Équations différentielles (linéaires)

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 11

Sommaire I

1. Équations et opérateurs linéaires
   - Linéarité et conséquences
   - Équations différentielles linéaires

2. Équations différentielles linéaires d'ordre 1
   - Solutions de l'équation homogène
   - Solution particulière
   - Problème de Cauchy associé à une EDL_1
   - Résolution des EDL_1 à coefficients constants

3. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants
   - Solutions de l'équation homogène
   - Solution générale
   - Problème de Cauchy associé à une EDL_2

La moindre modélisation d'un phénomène en physique amène souvent à la résolution d'une équation différentielle voire aux dérivées partielles dont la solution cherchée sera la trajectoire, la température, la tension, ... du système considérée. Les fonctions considérées dépendent généralement des trois dimensions spatiales x, y, z et du temps t.

Un opérateur $\mathrm{F} : \mathbb{R}^{n+1} \longmapsto \mathbb{R}^{4 \text{ ou plus}}$ et une fonction f excitatrice donnés, une équation différentielle prend la forme générale :

$$y^{(n)} = \mathrm{F}(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y', y, f).$$

Les équations aux dérivées partielles ont une forme analogue.

On est loin de savoir résoudre *i.e.* trouver les courbes intégrales, toutes les équations différentielles existantes sous forme exacte ou même approchée.

L'exemple le plus connu est la résolution des équations de Navier-Stokes qui vous apportera un million de dollar et la gloire éternelle tant ses applications sont nombreuses et le problème difficile :

$$\underbrace{\rho}_{m} \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v.\nabla v\right)}_{a} = \underbrace{-\nabla p}_{\mathrm{F}_{pression}} + \underbrace{\mu\nabla^2 v}_{\mathrm{F}_{visqueuse}} .$$

Les équations différentielles sont en général très difficiles à résoudre, aussi nous contenterons-nous de travailler dans le cadre à peu près agréable des équations de la forme :

- $y' + a(x)y = b(x)$ (équations différentielles linéaires du premier ordre),

Dans ces cas là, les méthodes sont clairement définies et leur application quasi mécanique.

Les équations différentielles sont en général très difficiles à résoudre, aussi nous contenterons-nous de travailler dans le cadre à peu près agréable des équations de la forme :

- $y' + a(x)y = b(x)$ (équations différentielles linéaires du premier ordre),
- $ay'' + by' + cy = d(x)$ (équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.)

Dans ces cas là, les méthodes sont clairement définies et leur application quasi mécanique.

Remarques liminaires :

1. Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Nous nous intéresserons parfois aux solutions réelles d'une équation différentielle et parfois à ses solutions complexes. Les solutions réelles sont bien sûr aussi complexes, mais quand on connaît toutes les solutions complexes et qu'on cherche les réelles, il reste du travail : la connaissance des solutions complexes ne suffit pas.
   Pour cette raison, nous travaillerons avec des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ désigne l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ suivant la situation.

Remarques liminaires :

1. Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Nous nous intéresserons parfois aux solutions réelles d'une équation différentielle et parfois à ses solutions complexes. Les solutions réelles sont bien sûr aussi complexes, mais quand on connaît toutes les solutions complexes et qu'on cherche les réelles, il reste du travail : la connaissance des solutions complexes ne suffit pas.
   Pour cette raison, nous travaillerons avec des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ désigne l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ suivant la situation.
2. L'ensemble E considéré au cours de la première section sera supposé stable par combinaisons linéaires *i.e.*

$$\forall\, x, y \in \mathrm{E},\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda x + y \in \mathrm{E}.$$

   Nous reviendrons sur ce point au deuxième semestre mais comprenez pour l'instant, que la structure de E permet de considérer toutes les sommes d'éléments de E ainsi que les éléments multipliés par une constante $\lambda \in \mathbb{K}$ sans que l'on ne s'échappe de E.

I. Équations et opérateurs linéaires

1. Équations et opérateurs linéaires
   - Linéarité et conséquences
   - Équations différentielles linéaires
2. Équations différentielles linéaires d'ordre 1
3. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Le concept de linéarité, que vous avez déjà rencontré dans différents contextes, nous occupera longuement au second semestre et une présentation très informelle sera pour l'instant suffisante.

Définition 1 :

Soient E et F deux ensembles.

Un opérateur $\mathrm{T} : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ est dit **linéaire** si :

$$\forall\, x, y \in \mathrm{E},\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \mathrm{T}(\lambda x +_{\mathrm{E}} y) = \lambda \mathrm{T}(x) +_{\mathrm{F}} \mathrm{T}(y).$$

Le concept de linéarité, que vous avez déjà rencontré dans différents contextes, nous occupera longuement au second semestre et une présentation très informelle sera pour l'instant suffisante.

Définition 1 :

Soient E et F deux ensembles.

Un opérateur $\mathrm{T} : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ est dit **linéaire** si :

$$\forall\, x, y \in \mathrm{E},\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \ \mathrm{T}(\lambda x +_{\mathrm{E}} y) = \lambda \mathrm{T}(x) +_{\mathrm{F}} \mathrm{T}(y).$$

En particulier, si E est non vide alors

$$\forall\, x \in \mathrm{E},\ \mathrm{T}(x - x) = \mathrm{T}(x) - \mathrm{T}(x) \implies \boxed{\mathrm{T}(0_{\mathrm{E}}) = 0_{\mathrm{F}}.}$$

I. Équations et opérateurs linéaires

1. Linéarité et conséquences

Exemples 1 (Exemples d'opérateurs linéaires) :

E	T	$\mathrm{T}(\lambda x + y) = \lambda \mathrm{T}(x) + \mathrm{T}(y)$
$\mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	$f \longmapsto f'$	$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$

Exemples 1 (Exemples d'opérateurs linéaires) :

E	T	$T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y)$
$\mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	$f \longmapsto f'$	$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$
$\mathcal{C}^0(x_0)$	$f \longmapsto \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} (\lambda f(x) + g(x)) = \lambda \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

Exemples 1 (Exemples d'opérateurs linéaires) :

E	T	$\mathrm{T}(\lambda x + y) = \lambda \mathrm{T}(x) + \mathrm{T}(y)$
$\mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	$f \longmapsto f'$	$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$
$\mathcal{C}^0(x_0)$	$f \longmapsto \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} (\lambda f(x) + g(x)) = \lambda \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
$\mathbb{R}^2$	$(x\,;y) \longmapsto ax + by,\ a, b \in \mathbb{R}$	$a(\lambda x + x') + b(\lambda y + y') = \lambda(ax + by) + (ax' + by')$

Exemples 1 (Exemples d'opérateurs linéaires) :

E	T	$\mathrm{T}(\lambda x + y) = \lambda \mathrm{T}(x) + \mathrm{T}(y)$
$\mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	$f \longmapsto f'$	$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$
$\mathcal{C}^0(x_0)$	$f \longmapsto \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} (\lambda f(x) + g(x)) = \lambda \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
$\mathbb{R}^2$	$(x\,;y) \longmapsto ax + by,\ a, b \in \mathbb{R}$	$a(\lambda x + x') + b(\lambda y + y') = \lambda(ax + by) + (ax' + by')$
$\mathcal{C}^0([a\,;b]\,, \mathbb{R})$	$f \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$	$\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

Exemples I (Exemples d'opérateurs linéaires) :

