exponentielle complexe*.

Définition 5 (Polynôme caractéristique) : Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.
On appelle *polynôme caractéristique* de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ le polynôme $\mathrm{P}_{car} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$ de discriminant $\Delta_{car} = b^2 - 4ac$.

Théorème 6 (Résolution de $(\mathrm{EDL}_2)_0$ dans le cas complexe) : Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.
On considère l'équation différentielle linéaire

$$ay'' + by' + cy = 0. \qquad (\mathrm{EDL}_2)_0$$

- $\mathrm{P}_{car} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$ son polynôme caractéristique et $\Delta_{car} = b^2 - 4ac$ son discriminant.
- $\mathcal{S}_0^{\mathbb{C}}$ l'ensemble des solutions de $(\mathrm{EDL}_2)_0$.

Alors, les solutions sont données par le tableau suivant où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$:

Δ_{car}	Racines de P_{car}	$\mathcal{S}_0^{\mathbb{C}}$
$\Delta_{car} \neq 0$	r_1 et r_2 distinctes	$x \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{r_1 x} + \mu\, \mathrm{e}^{r_2 x}$
$\Delta_{car} = 0$	r	$x \longmapsto (\lambda x + \mu)\, \mathrm{e}^{rx}$

Autrement dit, $\mathcal{S}_0^{\mathbb{C}} = \left\{ \lambda u + \mu v \,/\, (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$ où

— si $\Delta_{car} \neq 0$ alors $u : x \longmapsto \mathrm{e}^{r_1 x}$ et $v : x \longmapsto \mathrm{e}^{r_2 x}$.
— Si $\Delta_{car} = 0$ alors $u : x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}$ et $v : x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{rx}$.

Dans les deux cas, toute solution est combinaison linéaire de deux solutions fondamentales u, v, déterminées à partir des solutions de l'équation caractéristique.

Ces solutions fondamentales ne sont pas multiples l'une de l'autre.

On dira bientôt qu'elles sont *libres* et qu'elles constituent une *base* de $\mathcal{S}_0^{\mathbb{C}}$.

On dira alors de ce dernier qu'il constitue un *sous-espace vectoriel* de $\mathscr{D}^2(\mathbb{R}\,;\mathbb{C})$ de *dimension* 2 et que, dès lors, $\mathcal{S}^{\mathbb{C}}$ est un *plan affine* de direction $\mathcal{S}_0^{\mathbb{C}}$.

Preuve : Suivant la forme des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 1, on cherche à quelles conditions $(\mathrm{EDL}_2)_0$ peut admettre des solutions sous la forme $y(x) = \mathrm{e}^{rx}$ où $r \in \mathbb{C}$.

On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} y : x \longmapsto \mathrm{e}^{rx} \text{ est solution de } (\mathrm{EDL}_2)_0 &\iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \\ &\iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ (ar^2 + br + c)\,\mathrm{e}^{rx} = 0 \qquad \text{avec } \mathrm{e}^{rx} \neq 0 \\ &\iff ar^2 + br + c = 0 \\ &\iff r \text{ est racine de } \mathrm{P}_{car}. \end{aligned}$$

On cherche alors une solution (particulière) de $(\mathrm{EDL}_2)_0$ sous la forme $y = z\,\mathrm{e}^{rx}$ où

- z est une fonction au moins deux fois dérivables.
- r est une racine de $\mathrm{P}_{car} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R},\ y(x) &= z(x)\,\mathrm{e}^{rx} \\ y'(x) &= (z'(x) + rz(x))\,\mathrm{e}^{rx} \\ y''(x) &= (z''(x) + 2rz'(x) + r^2 z(x))\,\mathrm{e}^{rx} \\ ay''(x) + by'(x) + cy(x) &= \Big(az''(x) + (2ar+b)z'(x) + \underbrace{(ar^2 + br + c)}_{=0} z(x)\Big)\,\mathrm{e}^{rx} \\ &= \Big(az''(x) + (2ar+b)z'(x)\Big)\,\mathrm{e}^{rx}. \end{aligned}$$

y est donc solution de $(\mathrm{EDL}_2)_0$ si, et seulement si z' est solution de l'équation différentielle du premier ordre :

$$a\mathrm{Z}' + (2ar_1 + b)\mathrm{Z} = 0. \tag{XI.3}$$

- Si r est racine double de P_{car} alors $r = -\dfrac{b}{2a} \iff 2ar + b = 0$.

  L'équation (XI.3) se réduit alors à :

$$\begin{aligned} a\mathrm{Z}' = 0 \iff z'' = 0 &\iff z \text{ est une fonction affine.} \\ &\exists\,(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{C}^2 \,/\, z : x \longmapsto \lambda x + \mu \\ &\exists\,(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{C}^2 \,/\, \boxed{y : x \longmapsto (\lambda x + \mu)\ \mathrm{e}^{rx}.} \end{aligned}$$

- Si r_1 est une racine simple de P_{car}, alors :

$$\begin{aligned} &\exists\,\lambda_0 \in \mathbb{C}, \forall\, x \in \mathbb{R},\ z'(x) = \lambda_0\,\mathrm{e}^{-\frac{2ar_1+b}{a}x} \\ &\exists\,(\lambda_0\,;\mu) \in \mathbb{C}, \forall\, x \in \mathbb{R},\ z(x) = -\frac{a\lambda_0}{2ar_1 + b}\,\mathrm{e}^{-\left(2r_1 + \frac{b}{a}\right)x} + \mu \\ &\exists\,(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{C}, \forall\, x \in \mathbb{R},\ z(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\left(2r_1 + \frac{b}{a}\right)x} + \mu \\ &\exists\,(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{C}, \forall\, x \in \mathbb{R},\ y(x) = z(x)\,\mathrm{e}^{r_1 x} = \lambda\,\mathrm{e}^{-\left(r_1 + \frac{b}{a}\right)x} + \mu\,\mathrm{e}^{r_1 x}. \end{aligned}$$

Or, d'après les relations coefficients-racines d'un polynôme de degré 2,

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \iff -\left(r_1 + \frac{b}{a}\right) = r_2.$$

En remplaçant, on obtient finalement la forme générale de la solution sous la forme :

$$\boxed{y : x \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{r_2 x} + \mu\, \mathrm{e}^{r_1 x}}, \quad (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{C}^2.$$

Remarques :

— Si $\Delta_{car} \neq 0$, la première étape de la méthode exposée pour trouver ces solutions nous fournissait déjà la totalité des solutions (puisqu'on pouvait choisir indifféremment r_1 ou r_2 et puisque l'ensemble des solutions est stable par combinaison linéaire).