E	T	$\mathrm{T}(\lambda x+y)=\lambda\mathrm{T}(x)+\mathrm{T}(y)$
$\mathcal{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$	$f\longmapsto f'$	$(\lambda f+g)'=\lambda f'+g'$
$\mathcal{C}^0(x_0)$	$f\longmapsto \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}(\lambda f(x)+g(x))=\lambda \lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
$\mathbb{R}^2$	$(x\,;y)\longmapsto ax+by,\ a,b\in\mathbb{R}$	$a(\lambda x+x')+b(\lambda y+y')=\lambda(ax+by)+(ax'+by')$
$\mathcal{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$	$f\longmapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$	$\int_a^b(\lambda f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t=\lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
$\left\{\begin{array}{c}\text{Suites}\\ \text{convergentes}\end{array}\right\}$	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\longmapsto \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda u_n+v_n)=\lambda\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Exemples I (Exemples d'opérateurs linéaires) :

E	T	$\mathrm{T}(\lambda x+y)=\lambda\mathrm{T}(x)+\mathrm{T}(y)$
$\mathcal{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$	$f \longmapsto f'$	$(\lambda f+g)'=\lambda f'+g'$
$\mathcal{C}^0(x_0)$	$f \longmapsto \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}(\lambda f(x)+g(x))=\lambda\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
$\mathbb{R}^2$	$(x\,;y)\longmapsto ax+by,\ a,b\in\mathbb{R}$	$a(\lambda x+x')+b(\lambda y+y')=\lambda(ax+by)+(ax'+by')$
$\mathcal{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$	$f\longmapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$	$\int_a^b(\lambda f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t=\lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
$\left\{\begin{array}{c}\text{Suites}\\\text{convergentes}\end{array}\right\}$	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\longmapsto \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda u_n+v_n)=\lambda\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$
$\overrightarrow{\mathcal{P}}$ ou $\vec{\mathcal{E}}$	$\vec{x}\longmapsto\vec{a}\cdot\vec{x}$	$\vec{a}\cdot(\lambda\vec{x}+\vec{y})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{x})+(\vec{a}\cdot\vec{y})$

Exemples 1 (Exemples d'opérateurs linéaires) :

E	T	$\mathrm{T}(\lambda x + y) = \lambda \mathrm{T}(x) + \mathrm{T}(y)$
$\mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	$f \longmapsto f'$	$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$
$\mathcal{C}^0(x_0)$	$f \longmapsto \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} (\lambda f(x) + g(x)) = \lambda \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
$\mathbb{R}^2$	$(x\,;y) \longmapsto ax + by,\ a, b \in \mathbb{R}$	$a(\lambda x + x') + b(\lambda y + y') = \lambda(ax + by) + (ax' + by')$
$\mathcal{C}^0([a\,;b]\,, \mathbb{R})$	$f \longmapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$	$\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
$\left\{ \begin{array}{c} \text{Suites} \\ \text{convergentes} \end{array} \right\}$	$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$	$\lim\limits_{n \to +\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \lim\limits_{n \to +\infty} u_n + \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$
$\vec{\mathcal{P}}$ ou $\vec{\mathcal{E}}$	$\vec{x} \longmapsto \vec{a} \cdot \vec{x}$	$\vec{a} \cdot (\lambda \vec{x} + \vec{y}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{x}) + (\vec{a} \cdot \vec{y})$
$\mathcal{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$	$f \longmapsto f' + af,\ a \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$	$(\lambda f + g)' + a(\lambda f + g) = \lambda\,(f' + af) + (g' + ag)$

Exemples 1 (Exemples d'opérateurs linéaires) :

E	T	$\mathrm{T}(\lambda x + y) = \lambda \mathrm{T}(x) + \mathrm{T}(y)$
$\mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	$f \longmapsto f'$	$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$
$\mathcal{C}^0(x_0)$	$f \longmapsto \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} (\lambda f(x) + g(x)) = \lambda \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
$\mathbb{R}^2$	$(x\,;y) \longmapsto ax + by,\ a, b \in \mathbb{R}$	$a(\lambda x + x') + b(\lambda y + y') = \lambda(ax + by) + (ax' + by')$
$\mathcal{C}^0([a\,;b]\,, \mathbb{R})$	$f \longmapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$	$\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
$\left\{ \begin{array}{c}\text{Suites} \\ \text{convergentes}\end{array} \right\}$	$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$	$\lim\limits_{n \to +\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \lim\limits_{n \to +\infty} u_n + \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$
$\overrightarrow{\mathcal{P}}$ ou $\vec{\mathcal{E}}$	$\vec{x} \longmapsto \vec{a} \cdot \vec{x}$	$\vec{a} \cdot (\lambda \vec{x} + \vec{y}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{x}) + (\vec{a} \cdot \vec{y})$
$\mathcal{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$	$f \longmapsto f' + af,\ a \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$	$(\lambda f + g)' + a(\lambda f + g) = \lambda\,(f' + af) + (g' + ag)$
$\mathcal{C}^2(\mathrm{I}, \mathbb{R})$	$f \longmapsto f'' + af' + bf,\ a, b \in \mathbb{R}$	$(\lambda f + g)'' + a(\lambda f + g) + b(\lambda f + g) =$ $\lambda\,(f'' + af' + bf) + (g'' + ag' + bg)\,.$

Définition 2 :

Soit $\mathrm{T} : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ un opérateur linéaire.

- On appelle **équation linéaire** toute équation de la forme :

$$\mathrm{T}(y) = b, \quad \text{où } b \in \mathrm{F}. \qquad (\mathcal{E})$$

Définition 2 :

Soit $\mathrm{T} : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ un opérateur linéaire.

- On appelle **équation linéaire** toute équation de la forme :

$$\mathrm{T}(y) = b, \quad \text{où } b \in \mathrm{F}. \qquad (\mathcal{E})$$

  - $y \in \mathrm{E}$ est l'inconnue cherchée.

Définition 2 :

Soit $\mathrm{T} : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ un opérateur linéaire.

- On appelle **équation linéaire** toute équation de la forme :

$$\mathrm{T}(y) = b, \quad \text{où } b \in \mathrm{F}. \tag{$\mathcal{E}$}$$

  - $y \in \mathrm{E}$ est l'inconnue cherchée.
  - b en est appelé le **second membre**.

Définition 2 :

Soit $\mathrm{T} : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ un opérateur linéaire.

- On appelle **équation linéaire** toute équation de la forme :

$$\mathrm{T}(y) = b, \quad \text{où } b \in \mathrm{F}. \qquad (\mathcal{E})$$

  - $y \in \mathrm{E}$ est l'inconnue cherchée.
  - b en est appelé le **second membre**.
  - On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ et tout élément de $\mathcal{S}$ s'appelle une **solution particulière** et est notée en général y_p.

Définition 2 :

Soit $\mathrm{T}: \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ un opérateur linéaire.

- On appelle équation linéaire toute équation de la forme :

$$\mathrm{T}(y) = b, \quad \text{où } b \in \mathrm{F}. \tag{$\mathcal{E}$}$$

  - $y \in \mathrm{E}$ est l'inconnue cherchée.
  - b en est appelé le second membre.
  - On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ et tout élément de $\mathcal{S}$ s'appelle une solution particulière et est notée en général y_p.

- On appelle équation homogène associée à $(\mathcal{E})$ ou sans second membre toute équation de la forme :

$$\mathrm{T}(y) = 0. \tag{$\mathcal{E}_0$}$$

Définition 2 :

Soit $\mathrm{T} : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ un opérateur linéaire.

- On appelle équation linéaire toute équation de la forme :

$$\mathrm{T}(y) = b, \quad \text{où } b \in \mathrm{F}. \tag{$\mathcal{E}$}$$

  - $y \in \mathrm{E}$ est l'inconnue cherchée.
  - b en est appelé le second membre.
  - On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ et tout élément de $\mathcal{S}$ s'appelle une solution particulière et est notée en général y_p.

- On appelle équation homogène associée à $(\mathcal{E})$ ou sans second membre toute équation de la forme :

$$\mathrm{T}(y) = 0. \tag{$\mathcal{E}_0$}$$

  - On note $\mathcal{S}_0$ ou $\mathcal{S}_\mathrm{H}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_0)$.

Un des premiers avantages des équations linaires est que la recherche d'une solution particulière peut se faire en plusieurs temps lorsque le second membre b se décompose en somme de fonctions plus simples :

Théorème 1 (Principe de superposition) :

Soient $\mathrm{T} : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ un opérateur linéaire et $b_1, b_2 \in \mathrm{F}$.

Si y_1 et y_2 sont respectivement solutions de $\mathrm{T}(y) = b_1$ et $\mathrm{T}(y) = b_2$ alors $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda y_1 + y_2$ est solution de $\mathrm{T}(y) = \lambda b_1 + b_2$.

Un des premiers avantages des équations linaires est que la recherche d'une solution particulière peut se faire en plusieurs temps lorsque le second membre b se décompose en somme de fonctions plus simples :

Théorème I (Principe de superposition) :

Soient $\mathrm{T} : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ un opérateur linéaire et $b_1, b_2 \in \mathrm{F}$.

Si y_1 et y_2 sont respectivement solutions de $\mathrm{T}(y) = b_1$ et $\mathrm{T}(y) = b_2$ alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda y_1 + y_2$ est solution de $\mathrm{T}(y) = \lambda b_1 + b_2$.

Preuve :

Il suffit simplement d'utiliser la linéarité de T et d'écrire :

$$\mathrm{T}(\lambda y_1 + y_2) \underset{\substack{\text{linéarité} \\ \text{de T}}}{=} \lambda \mathrm{T}(y_1) + \mathrm{T}(y_2)$$

Un des premiers avantages des équations linaires est que la recherche d'une solution particulière peut se faire en plusieurs temps lorsque le second membre b se décompose en somme de fonctions plus simples :

Théorème 1 (Principe de superposition) :

Soient $\mathrm{T} : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ un opérateur linéaire et $b_1, b_2 \in \mathrm{F}$.

Si y_1 et y_2 sont respectivement solutions de $\mathrm{T}(y) = b_1$ et $\mathrm{T}(y) = b_2$ alors $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda y_1 + y_2$ est solution de $\mathrm{T}(y) = \lambda b_1 + b_2$.

Preuve :

Il suffit simplement d'utiliser la linéarité de T *et d'écrire :*

$$\mathrm{T}(\lambda y_1 + y_2) \underset{\substack{\text{linéarité} \\ \text{de } \mathrm{T}}}{=} \lambda \mathrm{T}(y_1) + \mathrm{T}(y_2) \underset{\substack{\text{définition de} \\ y_1 \text{ et } y_2}}{=} \lambda b_1 + b_2.$$

Un des premiers avantages des équations linaires est que la recherche d'une solution particulière peut se faire en plusieurs temps lorsque le second membre b se décompose en somme de fonctions plus simples :

Théorème 1 (Principe de superposition) :

Soient $\mathrm{T} : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ un opérateur linéaire et $b_1, b_2 \in \mathrm{F}$.

Si y_1 et y_2 sont respectivement solutions de $\mathrm{T}(y) = b_1$ et $\mathrm{T}(y) = b_2$ alors $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda y_1 + y_2$ est solution de $\mathrm{T}(y) = \lambda b_1 + b_2$.

Preuve :

Il suffit simplement d'utiliser la linéarité de T et d'écrire :

$$\mathrm{T}(\lambda y_1 + y_2) \underset{\substack{\text{linéarité} \\ \text{de } \mathrm{T}}}{=} \lambda \mathrm{T}(y_1) + \mathrm{T}(y_2) \underset{\substack{\text{définition de} \\ y_1 \text{ et } y_2}}{=} \lambda b_1 + b_2.$$

D'où le résultat.

L'intérêt des équations linéaires ne s'arrête pas là et s'étend à la structure de l'ensemble de ses solutions :

Théorème 2 (Structure de l'ensemble des solutions) :

1. L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de $(\mathcal{E}_0)$ est non vide et stable par combinaisons linéaires.

Théorème 2 (Structure de l'ensemble des solutions) :

1. L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de $(\mathcal{E}_0)$ est non vide et stable par combinaisons linéaires.

Preuve :

1. On sait déjà que $\mathrm{T}(0) = 0$ donc $0 \in \mathcal{S}_0$ qui est toujours non vide.

Théorème 2 (Structure de l'ensemble des solutions) :

1. L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de $(\mathcal{E}_0)$ est non vide et stable par combinaisons linéaires.

Preuve :

1. On sait déjà que $\mathrm{T}(0) = 0$ donc $0 \in \mathcal{S}_0$ qui est toujours non vide.

   La stabilité par combinaisons linéaires est encore une conséquence de la linéarité :

   Soient $\lambda \in \mathrm{K}$ et $y_{0,1}, y_{0,2}$ deux éléments de $\mathcal{S}_0$.

Théorème 2 (Structure de l'ensemble des solutions) :

1. L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de $(\mathcal{E}_0)$ est non vide et stable par combinaisons linéaires.

Preuve :

1. On sait déjà que $\mathrm{T}(0) = 0$ donc $0 \in \mathcal{S}_0$ qui est toujours non vide.

   La stabilité par combinaisons linéaires est encore une conséquence de la linéarité :

   Soient $\lambda \in \mathrm{K}$ et $y_{0,1}, y_{0,2}$ deux éléments de $\mathcal{S}_0$.

   Alors, $\mathrm{T}(\lambda y_{0,1} + y_{0,2}) =$.

Théorème 2 (Structure de l'ensemble des solutions) :

1. L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de $(\mathcal{E}_0)$ est non vide et stable par combinaisons linéaires.

Preuve :

1. On sait déjà que $\mathrm{T}(0) = 0$ donc $0 \in \mathcal{S}_0$ qui est toujours non vide.

   La stabilité par combinaisons linéaires est encore une conséquence de la linéarité :

   Soient $\lambda \in \mathrm{K}$ et $y_{0,1}, y_{0,2}$ deux éléments de $\mathcal{S}_0$.

   Alors, $\mathrm{T}(\lambda y_{0,1} + y_{0,2}) = \lambda \mathrm{T}(y_{0,1}) + \mathrm{T}(y_{0,2}) = 0$.

Théorème 2 (Structure de l'ensemble des solutions) :

1. L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de $(\mathcal{E}_0)$ est non vide et stable par combinaisons linéaires.
   On dit que $\mathcal{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve :

1. On sait déjà que $\mathrm{T}(0) = 0$ donc $0 \in \mathcal{S}_0$ qui est toujours non vide.
   La stabilité par combinaisons linéaires est encore une conséquence de la linéarité :
   Soient $\lambda \in \mathrm{K}$ et $y_{0,1}, y_{0,2}$ deux éléments de $\mathcal{S}_0$.
   Alors, $\mathrm{T}(\lambda y_{0,1} + y_{0,2}) = \lambda \mathrm{T}(y_{0,1}) + \mathrm{T}(y_{0,2}) = 0$.
   Donc, $\lambda y_{0,1} + y_{0,2} \in \mathcal{S}_0$ et le résultat cherché.