La deuxième étape ne sert dans ce cas seulement qu'à prouver qu'il n'y a pas d'autre solution.

— Dans le cas où $\Delta_{car} = 0$, la deuxième étape nous fournit une solution que la première étape ne nous permettait pas d'obtenir.

Même si les coefficients a et b sont réels, il peut arriver que l'expression obtenue au bout fasse intervenir des exponentielles complexes (cas où $\Delta_{car} < 0$).

La solution générale obtenue est alors une fonction à valeurs complexes. Parmi celles-ci, certaines sont à valeurs réelles. On est souvent intéressé par ces fonctions spécifiquement. C'est le propos de la proposition (??) et du théorème (7).

— La méthode exposée ci-dessus est aussi valable pour des coefficients variables, à partir du moment où on connait une solution particulière. Elle trouve là toute sa pertinence.

Exercice 7 : Déterminer les solutions complexes des équations suivantes :

1. $y'' + 4y = 0$
2. $y'' - y' + (1+i)y = 0$
3. $y'' - (2+i)y' + (1+i)y = 0$

Correction :

1. $(\mathrm{E}_c) : r^2 + 4 = 0$ a deux solutions $2i$ et $-2i$.

$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \left\{x \longmapsto \mathrm{K}_1 e^{2ix} + \mathrm{K}_2 e^{-2ix},\ (\mathrm{K}_1\,;\mathrm{K}_2) \in \mathbb{C}^2\right\}$$

2. $(\mathrm{E}_c) : r^2 - r + (1+i) = 0$ a deux solutions $1-i$ et i.

$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \left\{x \longmapsto \mathrm{K}_1 e^{(1-i)x} + \mathrm{K}_2 e^{ix},\ (\mathrm{K}_1\,;\mathrm{K}_2) \in \mathbb{C}^2\right\}$$

3. $(\mathrm{E}_c) : r^2 - (2+i)r + (1+i) = 0$ a deux solutions $1+i$ et 1.

$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \left\{x \longmapsto \mathrm{K}_1 e^{(1+i)x} + \mathrm{K}_2 e^{x},\ (\mathrm{K}_1\,;\mathrm{K}_2) \in \mathbb{C}^2\right\}$$

Théorème 7 (Résolution de $(\mathrm{EDL}_2)_0$ dans le cas réel) : Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

On considère l'équation différentielle linéaire

$$ay'' + by' + cy = 0. \qquad (\mathrm{EDL}_2)_{0,\mathbb{R}}$$

- $\mathrm{P}_{car} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$ son polynôme caractéristique et $\Delta_{car} = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- $\mathscr{S}_0^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des solutions de $(\mathrm{EDL}_2)_{0,\mathbb{R}}$.

Alors, les solutions sont données par le tableau suivant où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

Δ_{car}	Racines de P_{car}	$\mathscr{S}_0^{\mathbb{R}}$
$\Delta_{car} > 0$	r_1 et r_2 réelles distinctes	$x \longmapsto \lambda\, e^{r_1 x} + \mu\, e^{r_2 x}$
$\Delta_{car} = 0$	$r\ (\in \mathbb{R})$	$x \longmapsto (\lambda x + \mu)\ e^{rx}$
$\Delta_{car} < 0$	$r \pm \mathrm{i}\,\omega$ complexes conjuguées	$x \longmapsto e^{rx}\Big(\lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)\Big)$

Autrement dit, $\mathscr{S}_0^{\mathbb{R}} = \Big\{\lambda u + \mu v \,/\, (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2\Big\}$ où

— si $\Delta_{car} \neq 0$ alors $u : x \longmapsto e^{r_1 x}$ et $v : x \longmapsto e^{r_2 x}$.
— Si $\Delta_{car} = 0$ alors $u : x \longmapsto e^{rx}$ et $v : x \longmapsto x\, e^{rx}$.
— Si $\Delta_{car} < 0$ alors $u : x \longmapsto e^{rx}\cos(\omega x)$ et $v : x \longmapsto e^{rx}\sin(\omega x)$.

Comme dans le cas complexe, toute solution est combinaison linéaire de deux solutions fondamentales u, v, déterminées à partir des solutions de l'équation caractéristique.

Ici aussi, $\mathscr{S}_0^{\mathbb{R}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{D}^2(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$ de dimension 2 et de base $(u\,;v)$.

Preuve : La démonstration du théorème (6) conduite de manière identique pour $(\mathrm{EDL}_2)_{0,\mathbb{R}}$ résout aisément le cas $\Delta_{car} \geqslant 0$ lorsque $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Seul le cas $\Delta_{car} < 0$ reste à démontrer.

Considérons donc ce cas avec $r_1 = r + \mathrm{i}\,\omega$ et $r_2 = r - \mathrm{i}\,\omega$ les deux racines complexes conjuguées de P_{car}.

Soit y une solution complexe de l'équation $(\mathrm{EDL}_2)_{0,\mathbb{R}}$. D'après le théorème (6), y est de la forme :

$$y : x \longmapsto \lambda_1\, e^{r_1 x} + \mu_1\, e^{r_2 x} = e^{rx}\Big(\lambda_1\, e^{\mathrm{i}\,\omega x} + \mu_1\, e^{-\mathrm{i}\,\omega x}\Big).$$

Cette fonction sera à valeurs réelles si, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}\left(\lambda_1\, e^{\mathrm{i}\,\omega x} + \mu_1\, e^{-\mathrm{i}\,\omega x}\right) = 0$.

En particulier, pour :

– $x = 0$, $\mathrm{Im}\left(\lambda_1 + \mu_1\right) = 0 \iff \mathrm{Im}\left(\lambda_1\right) = -\mathrm{Im}\left(\mu_1\right)$.
– $x = \dfrac{\pi}{2\omega}$, $\mathrm{Im}\left(\mathrm{i}\left(\lambda_1 - \mu_1\right)\right) = 0 \iff \mathrm{Re}\left(\lambda_1 - \mu_1\right) = 0 \iff \mathrm{Re}\left(\lambda_1\right) = \mathrm{Re}\left(\mu_1\right)$.