Théorème 2 (Structure de l'ensemble des solutions) :

2. Si $\mathcal{S}$ n'est pas vide alors toute solution de $(\mathcal{E})$ est la somme d'une solution particulière y_p et d'une solution de $(\mathcal{E}_0)$:

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0 \quad i.e. \quad \forall\, y \in \mathcal{S}, \exists\, y_0 \in \mathcal{S}_0 \,/\, y = y_p + y_0.$$

Théorème 2 (Structure de l'ensemble des solutions) :

2. Si $\mathcal{S}$ n'est pas vide alors toute solution de $(\mathcal{E})$ est la somme d'une solution particulière y_p et d'une solution de $(\mathcal{E}_0)$:

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0 \quad i.e. \quad \forall\, y \in \mathcal{S},\ \exists\, y_0 \in \mathcal{S}_0 \,/\, y = y_p + y_0.$$

Preuve :

1. Comme $\mathcal{S} \neq \varnothing$ on peut considérer y_p un de ses éléments i.e. $\mathrm{T}(y_p) = b$.

Théorème 2 (Structure de l'ensemble des solutions) :

2. Si $\mathcal{S}$ n'est pas vide alors toute solution de $(\mathcal{E})$ est la somme d'une solution particulière y_p et d'une solution de $(\mathcal{E}_0)$:

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0 \quad i.e. \quad \forall\, y \in \mathcal{S},\, \exists\, y_0 \in \mathcal{S}_0 \,/\, y = y_p + y_0.$$

Preuve :

1. Comme $\mathcal{S} \neq \varnothing$ on peut considérer y_p un de ses éléments i.e. $\mathrm{T}(y_p) = b$.

   On a alors :

$$y \in \mathcal{S} \iff \mathrm{T}(y) = b$$

Théorème 2 (Structure de l'ensemble des solutions) :

2. Si $\mathcal{S}$ n'est pas vide alors toute solution de $(\mathcal{E})$ est la somme d'une solution particulière y_p et d'une solution de $(\mathcal{E}_0)$:

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0 \quad i.e. \quad \forall\, y \in \mathcal{S}, \exists\, y_0 \in \mathcal{S}_0 \,/\, y = y_p + y_0.$$

Preuve :

1. Comme $\mathcal{S} \neq \varnothing$ on peut considérer y_p un de ses éléments i.e. $\mathrm{T}(y_p) = b$.

   On a alors :

$$y \in \mathcal{S} \iff \mathrm{T}(y) = b \iff \mathrm{T}(y) = \mathrm{T}\left(y_p\right)$$

Théorème 2 (Structure de l'ensemble des solutions) :

2. Si $\mathcal{S}$ n'est pas vide alors toute solution de $(\mathcal{E})$ est la somme d'une solution particulière y_p et d'une solution de $(\mathcal{E}_0)$:

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0 \quad i.e. \quad \forall\, y \in \mathcal{S},\, \exists\, y_0 \in \mathcal{S}_0 \,/\, y = y_p + y_0.$$

Preuve :

1. Comme $\mathcal{S} \neq \varnothing$ on peut considérer y_p un de ses éléments i.e. $\mathrm{T}(y_p) = b$.

On a alors :

$$y \in \mathcal{S} \iff \mathrm{T}(y) = b \iff \mathrm{T}(y) = \mathrm{T}\left(y_p\right) \iff \mathrm{T}(y) - \mathrm{T}\left(y_p\right) = 0 \underset{\text{Linéarité}}{\iff} \mathrm{T}\left(y - y_p\right) = 0$$

Théorème 2 (Structure de l'ensemble des solutions) :

2. Si $\mathcal{S}$ n'est pas vide alors toute solution de $(\mathcal{E})$ est la somme d'une solution particulière y_p et d'une solution de $(\mathcal{E}_0)$:

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0 \quad i.e. \quad \forall\, y \in \mathcal{S}, \exists\, y_0 \in \mathcal{S}_0 \,/\, y = y_p + y_0.$$

Preuve :

1. On a alors :

$$y \in \mathcal{S} \iff \mathrm{T}(y) = b \iff \mathrm{T}(y) = \mathrm{T}\left(y_p\right) \iff \mathrm{T}(y) - \mathrm{T}\left(y_p\right) = 0 \underset{\text{Linéarité}}{\iff} \mathrm{T}\left(y - y_p\right) = 0$$

$$\iff y - y_p \text{ est solution de l'équation homogène associée}$$

Théorème 2 (Structure de l'ensemble des solutions) :

2. Si $\mathcal{S}$ n'est pas vide alors toute solution de $(\mathcal{E})$ est la somme d'une solution particulière y_p et d'une solution de $(\mathcal{E}_0)$:

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0 \quad i.e. \quad \forall\, y \in \mathcal{S}, \exists\, y_0 \in \mathcal{S}_0 \,/\, y = y_p + y_0.$$

Preuve :

1.

$$y \in \mathcal{S} \iff \mathrm{T}(y) = b \iff \mathrm{T}(y) = \mathrm{T}\left(y_p\right) \iff \mathrm{T}(y) - \mathrm{T}\left(y_p\right) = 0 \underset{\text{Linéarité}}{\iff} \mathrm{T}\left(y - y_p\right) = 0$$

$$\iff y - y_p \text{ est solution de l'équation homogène associée}$$

$$\iff y - y_p \in \mathcal{S}_0$$

Théorème 2 (Structure de l'ensemble des solutions) :

2. Si $\mathcal{S}$ n'est pas vide alors toute solution de $(\mathcal{E})$ est la somme d'une solution particulière y_p et d'une solution de $(\mathcal{E}_0)$:

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0 \quad i.e. \quad \forall\, y \in \mathcal{S}, \exists\, y_0 \in \mathcal{S}_0 \,/\, y = y_p + y_0.$$

Preuve :

1.

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{S} &\iff \mathrm{T}(y) = b \\ &\iff y - y_p \text{ est solution de l'équation homogène associée} \\ &\iff y - y_p \in \mathcal{S}_0 \\ &\iff \exists\, y_0 \in \mathcal{S}_0,\ y - y_p = y_0 \end{aligned}$$

Théorème 2 (Structure de l'ensemble des solutions) :

2. Si $\mathcal{S}$ n'est pas vide alors toute solution de $(\mathcal{E})$ est la somme d'une solution particulière y_p et d'une solution de $(\mathcal{E}_0)$:

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0 \quad i.e. \quad \forall\, y \in \mathcal{S},\, \exists\, y_0 \in \mathcal{S}_0 \,/\, y = y_p + y_0.$$

Preuve :

1.

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{S} &\iff \mathrm{T}(y) = b \\ &\iff y - y_p \text{ est solution de l'équation homogène associée} \\ &\iff y - y_p \in \mathcal{S}_0 \\ &\iff \exists\, y_0 \in \mathcal{S}_0,\; y - y_p = y_0 \\ &\iff \exists\, y_0 \in \mathcal{S}_0,\; y = y_p + y_0. \end{aligned}$$

Comme $y \in \mathcal{S}$ était quelconque, on vient bien de montrer que $\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0$.

Théorème 2 (Structure de l'ensemble des solutions) :

2. Si $\mathcal{S}$ n'est pas vide alors toute solution de $(\mathcal{E})$ est la somme d'une solution particulière y_p et d'une solution de $(\mathcal{E}_0)$:

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0 \quad i.e. \quad \forall\, y \in \mathcal{S}, \exists\, y_0 \in \mathcal{S}_0 \,/\, y = y_p + y_0.$$

Preuve :

1.

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{S} &\iff \mathrm{T}(y) = b \\ &\iff y - y_p \in \mathcal{S}_0 \\ &\iff \exists\, y_0 \in \mathcal{S}_0,\ y - y_p = y_0 \\ &\iff \exists\, y_0 \in \mathcal{S}_0,\ y = y_p + y_0. \end{aligned}$$

Comme $y \in \mathcal{S}$ était quelconque, on vient bien de montrer que $\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0$.

Théorème 2 (Structure de l'ensemble des solutions) :

2. Si $\mathcal{S}$ n'est pas vide alors toute solution de $(\mathcal{E})$ est la somme d'une solution particulière y_p et d'une solution de $(\mathcal{E}_0)$:

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0 \quad i.e. \quad \forall\, y \in \mathcal{S},\, \exists\, y_0 \in \mathcal{S}_0 \,/\, y = y_p + y_0.$$

On dit que $\mathcal{S}$ est un sous-espace affine de E dirigé par $\mathcal{S}_0$.

Preuve :

1.