Autrement dit, nécessairement $\mu_1 = \overline{\lambda_1}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in \mathbb{R},\ y(x) &= e^{rx}\Big(\lambda_1\, e^{\mathrm{i}\,\omega x} + \overline{\lambda_1}\, e^{-\mathrm{i}\,\omega x}\Big) = e^{rx}\Big(\lambda_1\, e^{\mathrm{i}\,\omega x} + \overline{\lambda_1\, e^{\mathrm{i}\,\omega x}}\Big)\\
&= e^{rx} \times 2\mathrm{Re}\left(\lambda_1\, e^{\mathrm{i}\,\omega x}\right)\\
&= e^{rx}\Big(\underbrace{2\mathrm{Re}\left(\lambda_1\right)}_{\lambda\in\mathbb{R}}\cos(\omega x) + \underbrace{\left(-\mathrm{Im}\left(\lambda_1\right)\right)}_{\mu\in\mathbb{R}}\sin(\omega x)\Big)\\
&= e^{rx}\Big(\lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)\Big).
\end{aligned}$$

Réciproquement, cette fonction est bien réelle.

Exemple 11 : En physique, on privilégie d'autres formes équivalentes des solutions.

- Dans le cas périodique, on peut aussi réexprimer les solutions en regroupant sin et cos à l'aide d'une transformation de Fresnel :

$$\mathcal{S}_0^{\mathbb{R}} = \left\{ y : x \longmapsto \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{rx}\cos(\omega x + \varphi),\ (\mathrm{A}\,;\varphi) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- Enfin, dans le cas $\Delta > 0$, les solutions peuvent aussi s'exprimer sous une forme trigonométrique mais hyperbolique cette fois :

$$\lambda_1\,\mathrm{e}^{r_1 x} + \mu_1\,\mathrm{e}^{r_2 x} = \mathrm{e}^{\frac{r_1+r_2}{2}x}\left(\lambda_1\,\mathrm{e}^{\frac{r_1-r_2}{2}x} + \mu_1\,\mathrm{e}^{-\frac{r_1-r_2}{2}x}\right)$$

On pose $r = \dfrac{r_1+r_2}{2}$ et $\omega = \dfrac{r_1-r_2}{2}$:

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{e}^{rx}\Big(\lambda_1\,(\mathrm{ch}\,(\omega x) + \mathrm{sh}\,(\omega x)) + \mu_1\,(\mathrm{ch}\,(\omega x) - \mathrm{sh}\,(\omega x))\Big) \\
&= \mathrm{e}^{rx}\Big(\,(\lambda_1 + \mu_1)\,\mathrm{ch}\,(\omega x) + (\lambda_1 - \mu_1)\,\mathrm{sh}\,(\omega x)\Big) \\
&= e^{rx}\Big(\lambda\mathrm{ch}\,(\omega x) + \mu\mathrm{sh}\,(\omega x)\Big).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_0^{\mathbb{R}} &= \left\{ y : x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}(\lambda\mathrm{ch}\,(\omega x) + \mu\mathrm{sh}\,(\omega x)),\ (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \left\{ y : x \longmapsto \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{rx}\mathrm{ch}\,(\omega x + \varphi),\ (\mathrm{A}\,;\varphi) \in \mathbb{R}^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Exercice 8 : Déterminer les solutions réelles des équations :

1. $y'' - 2y' - 3y = 0$
2. $y'' + 2y' + y = 0$
3. $y'' + 2y' + 4y = 0$

Correction :

1. $(\mathrm{E}_c) : r^2 - 2r - 3 = 0$ a deux solutions -1 et 3.

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \longmapsto k_1 e^{-x} + k_2 e^{3x},\ (k_1\,;k_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

2. $(\mathrm{E}_c) : r^2 + 2r + 1 = 0$ a une solution double : -1.

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \longmapsto (k_1 x + k_2)e^{-x},\ (k_1\,;k_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

3. $(\mathrm{E}_c) : r^2 + 2r + 4 = 0$ a deux solutions $-1 \pm i\sqrt{3}$.

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \longmapsto e^{-x}\left[k_1\cos\left(x\sqrt{3}\right) + k_2\sin\left(x\sqrt{3}\right)\right],\ (k_1\,;k_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Remarque : Des équations différentielles de la forme :

$$y'' + \omega^2 y = 0 \qquad \text{ou} \qquad y'' - \omega^2 y = 0,$$

avec $\omega \in \mathbb{R}$ sont fréquentes en physique. Leurs solutions respectives s'écrivent : $(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2$ et

$$x \longmapsto \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x) \qquad x \longmapsto \lambda\mathrm{ch}\,(\omega x) + \mu\mathrm{sh}\,(\omega x)$$

$$x \longmapsto \mathrm{A}\cos(\omega x + \varphi). \qquad x \longmapsto \mathrm{A}\mathrm{ch}\,(\omega x + \varphi).$$

$(\mathrm{A}\,;\varphi) \in \mathbb{R}^2$

Exemple 12 (Circuit LC) : La charge q au cours du temps d'un condensateur dans un circuit LC constitué d'un condensateur de capacité R et d'une bobine d'inductance L vérifie l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$q'' + \frac{1}{\mathrm{LC}}q = 0.$$

En posant $\omega^2 = \dfrac{1}{\mathrm{LC}}$:

$$q'' + \omega^2 q = 0. \tag{LC}$$

Les solutions de (LC) s'écrivent alors sous la forme :

$$q : t \longmapsto \lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t) = \mathrm{A}\cos(\omega t + \varphi).$$

avec $(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2$ ou $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \left[0\,; \dfrac{2\pi}{\omega}\right[$.

La constante A est appelée amplitude de la solution et la constante φ, son déphasage.

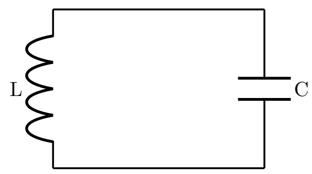

Figure XI.3 – Circuit LC.

Exemple 13 (Un peu de physique : Circuit RLC) : On considère cette fois un circuit RLC série muni d'un interrupteur que l'on fermera à $t = 0$ et on suppose le condensateur chargé avec une certaine charge q_0 avant la fermeture de celui-ci.

On s'intéresse à l'évolution de cette charge q au cours du temps.

Comme $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = i$, elle est, mathématiquement parlant, la primitive de l'intensité i.

Par ailleurs, la tension aux bornes d'un condensateur est donnée par $u_c = \dfrac{q}{\mathrm{C}}$, où C est une constante appelée charge du condensateur.

La loi des mailles appliquée au circuit s'écrit :

$$u_{\mathrm{R}} + u_{\mathrm{L}} + u_{\mathrm{C}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \mathrm{R}i + \frac{q}{\mathrm{C}} = 0.$$

Équation qui se met sous la forme habituelle :

$$q'' + \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}q' + \frac{1}{\mathrm{LC}}q = 0.$$

On note usuellement en physique :

- $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{LC}}}$, constante appelée *pulsation propre* du circuit.
- $\mathrm{Q} = \dfrac{1}{\mathrm{R}}\sqrt{\dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{C}}} = \dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}\omega_0}$, qu'on appelle *facteur de qualité* du circuit.