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{S} &\iff \mathrm{T}(y) = b \\ &\iff \exists\, y_0 \in \mathcal{S}_0,\ y - y_p = y_0 \\ &\iff \exists\, y_0 \in \mathcal{S}_0,\ y = y_p + y_0. \end{aligned}$$

Comme $y \in \mathcal{S}$ était quelconque, on vient bien de montrer que $\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0$.

Théorème 2 (Structure de l'ensemble des solutions) :

1. L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de $(\mathcal{E}_0)$ est non vide et stable par combinaisons linéaires.
   On dit que $\mathcal{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Si $\mathcal{S}$ n'est pas vide alors toute solution de $(\mathcal{E})$ est la somme d'une solution particulière y_p et d'une solution de $(\mathcal{E}_0)$:

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0 \quad i.e. \quad \forall\, y \in \mathcal{S},\, \exists\, y_0 \in \mathcal{S}_0 \,/\, y = y_p + y_0.$$

   On dit que $\mathcal{S}$ est un sous-espace affine de E dirigé par $\mathcal{S}_0$.

Toute solution générale d'une équation linéaire est donc la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène associée.

ATTENTION

Toute solution de $(\mathcal{E})$ est une solution particulière de $(\mathcal{E})$! Elle est dite particulière dans le sens où c'est celle que l'on a trouvée et que c'est sur elle que l'on va s'appuyer, pivoter.

Pour trouver toutes les solutions d'une équation linéaire $\mathrm{T}(y) = b$, il suffira d'en connaître une solution particulière et toutes les solutions de l'équation homogène $\mathrm{T}(y) = 0$.

Ceci est un guide pour nos démarches futures :

Méthode 1 :

Pour résoudre une équation linéaire :

1. Déterminer $\mathcal{S}_0$.

ATTENTION

Toute solution de $(\mathcal{E})$ est une solution particulière de $(\mathcal{E})$! Elle est dite particulière dans le sens où c'est celle que l'on a trouvée et que c'est sur elle que l'on va s'appuyer, pivoter.

Pour trouver toutes les solutions d'une équation linéaire $\mathrm{T}(y) = b$, il suffira d'en connaître une solution particulière et toutes les solutions de l'équation homogène $\mathrm{T}(y) = 0$.

Ceci est un guide pour nos démarches futures :

Méthode 1 :

Pour résoudre une équation linéaire :

1. Déterminer $\mathcal{S}_0$.
2. Déterminer une solution particulière y_p.

ATTENTION

Toute solution de $(\mathcal{E})$ est une solution particulière de $(\mathcal{E})$! Elle est dite particulière dans le sens où c'est celle que l'on a trouvée et que c'est sur elle que l'on va s'appuyer, pivoter.

Pour trouver toutes les solutions d'une équation linéaire $\mathrm{T}(y) = b$, il suffira d'en connaître une solution particulière et toutes les solutions de l'équation homogène $\mathrm{T}(y) = 0$.

Ceci est un guide pour nos démarches futures :

Méthode 1 :

Pour résoudre une équation linéaire :

1. Déterminer $\mathcal{S}_0$.
2. Déterminer une solution particulière y_p.
3. Les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme $y_p + y_0$ où $y_0 \in \mathcal{S}_0$.

Exemple 2 :

Posons $\mathrm{E} = \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, T l'opérateur différentiel et $b = \cos$.

On considère l'équation linéaire :

$$\mathrm{T}(f) = \cos \iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \cos(x).$$

1. Les solutions de l'équation homogène associée $f' = 0$ sont toutes les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$ *i.e.* $\mathcal{S}_0 = \{x \longmapsto \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
2. La fonction $y_p = \sin$ est une solution particulière.

Il ne reste plus qu'à additionner :

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0 = \Big\{x \longmapsto \sin(x) + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Définition 3 (Équation différentielle linéaire) :

Soient $a_1, \dots, a_r, b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}\,;\mathbb{K})$.

- On appelle **équation différentielle linéaire** d'ordre r d'une fonction inconnue y, toute équation de la forme :

$$a_r(x)y^{(r)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \qquad (\mathcal{E})$$

où a_r n'est pas la fonction nulle.

Définition 3 (Équation différentielle linéaire) :

Soient $a_1, \dots, a_r, b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}\,;\mathbb{K})$.

- On appelle **équation différentielle linéaire** d'ordre r d'une fonction inconnue y, toute équation de la forme :

$$a_r(x)y^{(r)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \qquad (\mathcal{E})$$

  où a_r n'est pas la fonction nulle.

- On appelle **équation homogène** associée à $(\mathcal{E})$, l'équation :

$$a_r(x)y^{(r)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \qquad (\mathcal{E}_0)$$

Définition 3 (Équation différentielle linéaire) :

Soient $a_1, \dots, a_r, b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}\,;\mathbb{K})$.

- On appelle équation différentielle linéaire d'ordre r d'une fonction inconnue y, toute équation de la forme :

$$a_r(x)y^{(r)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \tag{$\mathcal{E}$}$$

  où a_r n'est pas la fonction nulle.

- On appelle équation homogène associée à $(\mathcal{E})$, l'équation :

$$a_r(x)y^{(r)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \tag{$\mathcal{E}_0$}$$

- On appelle ordre d'une équation différentielle, le plus haut degré de dérivation apparaissant dans l'équation.

Définition 3 (Équation différentielle linéaire) :

Soient $a_1, \dots, a_r, b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}\,;\mathbb{K})$.

- On appelle équation différentielle linéaire d'ordre r d'une fonction inconnue y, toute équation de la forme :

$$a_r(x)y^{(r)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \qquad (\mathcal{E})$$

  où a_r n'est pas la fonction nulle.

- On appelle équation homogène associée à $(\mathcal{E})$, l'équation :

$$a_r(x)y^{(r)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \qquad (\mathcal{E}_0)$$

- On appelle ordre d'une équation différentielle, le plus haut degré de dérivation apparaissant dans l'équation.
- Résoudre ou intégrer une telle équation différentielle revient à trouver toutes les fonctions $x \longmapsto y(x)$ solutions de $(\mathcal{E})$ sur un intervalle à préciser.

Définition 3 (Équation différentielle linéaire) :

Soient $a_1, \ldots, a_r, b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}\,;\mathbb{K})$.

- On appelle **équation différentielle linéaire** d'ordre r d'une fonction inconnue y, toute équation de la forme :

$$a_r(x)y^{(r)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \qquad (\mathcal{E})$$

  où a_r n'est pas la fonction nulle.
- On appelle **équation homogène** associée à $(\mathcal{E})$, l'équation :

$$a_r(x)y^{(r)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \qquad (\mathcal{E}_0)$$

- On appelle **ordre** d'une équation différentielle, le plus haut degré de dérivation apparaissant dans l'équation.
- **Résoudre** ou **intégrer** une telle équation différentielle revient à trouver toutes les fonctions $x \longmapsto y(x)$ solutions de $(\mathcal{E})$ sur un intervalle à préciser.
- On appelle $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions et tout élément de $\mathcal{S}$ s'appelle une **solution particulière**.

Vocabulaire et notations :

- On notera EDL_n pour « signifier équation différentielle linéaire d'ordre n ».

Vocabulaire et notations :

- On notera EDL_n pour « signifier équation différentielle linéaire d'ordre n ».
- On note traditionnellement la fonction inconnue y ou x, et x ou t sa variable.

Vocabulaire et notations :

- On notera EDL_n pour « signifier équation différentielle linéaire d'ordre n ».
- On note traditionnellement la fonction inconnue y ou x, et x ou t sa variable.
- Lorsque $a_r(x)$ est constante à 1, on dit que l'équation est normalisée ou résolue.