Notre équation différentielle devient :

$$q'' + \frac{\omega_0}{\mathrm{Q}}q' + \omega_0^2 q = 0.$$

On a, par ailleurs, les conditions initiales $q(0) = q_0$ et $q'(0) = i(0) = 0$ (continuité de la charge et de l'intensité).

Son équation caractéristique a pour discriminant $\Delta = \dfrac{\omega_0^2}{\mathrm{Q}^2}(1 - 4\mathrm{Q}^2)$.

- Le discriminant est positif quand $\mathrm{Q} < \dfrac{1}{2}$, auquel cas les deux racines de l'équation caractéristiques sont $\dfrac{\omega_0}{2\mathrm{Q}}\left(\pm\sqrt{1 - 4\mathrm{Q}^2} - 1\right)$, négatives toutes les deux.

La charge est donc une somme de deux exponentielles décroissantes.

On parle alors de *régime apériodique*, la charge se contentant de décroitre de q_0 vers 0 (*confer* figure (XI.5)).

- Au contraire, lorsque $Q > \frac{1}{2}$, le discriminant de l'équation est négatif, et on a donc une charge qui est le produit d'une fonction périodique par une exponentielle décroissante.

  On parle alors de *régime pseudo-périodique* : la charge tend toujours vers 0, mais en oscillant avec une amplitude décroissante au cours du temps (*confer* figure (XI.6)).

- Enfin, dans le cas où $Q = \frac{1}{2}$ il y a une racine double et une charge qui est produit d'une fonction affine par une exponentielle décroissante.

  On parle de *régime critique*, la courbe ressemble à celle du régime apériodique (*confer* figure (XI.7)).

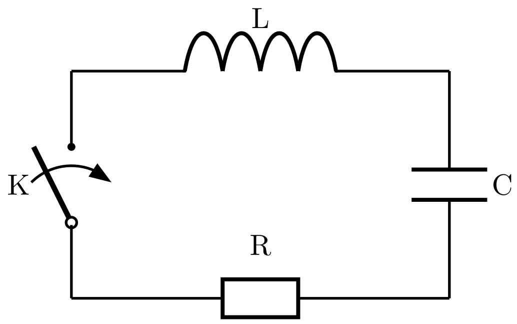

Figure XI.4 – Circuit RLC.

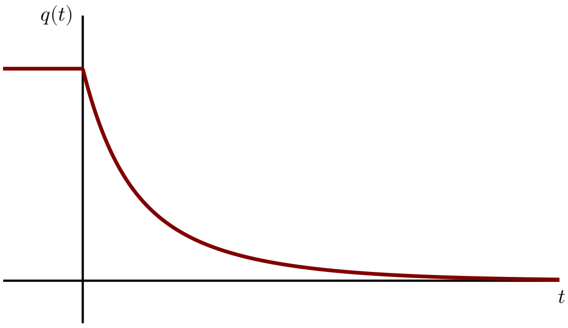

Figure XI.5 – Décharge aux bornes du condensateur d'un circuit RLC en régime apériodique.

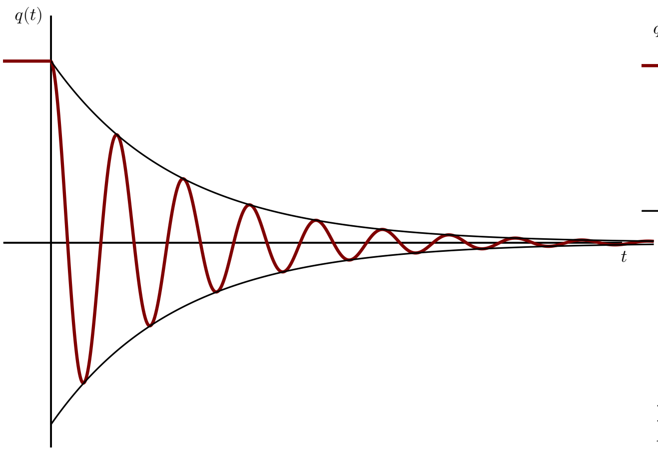

Figure XI.6 – Décharge aux bornes du condensateur d'un circuit RLC en régime pseudo-périodique.

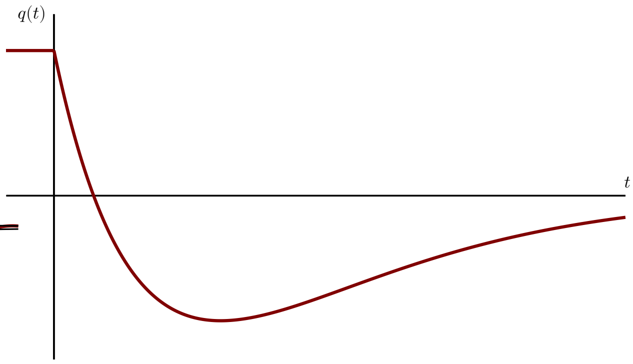

Figure XI.7 – Décharge aux bornes du condensateur d'un circuit RLC en régime critique.

III.2 Solution générale

On considère à nouveau notre équation générale :

$$ay'' + by' + cy = f(x), \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{K} \text{ et } f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{K}). \tag{EDL$_2$}$$

En accord avec le théorème (2), toute solution de (EDL_2) s'obtient en ajoutant à une solution particulière y_p de (EDL_2) une solution de l'équation homogène associée $(\mathrm{EDL}_2)_0$ ce que l'on résume par :

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0.$$

Le problème principal reste donc de trouver une solution particulière. Certes, il existe une méthode, dite « de variation des constantes » mais elle est plus délicate à mettre en œuvre et n'est pas au programme de PTSI qui nous restreint au second membre de la forme

$$f : x \longmapsto \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{\alpha x}, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Par extension, seront également concernés tous ceux de la forme

$$x \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\Omega x) \quad \text{ou} \quad x \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\Omega x) \quad \text{ou} \quad x \longmapsto \sin(\Omega x) \quad \text{ou} \quad x \longmapsto \sin(\Omega x).$$

$$(\alpha\,;\Omega) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}.$$

Quitte à user du théorème (1) de superposition, tous nos exemples se ramèneront à un des ces cas.

Théorème 8 (Second membre exponentiel) : Soient $\mathrm{A}, \alpha \in \mathbb{C}$. On considère l'équation

$$ay'' + by' + cy = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{\alpha x}, \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{K} \text{ et } a \neq 0. \tag{EDL$_2$}$$

L'équation (EDL_2) admet au moins une solution particulière sous la forme :

$$x \longmapsto \mathrm{B}\,x^m\,\mathrm{e}^{\alpha x}, \quad \text{où } \mathrm{B} \in \mathbb{C} \text{ et}$$

- $m = 0$ si α n'est PAS racine du polynôme caractéristique.
- $m = 1$ si α est racine SIMPLE du polynôme caractéristique.
- $m = 2$ si α est racine DOUBLE du polynôme caractéristique.

Exemple 14 : On veut trouver les solutions générales de l'équation

$$y'' - y = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}.$$

Équation homogène : Les solutions de l'équation $y'' - y = 0$ sont toutes les fonctions

$$x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{x} + \mu\,\mathrm{e}^{-x}, \qquad (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2$$

car les racines du polynôme $\mathrm{X}^2 - 1$ sont -1 et 1.

Solution particulière de l'équation $y'' - y = \mathrm{e}^{2x}$: Comme 2 n'est pas racine de $\mathrm{X}^2 - 1$, cherchons-en une sous la forme

$$x \longmapsto \mathrm{B}\,\mathrm{e}^{2x}, \qquad \mathrm{B} \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} x \longmapsto \mathrm{B}\,\mathrm{e}^{2x} \text{ est solution de } y'' - y = \mathrm{e}^{2x} &\iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ 4\mathrm{B}\,\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{B}\,\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x} \\ &\iff \mathrm{B} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Solution particulière de l'équation $y'' - y = \mathrm{e}^{x}$: Comme 1 est racine simple de $\mathrm{X}^2 - 1$, cherchons-en une sous la forme

$$x \longmapsto \mathrm{B}x\,\mathrm{e}^{x}, \qquad \mathrm{B} \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} x \longmapsto \mathrm{B}x\,\mathrm{e}^{x} \text{ est solution de } y'' - y = \mathrm{e}^{x} &\iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ (\mathrm{B}x\,\mathrm{e}^{x} + 2\mathrm{B}\,\mathrm{e}^{x}) - \mathrm{B}x\,\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x} \\ &\iff \mathrm{B} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion : Les solutions de l'équation complète $y'' - y = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}$ sont finalement toutes les fonctions

$$x \longmapsto \left(\lambda - \frac{x}{2}\right) \mathrm{e}^{x} + \mu\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{2x}, \qquad (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 9 : Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' + y = \mathrm{e}^{x}\cos(x)$.

Correction :

1. L'équation caractéristique est $r^2 + r + 1 = 0$ dont les solutions complexes sont $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{j}$.
2. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$x \longmapsto \left(\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}.$$

3. Pour trouver une solution particulière de l'équation générale, commençons par remarquer que

$$y'' + y' + y = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\right).$$

Cherchons alors plutôt une solution particulière (complexe) de l'équation

$$y'' + y' + y = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}.$$

On la cherche sous la forme $y_p(x) = a\,\mathrm{e}^{(1+i)x}$, où $a \in \mathbb{C}$.

On a donc $y_p'(x) = a(1+\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$ et $y_p''(x) = a(1+\mathrm{i})^2\,\mathrm{e}^{(1+i)x} = 2\,\mathrm{i}\,a\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$.

En factorisant par $\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$,

$$y_p \text{ est solution si, et seulement si } a(2+3\,\mathrm{i}) = 1 \iff a = \frac{2-3\,\mathrm{i}}{13}.$$

On a donc $y_p(x) = \dfrac{2-3\,\mathrm{i}}{13}\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} = \left(\dfrac{2\cos(x)+3\sin(x)}{13}\right)\mathrm{e}^{x} + \mathrm{i}\ \ldots.$

La solution générale est donc :

$$x \longmapsto \left(\frac{2\cos(x)+3\sin(x)}{13}\right)\mathrm{e}^{x} + \left(\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}.$$

Corollaire 8.1 (Second membre trigonométrique) : Soient $\mathrm{A} \in \mathbb{K}, \Omega \in \mathbb{R}$. Pour $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, on considère l'équation

$$ay'' + by' + cy = \mathrm{A}\cos(\Omega x) \quad \text{ou} \quad ay'' + by' + cy = \mathrm{A}\sin(\Omega x). \qquad (\mathrm{EDL}_2)$$

L'équation (EDL_2) admet au moins une solution particulière sous la forme :

$$x \longmapsto x^m\left(\mathrm{B}\cos(\Omega x) + \mathrm{C}\sin(\Omega x)\right), \qquad \text{où } \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathbb{K} \text{ et}$$

- $m = 0$ si Ω n'est PAS racine du polynôme caractéristique.
- $m = 1$ si Ω est racine SIMPLE du polynôme caractéristique.

Exercice 10 : Déterminer les solutions de $y'' - 4y' + 13y = 8\cos(x) + 16\sin(x)$.

Correction :

– **Solution homogène :** $(\mathrm{E}_0) : y'' - 4y' + 13y = 0$.

$(\mathrm{E}_c) : r^2 - 4r + 13 = 0$ a deux solutions $2 \pm 3i$.

Les solutions réelles de (E_0) sont les

$$x \longmapsto e^{2x} \left(k_1 \cos 3x + k_2 \sin 3x\right) \text{ avec } (k_1\,;k_2) \in \mathbb{R}^2$$

– **Recherche de solution particulière :**

$x \longmapsto \dfrac{e^{ix}}{3-i}$ est solution de $(\mathrm{E}') : y'' - 4y' + 13y = 4e^{ix}$

Donc $\begin{cases} x \longmapsto \dfrac{3\cos(x) - \sin(x)}{10} \text{ est solution de } (\mathrm{E}_1) : y'' - 4y' + 13y = 4\cos(x) \\ x \longmapsto \dfrac{\cos(x) + 3\sin(x)}{10} \text{ est solution de } (\mathrm{E}_2) : y'' - 4y' + 13y = 4\sin(x) \end{cases}$

D'après le principe de superposition des solutions :

$x \longmapsto 2 \times \dfrac{3\cos(x) - \sin(x)}{10} + 4 \times \dfrac{\cos(x) + 3\sin(x)}{10}$ est solution de (E)

$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \longmapsto e^{2x}\left(k_1 \cos 3x + k_2 \sin 3x\right) + \cos(x) + \sin(x),\ (k_1\,;k_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Même si nous n'irons guère plus loin, ce théorème se généralise aisément à des seconds membres un poil plus compliqués :

Corollaire 8.2 (Second membre exponentiel-polynôme) : Soient $\mathrm{A}, \alpha \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ un polynôme à coefficients complexes.