Vocabulaire et notations :

- On notera EDL_n pour « signifier équation différentielle linéaire d'ordre n ».
- On note traditionnellement la fonction inconnue y ou x, et x ou t sa variable.
- Lorsque $a_r(x)$ est constante à 1, on dit que l'équation est normalisée ou résolue.
- Les courbes représentatives des solutions de $(\mathcal{E})$ sont appelées courbes intégrales.

Exemples 3 :

- $y' + a(x) = b(x)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Exemples 3 :

- $y' + a(x) = b(x)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
- $y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2.

Exemples 3 :

- $y' + a(x) = b(x)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
- $y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2.
- $y''x + x^2y' = y^2$ est une équation homogène non linéaire.
  En effet, $x \longmapsto x$ en est solution mais pas $x \longmapsto 2x$ ce qui contredit la première assertion du théorème (2).

Exemples 3 :

- $y' + a(x) = b(x)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
- $y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2.
- $y''x + x^2y' = y^2$ est une équation homogène non linéaire.
  En effet, $x \longmapsto x$ en est solution mais pas $x \longmapsto 2x$ ce qui contredit la première assertion du théorème (2).
- $2y' - y = e^x$ n'est pas homogène.

Remarques :

- La fonction nulle $x \longmapsto 0$ est toujours solution d'une équation homogène.

Remarques :

- La fonction nulle $x \longmapsto 0$ est toujours solution d'une équation homogène.
- Les solutions d'une équation différentielle d'ordre r seront donc, par construction, r fois dérivables.
  Elles seront en fait de classe $\mathcal{C}^r$ sur tout intervalle où a_r ne s'annule pas car :
  $$y^{(r)} = \frac{1}{a_r(x)}\left(b(x) - a_0(x)y - a_1(x)y' - \ldots - a_{r-1}y^{(r-1)}\right),$$
  somme de fonctions continues donc continues.

Remarques :

- La fonction nulle $x \longmapsto 0$ est toujours solution d'une équation homogène.
- Les solutions d'une équation différentielle d'ordre r seront donc, par construction, r fois dérivables.
  Elles seront en fait de classe $\mathcal{C}^r$ sur tout intervalle où a_r ne s'annule pas car :
  $$y^{(r)} = \frac{1}{a_r(x)}\left(b(x) - a_0(x)y - a_1(x)y' - ... - a_{r-1}y^{(r-1)}\right),$$
  somme de fonctions continues donc continues.
- On notera souvent l'inconnue y au lieu de $y(x)$, y compris dans l'équation afin de bien différencier notre inconnue.
  Ainsi, on parlera, par exemple, de l'équation $xy' + 3x^2y^2 = 0$.

Remarques :

- La fonction nulle $x \longmapsto 0$ est toujours solution d'une équation homogène.
- Les solutions d'une équation différentielle d'ordre r seront donc, par construction, r fois dérivables.
  Elles seront en fait de classe $\mathcal{C}^r$ sur tout intervalle où a_r ne s'annule pas car :
  $$y^{(r)} = \frac{1}{a_r(x)}\left(b(x) - a_0(x)y - a_1(x)y' - \ldots - a_{r-1}y^{(r-1)}\right),$$
  somme de fonctions continues donc continues.
- On notera souvent l'inconnue y au lieu de $y(x)$, y compris dans l'équation afin de bien différencier notre inconnue.
  Ainsi, on parlera, par exemple, de l'équation $xy' + 3x^2y^2 = 0$.
- L'équation $(\mathcal{E})$ correspond à l'opérateur
  $$\begin{array}{cccc} \mathrm{T} : & \mathcal{C}^r(\mathbb{R}\,;\mathbb{K}) & \longmapsto & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}\,;\mathbb{K}) \\ & f & & a_r f^{(r)} + \ldots + a_1 f' + a_0 f \end{array}$$
  où les coefficients a_i sont des fonctions continues.

Exemples 4 (Un peu de physique) :

- La tension u aux bornes d'un condensateur de capacité C en série avec une résistance R et un générateur de force électromotrice $\mathrm{E}(t)$ vérifie l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$\mathrm{RC}u' + u = \mathrm{E}(t).$$

Exemples 4 (Un peu de physique) :

- La tension u aux bornes d'un condensateur de capacité C en série avec une résistance R et un générateur de force électromotrice $\mathrm{E}(t)$ vérifie l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$\mathrm{RC}u' + u = \mathrm{E}(t).$$

- L'intensité i dans un circuit RL constitue d'une résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un générateur de force électromotrice $\mathrm{E}(t)$ vérifie l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$\mathrm{L}i' + \mathrm{R}i = \mathrm{E}(t).$$

Exemples 4 (Un peu de physique) :

- La tension u aux bornes d'un condensateur de capacité C en série avec une résistance R et un générateur de force électromotrice $\mathrm{E}(t)$ vérifie l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$\mathrm{RC}u' + u = \mathrm{E}(t).$$

- L'intensité i dans un circuit RL constitue d'une résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un générateur de force électromotrice $\mathrm{E}(t)$ vérifie l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$\mathrm{L}i' + \mathrm{R}i = \mathrm{E}(t).$$

- La proportion y de carbone 14 dans le carbone total des êtres vivants est constante. Après la mort, la vitesse de désintégration $y'(t)$ est proportionnelle à sa concentration dans un rapport de 1/8000 par an et vérifie donc l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante (où le temps est exprimé en années) :

$$y' + \frac{1}{8000}y = 0.$$

On peut ainsi dater la mort d'un être vivant grâce à cette relation

Exemples 4 (Un peu de physique) :

- L'allongement x d'un ressort vertical de raideur k sans frottement auquel on a suspendu une masse m est régi par l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 :

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0.$$

Exemples 4 (Un peu de physique) :

- L'allongement x d'un ressort vertical de raideur k sans frottement auquel on a suspendu une masse m est régi par l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 :

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0.$$

- L'évolution au cours du temps de θ l'angle formé par un pendule de longueur ℓ et de masse m avec la verticale est donnée par l'équation différentielle **non** linéaire d'ordre 2 :

$$\theta'' + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) = 0.$$

Exercice 1 :

1. Montrer que, quels que soient les réels α, β, la fonction $x \longmapsto (x^3 + \alpha x + \beta)e^x$ est une solution de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = 6xe^x. \tag{E$_1$}$$

Exercice 1 :

1. Montrer que, quels que soient les réels α, β, la fonction $x \longmapsto (x^3 + \alpha x + \beta)e^x$ est une solution de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = 6xe^x. \qquad (\mathrm{E}_1)$$

Correction :

1. Soit $f : x \longmapsto (x^3 + \alpha x + \beta)e^x$.

Exercice 1 :

1. Montrer que, quels que soient les réels α, β, la fonction $x \longmapsto (x^3 + \alpha x + \beta)e^x$ est une solution de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = 6xe^x. \tag{E$_1$}$$

Correction :

1. Soit $f : x \longmapsto (x^3 + \alpha x + \beta)e^x$.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = (3x^2 + \alpha)e^x + (x^3 + \alpha x + \beta)e^x$$

Exercice 1 :

1. Montrer que, quels que soient les réels α, β, la fonction $x \longmapsto (x^3 + \alpha x + \beta)e^x$ est une solution de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = 6xe^x. \tag{E_1}$$

Correction :

1. Soit $f : x \longmapsto (x^3 + \alpha x + \beta)e^x$.

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= (3x^2 + \alpha)e^x + (x^3 + \alpha x + \beta)e^x \\ &= [x^3 + 3x^2 + \alpha x + (\alpha + \beta)]e^x. \end{aligned}$$

Exercice 1 :

1. Montrer que, quels que soient les réels α, β, la fonction $x \longmapsto (x^3 + \alpha x + \beta)e^x$ est une solution de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = 6xe^x. \qquad (\mathrm{E}_1)$$

Correction :