On considère l'équation

$$ay'' + by' + cy = \mathrm{A}\,\mathrm{P}(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}, \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{K} \text{ et } a \neq 0. \qquad (\mathrm{EDL}_2)$$

L'équation (EDL_2) admet au moins une solution particulière sous la forme :

$$x \longmapsto \mathrm{B}\,x^m\,\mathrm{Q}(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x},$$

où $\mathrm{B} \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ est un polynôme de degré $\deg \mathrm{Q} = \deg \mathrm{P}$ et

- $m = 0$ si α n'est PAS racine du polynôme caractéristique.
- $m = 1$ si α est racine SIMPLE du polynôme caractéristique.
- $m = 2$ si α est racine DOUBLE du polynôme caractéristique.

Par superposition, le corollaire (8.2) permet d'envisager les équations (EDL_2) avec des seconds membres de la forme :

— $f(x) = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{\alpha x}$.
— $f(x) = \mathrm{A}x^n$ et par superposition $f \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$.
— $f(x) = \mathrm{B}\cos(\Omega x)$ et plus généralement $f(x) = \mathrm{B}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\Omega x)$, B, α, $\Omega \in \mathbb{R}$.
— $f(x) = \mathrm{B}\sin(\Omega x)$ et plus généralement $f(x) = \mathrm{B}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\Omega x)$, B, α, $\Omega \in \mathbb{R}$.
— Par superposition, le cas où f est une somme de fonctions sinusoïdales de même pulsation, cette même somme produit par une exponentielle complexe, ...

Exercice 11 : Déterminer les solutions réelles de $y'' - 3y' + 2y = x\,\mathrm{e}^{2x}$.

Correction :

1 L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 1 et 2.

2. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $x \longmapsto \lambda\, e^{2x} + \mu\, e^{x}$.
3. On cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = x(ax+b)\, e^{2x}$ et on trouve $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -1$.

   Une solution particulière est donc $x \longmapsto \left(\dfrac{1}{2}x^2 - x\right) e^{2x}$.

La solution générale est donc :

$$x \longmapsto \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) e^{2x} + \lambda\, e^{2x} + \mu\, e^{x}.$$

III.3 Problème de Cauchy associé à une EDL_2

Définition 6 (Problème de Cauchy d'une EDL_2) : Soient $a, b, c, y_0, y_1 \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, $f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$ et $x_0 \in \mathrm{I}$.

On appelle *problème de Cauchy* associé à l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre tout système de la forme :

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(x) & (\mathrm{EDL}_2) \\ y'(x_0) = y_1 \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \qquad (\mathrm{C.L}_2)$$

La condition $\begin{cases} y'(x_0) = y_1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ est encore appelée sa *condition initiale*.

Comme pour les (EDL_1), on peut s'attendre à l'existence et l'unicité d'une solution dans notre cas très restreint :

Théorème 9 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les EDL_2) : Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ et $f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$.

Pour tous $x_0 \in \mathrm{I}$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$, le système $(\mathrm{C.L}_2)$ possède une unique solution sur I.

Exemple 15 : On veut résoudre le problème de Cauchy : $\begin{cases} y'' - y = e^{2x} - e^{x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$

D'après l' exemple (14) , les solutions générales sur $\mathbb{R}$ soit de la forme :

$$x \longmapsto \left(\lambda - \frac{x}{2}\right) e^{x} + \mu\, e^{-x} + \frac{1}{3}\, e^{2x}, \qquad (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

L'unique solution pour laquelle $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ est obtenue sous réserve que λ et μ satisfassent les relations $\lambda + \mu + \dfrac{1}{3} = 1$ et $\lambda - \mu + \dfrac{1}{6} = 0$, *i.e.* $(\lambda\,;\mu)$ est solution du système linéaire :

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \dfrac{1}{3} & = & 1 \\ \lambda - \mu + \dfrac{1}{6} & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda & = & \dfrac{1}{4} \\ \mu & = & \dfrac{5}{12} \end{cases}$$

L'unique solution est ainsi la fonction

$$x \longmapsto \frac{1-2x}{4}\, e^{x} + \frac{5}{12}\, e^{-x} + \frac{e^{2x}}{3}.$$

Exercice 12 : Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1
$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

2
$$\begin{cases} y'' + y = \cos^2(t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Correction :

1 On reconnait une équation homogène. La fonction nulle est clairement une solution particulière et les solutions sont les fonctions de la forme $x \longmapsto \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{x} + \mathrm{B}\,\mathrm{e}^{2x}$.

Si on impose $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$, par exemple, il existe une unique solution qui les vérifie.

Ici, on obtient le système $\begin{cases} \mathrm{A} + \mathrm{B} &= 1 \\ \mathrm{A} + 2\mathrm{B} &= 0 \end{cases}$, dont on tire $\mathrm{A} = 2$ et $\mathrm{B} = -1$.

La seule solution de ce problème de Cauchy est donc :

$$y : x \longmapsto 2\,\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{2x}.$$

La démonstration de ce théorème dans le cas général nous échappe encore et de loin mais nous pouvons toujours en démontrer une version affaiblie :

Théorème 10 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les $(\mathrm{EDL}_2)_0$) : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{I}$ et $(y_0\,;y_1) \in \mathbb{K}^2$.

Le problème de Cauchy linéaire homogène à coefficients constants

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

admet une unique solution.

Remarque : Ici encore, la seule solution de $(\mathrm{EDL}_2)_0$ telle que $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ est la fonction nulle.

Preuve : D'après le théorème (2), les solutions sont de la forme $x \longmapsto y_p(x) + y_{\mathrm{H}}(x)$ avec y_p une solution particulière et y_{H} une solution de l'équation homogène.

Considérons une des solutions données par le théorème (6). Par exemple, $y_{\mathrm{H}}(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{r_1 x} + \mu\,\mathrm{e}^{r_2 x}$ avec $r_1 \neq r_2$ (le cas $r_1 = r_2$ est identique en plus simple) :

On a alors : $y(x_0) = y_0 \iff y_0 = y_p(x_0) + \lambda\,\mathrm{e}^{r_1 x_0} + \mu\,\mathrm{e}^{r_2 x_0}$

et $y'(x_0) = y_1 \iff y_1 = y_p'(x_0) + \lambda r_1\,\mathrm{e}^{r_1 x_0} + \mu r_2\,\mathrm{e}^{r_2 x_0}$

i.e.

$$\begin{cases} y_0 - y_p(x_0) &= \lambda\,\mathrm{e}^{r_1 x_0} + \mu\,\mathrm{e}^{r_2 x_0} \\ y_1 - y_p'(x_0) &= \lambda r_1\,\mathrm{e}^{r_1 x_0} + \mu r_2\,\mathrm{e}^{r_2 x_0} \end{cases}$$

Le couple $(\lambda\,;\mu)$ est donc solution d'un système de déterminant $\mathrm{e}^{(r_1+r_2)x_0}(r_2 - r_1) \neq 0$ donc admettant une solution unique.