1. Soit $f : x \longmapsto (x^3 + \alpha x + \beta)e^x$.

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= [x^3 + 3x^2 + \alpha x + (\alpha + \beta)]e^x. \\ f''(x) &= (3x^2 + 6x + \alpha)e^x + (x^3 + 3x^2 + \alpha x + \alpha + \beta)e^x \end{aligned}$$

Exercice 1 :

1. Montrer que, quels que soient les réels α, β, la fonction $x \longmapsto (x^3 + \alpha x + \beta)e^x$ est une solution de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = 6xe^x. \tag{E$_1$}$$

Correction :

1. Soit $f : x \longmapsto (x^3 + \alpha x + \beta)e^x$.

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) &= [x^3 + 3x^2 + \alpha x + (\alpha + \beta)]e^x. \\ f''(x) &= (3x^2 + 6x + \alpha)e^x + (x^3 + 3x^2 + \alpha x + \alpha + \beta)e^x \\ &= [x^3 + 6x^2 + (\alpha + 6)x + (2\alpha + \beta)]e^x. \end{aligned}$$

Exercice 1 :

1. Montrer que, quels que soient les réels α, β, la fonction $x \longmapsto (x^3 + \alpha x + \beta)e^x$ est une solution de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = 6xe^x. \qquad (E_1)$$

Correction :

1. Soit $f : x \longmapsto (x^3 + \alpha x + \beta)e^x$.

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= [x^3 + 3x^2 + \alpha x + (\alpha+\beta)]e^x. \\ f''(x) &= [x^3 + 6x^2 + (\alpha+6)x + (2\alpha+\beta)]e^x. \\ f''(x) - 2f'(x) + f(x) &= [x^3 + 6x^2 + (\alpha+6)x + (2\alpha+\beta)]e^x \end{aligned}$$

Exercice 1 :

1. Montrer que, quels que soient les réels α, β, la fonction $x \longmapsto (x^3 + \alpha x + \beta)e^x$ est une solution de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = 6xe^x. \qquad (\mathrm{E}_1)$$

Correction :

1. Soit $f : x \longmapsto (x^3 + \alpha x + \beta)e^x$.

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= [x^3 + 3x^2 + \alpha x + (\alpha + \beta)]e^x. \\
f''(x) &= [x^3 + 6x^2 + (\alpha + 6)x + (2\alpha + \beta)]e^x. \\
f''(x) - 2f'(x) + f(x) &= [x^3 + 6x^2 + (\alpha + 6)x + (2\alpha + \beta)]e^x \\
&\quad - 2[x^3 + 3x^2 + \alpha x + (\alpha + \beta)]e^x
\end{aligned}$$

Exercice 1 :

1. Montrer que, quels que soient les réels α, β, la fonction $x \longmapsto (x^3 + \alpha x + \beta)e^x$ est une solution de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = 6xe^x. \tag{E_1}$$

Correction :

1. Soit $f : x \longmapsto (x^3 + \alpha x + \beta)e^x$.

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) &= [x^3 + 3x^2 + \alpha x + (\alpha + \beta)]e^x. \\
f''(x) &= [x^3 + 6x^2 + (\alpha + 6)x + (2\alpha + \beta)]e^x. \\
f''(x) - 2f'(x) + f(x) &= [x^3 + 6x^2 + (\alpha + 6)x + (2\alpha + \beta)]e^x \\
&\quad - 2[x^3 + 3x^2 + \alpha x + (\alpha + \beta)]e^x \\
&\quad + (x^3 + \alpha x + \beta)e^x
\end{aligned}$$

Exercice 1 :

1. Montrer que, quels que soient les réels α, β, la fonction $x \longmapsto (x^3 + \alpha x + \beta)e^x$ est une solution de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = 6xe^x. \qquad (E_1)$$

Correction :

1. Soit $f : x \longmapsto (x^3 + \alpha x + \beta)e^x$.

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= [x^3 + 3x^2 + \alpha x + (\alpha + \beta)]e^x. \\ f''(x) &= [x^3 + 6x^2 + (\alpha + 6)x + (2\alpha + \beta)]e^x. \\ f''(x) - 2f'(x) + f(x) &= [x^3 + 6x^2 + (\alpha + 6)x + (2\alpha + \beta)]e^x \\ &\quad - 2[x^3 + 3x^2 + \alpha x + (\alpha + \beta)]e^x \\ &\quad + (x^3 + \alpha x + \beta)e^x \\ &= 6xe^x \end{aligned}$$

Exercice 1 :

1. Montrer que, quels que soient les réels α, β, la fonction $x \longmapsto (x^3 + \alpha x + \beta)e^x$ est une solution de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = 6xe^x. \tag{E$_1$}$$

Correction :

1. Soit $f : x \longmapsto (x^3 + \alpha x + \beta)e^x$.

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= [x^3 + 3x^2 + \alpha x + (\alpha + \beta)]e^x. \\
f''(x) &= [x^3 + 6x^2 + (\alpha + 6)x + (2\alpha + \beta)]e^x. \\
f''(x) - 2f'(x) + f(x) &= [x^3 + 6x^2 + (\alpha + 6)x + (2\alpha + \beta)]e^x \\
&\quad - 2[x^3 + 3x^2 + \alpha x + (\alpha + \beta)]e^x \\
&\quad + (x^3 + \alpha x + \beta)e^x \\
&= 6xe^x
\end{aligned}$$

La fonction $x \longmapsto (x^3 + \alpha x + \beta)e^x$ est donc bien solution de (E_1).

Exercice 1 :

2. Déterminer une solution affine de l'équation différentielle :

$$e^{x}y'' + xy' + 2y = x - 3. \tag{E_2}$$

Exercice 1 :

2. Déterminer une solution affine de l'équation différentielle :

$$\mathrm{e}^x y'' + xy' + 2y = x - 3. \tag{E_2}$$

Correction :

2. Soit $f : x \longmapsto ax + b$ la solution affine cherchée.

Exercice 1 :

2. Déterminer une solution affine de l'équation différentielle :

$$e^x y'' + xy' + 2y = x - 3. \tag{E$_2$}$$

Correction :

2. Soit $f : x \longmapsto ax + b$ la solution affine cherchée.

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) &= ax + b \\ f'(x) &= a \\ f''(x) &= 0. \end{aligned}$$

Exercice 1 :

2. Déterminer une solution affine de l'équation différentielle :

$$e^x y'' + xy' + 2y = x - 3. \tag{E_2}$$

Correction :

2. Soit $f : x \longmapsto ax + b$ la solution affine cherchée.

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) &= ax + b \\ f'(x) &= a \\ f''(x) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (\mathrm{E}_2) &\iff \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad e^x y'' + xy' + 2y = x - 3 \\ &\iff \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 0 + xa + 2(ax + b) = x - 3 \end{aligned}$$

Exercice 1 :

2. Déterminer une solution affine de l'équation différentielle :

$$e^x y'' + xy' + 2y = x - 3. \tag{E$_2$}$$

Correction :

2. Soit $f : x \longmapsto ax + b$ la solution affine cherchée.

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) &= ax + b \\ f'(x) &= a \\ f''(x) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (\mathrm{E}_2) &\iff \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad e^x y'' + xy' + 2y = x - 3 \\ &\iff \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 0 + xa + 2(ax + b) = x - 3 \\ &\iff \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 3ax + 2b = x - 3 \end{aligned}$$

Exercice 1 :

2. Déterminer une solution affine de l'équation différentielle :

$$e^x y'' + xy' + 2y = x - 3. \qquad (E_2)$$

Correction :

2. Soit $f : x \longmapsto ax + b$ la solution affine cherchée.

$$\begin{aligned}
f \text{ est solution de } (E_2) &\iff \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad e^x y'' + xy' + 2y = x - 3 \\
&\iff \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 0 + xa + 2(ax + b) = x - 3 \\
&\iff \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 3ax + 2b = x - 3 \\
&\iff \begin{cases} 3a = 1 \\ 2b = -3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Exercice 1 :