La solution y est donc uniquement déterminée tout comme la solution du problème de Cauchy.

Exemple 16 : Considérons $y'' - 2y' + y = 0$.
Les solutions sont de la forme $x \longmapsto (\mathrm{A} + \mathrm{B}x)\,\mathrm{e}^x$, et la seule vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ est la fonction

$$x \longmapsto \mathrm{e}^x.$$

Corollaire 10.1 (Étude qualitatives des courbes intégrales) : (Hors-Programme)
On considère des scalaires $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ et une fonction f continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$ ainsi que l'équation différentielle linéaire à coefficient constants :

$$ay'' + by' + cy = f(x). \qquad (\mathrm{EDL}_2)$$

Alors :

- Une seule courbe intégrale définie sur I passe par le point $\mathrm{M}_0(x_0, y_0) \in \mathrm{I} \times \mathbb{R}$ avec une tangente de pente donnée $y'(x_0) = y_1 \in \mathbb{K}$ en ce point.
- Deux telles courbes intégrales distinctes ne peuvent se couper dans $\mathrm{I} \times \mathbb{K}$ avec une tangente commune.

Vocabulaire : En physique, le second membre d'une équation différentielle $ay'' + by' + cy = f(t)$ est également appelé *signal d'entrée* et les solutions de l'équation définiront la réponse du système étudié.

On parle de *régime libre* si f est la fonction nulle, et de *régime forcé* sinon.

Preuve : Simple reformulation du théorème (10).

Exercice 13 : Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation $y'' - 4y' + 5y = 2e^x$ avec les conditions initiales $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 5 \end{cases}$.

Correction : $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \longmapsto e^x + e^{2x}\cos(x) + 2e^{2x}\sin(x)\}$.

Méthode 4 (Résolution d'un problème de Cauchy linéaire) :

0. Dans les conditions de validité, transformer l'équation sous une forme normalisée : $y' + a(x)y = b(x)$ ou $ay'' + by' + cy = d$.
1. Résoudre l'équation homogène : y_{H} sera de la forme
   a. $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ pour une équation du premier ordre où A est une primitive de a sur I
   b. $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{r_1 x} + \mathrm{e}^{r_2 x}$, $x \longmapsto (\lambda x + \mu)\,\mathrm{e}^{rx}$ ou $x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}(\lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x))$ pour une équation du deuxième ordre.
2. Trouver une solution particulière : y_p
   a. On cherchera toujours en premier une solution sous la forme d'un second membre particulier.

(b) Dans le cas des équations du premier ordre, si une solution particulière n'apparaît pas, on pourra utiliser la méthode de variation de la constante.

3 Donner l'allure générale des solutions : $y = y_{\mathrm{H}} + y_p$.

4 Déterminer les constantes à l'aide des conditions initiales.

Exemple 17 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime libre) : Considérons le mouvement d'une masse m suspendue à un ressort vertical de raideur K et de longueur L, et soumise à une force de frottement fluide (par exemple en plaçant l'oscillateur dans un liquide visqueux)

$$\overrightarrow{\mathrm{F}}_f = -\alpha\vec{v}.$$

Mise en équation : Si l'origine est en haut du ressort et l'axe vertical oriente vers le bas, la loi fondamentale de la dynamique donne :

$$mz'' = -\alpha z' - \mathrm{K}(z-\mathrm{L}) + mg \iff mz'' + \alpha z' + \mathrm{K}z = \mathrm{KL} + mg.$$

Cette équation équation différentielle a un second membre constant, et on vérifie que $z_0 = \mathrm{L} + \dfrac{mg}{\mathrm{K}}$ est solution constante (correspondant à l'équilibre).

En portant l'origine en z_0 *i.e.* en posant $\mathrm{Z} = z - z_0$, on obtient :

$$m\mathrm{Z}'' + \alpha\mathrm{Z}' + \mathrm{KZ} = 0 \iff \mathrm{Z}'' + 2\lambda\mathrm{Z}' + \omega^2\mathrm{Z} = 0.$$

L'équation du mouvement est donc régie par l'équation différentielle :

$$z'' + 2\lambda z' + \omega_0^2 z = 0. \qquad (\mathrm{O}scil_0)$$

Où on a noté, comme d'usage en physique :

- $2\lambda = \dfrac{\alpha}{m}$, le coefficient d'amortissement de l'oscillateur,
- $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ qui représente la pulsation propre.

Interprétation géométrique : Dans le cas d'un oscillateur harmonique amorti en régime libre, on parle de :

- **Régime apériodique** quand $\lambda > \omega_0$,
- **Régime critique** quand $\lambda = \omega_0$,
- **Régime pseudo-périodique** quand $\lambda < \omega_0$.

On retrouve des courbes semblables, respectivement, à celles des figures (XI.5), (XI.7) et (XI.6).

Par exemple, dans le dernier cas, on observe un comportement transitoire qui présente quelques oscillations périodiques avant de retrouver un état stable.

Exercice 14 : Déterminer le mouvement d'un oscillateur harmonique en régime libre donné par l'équation

$$z'' + 2z' + 5z = 0. \qquad (\lambda = 1 \text{ et } \omega_0 = \sqrt{5})$$

avec les conditions initiales $z(0) = 10$ et $z'(0) = 0$.

Exemple 18 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime forcé) :

On reprend l'équation $\mathrm{O}scil_0$ mais avec un second membre non nul :

$$z'' + 2\lambda z' + \omega_0^2 z = \mathrm{F}\cos(\omega t). \qquad (\mathrm{O}scil)$$

Solutions générales : Selon la théorie, la solution générale d'une telle équation est égale à la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation non homogène.

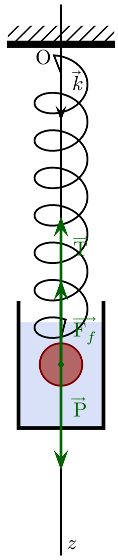

Figure XI.8 – Oscillateur harmonique en régime libre

Interprétation physique : Ceci se traduit en disant que le mouvement obtenu est la somme de l'oscillation propre, qui dépend des conditions initiales, et de l'oscillation forcée par la force extérieure ; on parle aussi de réponse à l'excitation décrite par le second membre.

Généralement, il suffit de ne considérer que cette réponse qui subsiste seule après l'extinction de l'oscillation propre due à l'amortissement.

Résolution : Pour ce faire il est commode d'utiliser les nombres complexes en considérant l'équation :

$$z'' + 2\lambda z' + \omega_0^2 z = \mathrm{F}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\omega t}.$$

La recherche d'une solution particulière sous la forme $\tilde{z_p} = \mathrm{Z}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\omega t}$ conduit à

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\,\mathrm{i}\,\lambda\omega)\mathrm{Z} = \mathrm{F} \iff \mathrm{Z} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\,\mathrm{i}\,\lambda\omega}\,\mathrm{F}.$$

Fonction de transfert : En posant $\mathrm{H}(\omega) = \dfrac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\,\mathrm{i}\,\lambda\omega}$, cette équation se réécrit :

$$\mathrm{Z} = \mathrm{H}(\omega)\mathrm{F}.$$

$\mathrm{H}(\omega)$ représente la fonction de transfert qui décrit la réponse en fonction de la pulsation.

Écrite sous sa forme exponentielle on a $\mathrm{H}(\omega) = |\mathrm{H}|e^{\,\mathrm{i}\,\varphi}$ puis $\tilde{z_p} = |\mathrm{H}(\omega)|\,\mathrm{F}\,e^{\,\mathrm{i}\,(\omega t + \varphi)}$.

Notre solution particulière s'écrit alors :

$$z_p = |\mathrm{H}(\omega)|\,\mathrm{F}\,\cos(\omega t + \varphi).$$

Interprétation : Ainsi, à une excitation sinusoïdale un système linéaire fait correspondre une réponse sinusoïdale de même pulsation.

De même, à une somme de sinusoïdes correspond une somme de sinusoïdes. Pour chacune d'entre elles le module et l'argument de la fonction de transfert représentent respectivement l'amplification et le déphasage.

Système conservatif : $\lambda = 0$.

La fonction de transfert est alors $\mathrm{H}(\omega) = \dfrac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \in \mathbb{R}$ et $|\mathrm{H}(\omega)| = \dfrac{1}{|\omega_0^2 - \omega^2|}$.

L'amplification croît avec un déphasage nul à partir de la valeur statique $\dfrac{\mathrm{F}}{\omega_0}$ jusqu'à l'infini lorsque ω atteint la valeur ω_0.

Ensuite elle décroît jusqu'à zéro avec un déphasage égal à $-\pi$, le déphasage étant défini par :

$$\begin{cases} \cos\varphi &= \displaystyle\lim_{\omega\to+\infty} (\omega_0^2 - \omega^2)|\mathrm{H}(\omega)| = -1 \\ \sin\varphi &= -\displaystyle\lim_{\omega\to+\infty} 2\lambda\omega|\mathrm{H}(\omega)| = 0 \end{cases}$$

La valeur infinie correspond à la *résonance* lorsque le système est excité à sa pulsation propre ω_0.

Dans la conception d'un système, le simple calcul de cette pulsation (ou fréquence ou période propre) peut conduire à modifier l'inertie ou la raideur d'un système pour l'éloigner des excitations attendues.

En tout état de cause, la réponse ne peut être que finie à cause de l'amortissement qui est négligé ici.

Système dissipatif : $\lambda \neq 0$.

Dans ce système plus réaliste, la fonction de transfert devient :

$$\mathrm{H}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\,\mathrm{i}\,\lambda\omega}.$$

L'amplification est :

$$|\mathrm{H}(\omega)| = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2}.$$

Il apparaît que le dénominateur de la fonction de transfert ne peut plus s'annuler : pour un amortissement faible on a une courbe de réponse voisine de celle du système non amorti mais avec un maximum fini.

En annulant la dérivée de $|\mathrm{H}(\omega)|$ par rapport à ω^2, on obtient la pulsation qui donne ce maximum :

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\lambda^2.$$

À mesure que le coefficient d'amortissement λ augmente, l'abscisse du maximum diminue jusqu'à 0 où la fonction $|\mathrm{H}(\omega)|$ de ω devient décroissante, ce qui se produit pour l'amortissement critique :

$$\omega_0^2 - 2\lambda_{crit}^2 = 0 \iff \lambda_{crit} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}.$$

Le déphasage est, ici, défini par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \cos\varphi & = & (\omega_0^2 - \omega^2)|\mathrm{H}(\omega)| \\ \sin\varphi & = & -2\lambda\omega|\mathrm{H}(\omega)| \end{array} \right.$$

- Pour les plus petites valeurs de la pulsation on a le régime quasi statique dominé par la raideur dans lequel la réponse est en phase avec l'excitation.
- Pour les plus grandes, on atteint le régime dominé par l'inertie dans lequel la réponse est en opposition et l'amplification est de l'ordre de $\dfrac{\mathrm{F}}{\omega^2}$.

  L'amortissement devient essentiel loin de ces deux extrêmes.

Exercice 15 : Déterminer le mouvement d'un oscillateur harmonique en régime forcé donné par l'équation

$$z'' + 2z' + 5z = 5\cos(t). \qquad (\lambda = 1 \text{ et } \omega_0 = \sqrt{5})$$

avec les conditions initiales $z(0) = 10$ et $z'(0) = 0$.

On déterminera également le comportement asymptotique correspondant physiquement à l'état stable.

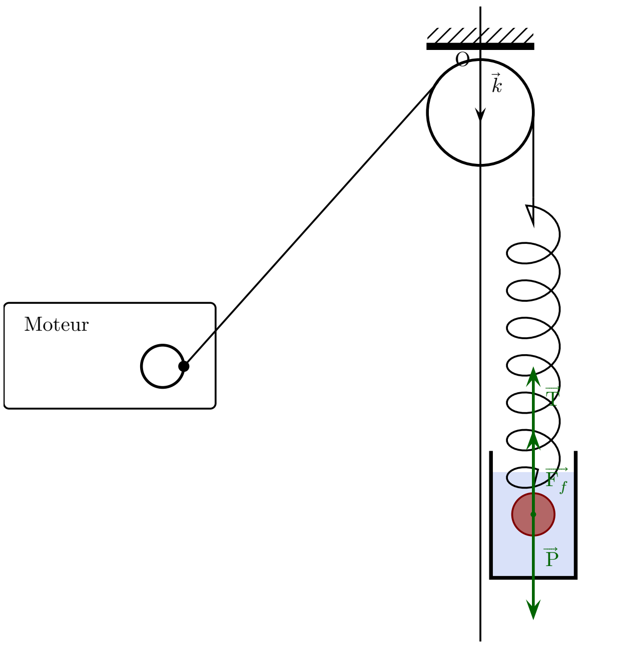

Figure XI.9 – Oscillateur harmonique en régime forcé

Index