2. Déterminer une solution affine de l'équation différentielle :

$$\mathrm{e}^x y'' + xy' + 2y = x - 3. \qquad (\mathrm{E}_2)$$

Correction :

2. Soit $f : x \longmapsto ax + b$ la solution affine cherchée.

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (\mathrm{E}_2) &\iff \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad e^x y'' + xy' + 2y = x - 3 \\ &\iff \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 0 + xa + 2(ax + b) = x - 3 \\ &\iff \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 3ax + 2b = x - 3 \\ &\iff \begin{cases} 3a = 1 \\ 2b = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ 2b = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 1 :

2. Déterminer une solution affine de l'équation différentielle :

$$\mathrm{e}^x y'' + xy' + 2y = x - 3. \qquad (\mathrm{E}_2)$$

Correction :

2. Soit $f : x \longmapsto ax + b$ la solution affine cherchée.

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (\mathrm{E}_2) &\iff \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad e^x y'' + xy' + 2y = x - 3 \\ &\iff \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 0 + xa + 2(ax + b) = x - 3 \\ &\iff \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 3ax + 2b = x - 3 \\ &\iff \begin{cases} 3a = 1 \\ 2b = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ 2b = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{3}x - \dfrac{3}{2}$ est solution de (E_2).

Exercice 1 :

3. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.
Déterminer une équation différentielle du premier ordre dont f est solution.

Exercice 1 :

3. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.
Déterminer une équation différentielle du premier ordre dont f est solution.

Correction :

3. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \arcsin(x)$ dérivable sur $]-1\,;1[$.

Exercice 1 :

3. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.
Déterminer une équation différentielle du premier ordre dont f est solution.

Correction :

3. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \arcsin(x)$ dérivable sur $]-1\,;1[$.

$$\forall\, x \in]-1,1[,\ f'(x) = \left[-\frac{1}{2}(-2x)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\right]\arcsin(x) + (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Exercice 1 :

❸ Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.
Déterminer une équation différentielle du premier ordre dont f est solution.

Correction :

❸ Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\arcsin(x)$ dérivable sur $]-1\,;1[$.

$$\forall\, x \in]-1,1[,\ f'(x) = \left[-\frac{1}{2}(-2x)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\right]\arcsin(x) + (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{x}{1-x^2} \times \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1-x^2}$$

Exercice 1 :

3. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.
   Déterminer une équation différentielle du premier ordre dont f est solution.

Correction :

3. *Soit* $f : x \longmapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\arcsin(x)$ *dérivable sur* $]-1\,;1[$.

$$\forall\, x \in]-1,1[,\ f'(x) = \left[-\frac{1}{2}(-2x)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\right]\arcsin(x) + (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{x}{1-x^2} \times \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1-x^2}$$

$$= \frac{x}{1-x^2}\, f(x) + \frac{1}{1-x^2}.$$

Exercice 1 :

3. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.
Déterminer une équation différentielle du premier ordre dont f est solution.

Correction :

3. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \arcsin(x)$ dérivable sur $]-1\,;1[$.

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in]-1,1[,\ f'(x) &= \left[-\frac{1}{2}(-2x)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\right]\arcsin(x) + (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{x}{1-x^2} \times \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1-x^2} \\
&= \frac{x}{1-x^2} f(x) + \frac{1}{1-x^2}.
\end{aligned}$$

En multipliant par $1-x^2$, non nul sur $]-1,1[$:

$$\forall\, x \in]-1,1[, \quad (1-x^2)f'(x) = xf(x) + 1$$

Exercice 1 :

3. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.
   Déterminer une équation différentielle du premier ordre dont f est solution.

Correction :

3. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \arcsin(x)$ dérivable sur $]-1\,;1[$.
   La fonction f est donc une solution de l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y' - xy = 1.$$

II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1. Équations et opérateurs linéaires
2. Équations différentielles linéaires d'ordre 1
   - Solutions de l'équation homogène
   - Solution particulière
   - Problème de Cauchy associé à une EDL_1
   - Résolution des EDL_1 à coefficients constants
3. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Le programme prévoit l'étude des équations différentielles linéaires du premier ordre, **résolues** (i.e. le coefficient de y' vaut 1) :

$$y' + a(x)y = b(x), \tag{EDL$_1$}$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I.

L'équation homogène associée (EDL$_1$) s'écrit :

$$y' + a(x)y = 0. \tag{(EDL$_1$)$_0$}$$

II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Le théorème (2) de structure s'applique à cette situation. On peut donc se contenter d'étudier l'équation homogène, et de trouver une solution particulière.

À retenir :

Solution générale de (EDL_1) = Solution particulière de (EDL_1) + Solution générale de l'équation homogène $(\mathrm{EDL}_1)_0$

Théorème 3 (Résolution $y' + a(x)y = 0$, a continue) :

Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ sur I est :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ y : x \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)},\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

où A est une primitive sur I de a.

Théorème 3 (Résolution $y' + a(x)y = 0$, a continue) :

Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ sur I est :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ y : x \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)},\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

où A est une primitive sur I de a.

Preuve :

Par hypothèse, la fonction a est continue sur I donc elle y admet une primitive A.

II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1. Solutions de l'équation homogène

Théorème 3 (Résolution $y' + a(x)y = 0$, a continue) :

Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ sur I est :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ y : x \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)},\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

où A est une primitive sur I de a.

Preuve :

Par hypothèse, la fonction a est continue sur I donc elle y admet une primitive A.

Sachant que y est une fonction dérivable par nécessité, la fonction $x \longmapsto y(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}$ est donc également dérivable sur I et on a :

$$y \in \mathcal{S}_0 \iff y' + a(x)y = 0$$

Théorème 3 (Résolution $y' + a(x)y = 0$, a continue) :

Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ sur I est :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ y : x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)},\ \forall\,\lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

où A est une primitive sur I de a.

Preuve :

Par hypothèse, la fonction a est continue sur I donc elle y admet une primitive A.

Sachant que y est une fonction dérivable par nécessité, la fonction $x \longmapsto y(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}$ est donc également dérivable sur I et on a :

$$y \in \mathcal{S}_0 \iff y' + a(x)y = 0$$

En multipliant les deux membres par $\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)} \neq 0$, on obtient :

$$\iff y'\,\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)} + \mathrm{A}'(x)y\,\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)} = 0$$

Théorème 3 (Résolution $y' + a(x)y = 0$, a continue) :

Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ sur I est :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ y : x \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)},\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

où A est une primitive sur I de a.

Preuve :

Par hypothèse, la fonction a est continue sur I donc elle y admet une primitive A.

Sachant que y est une fonction dérivable par nécessité, la fonction $x \longmapsto y(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}$ est donc également dérivable sur I et on a :

$$y \in \mathcal{S}_0 \iff y' + a(x)y = 0$$

En multipliant les deux membres par $\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)} \neq 0$, on obtient :

$$\iff y'\,\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)} + \mathrm{A}'(x)y\,\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)} = 0$$

$$\iff \forall\, x \in \mathrm{I},\ \left(y\,\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}\right)' = 0 \qquad \text{(on reconnaît)}$$

Théorème 3 (Résolution $y' + a(x)y = 0$, a continue) :

Soit $a \in \mathcal{C}^0\,(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ sur I est :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ y : x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)},\ \forall\,\lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

où A est une primitive sur I de a.

Preuve :

Par hypothèse, la fonction a est continue sur I donc elle y admet une primitive A.

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{S}_0 &\iff y' + a(x)y = 0 \\ &\iff \forall\,x \in \mathrm{I},\ \left(y\,\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}\right)' = 0 \end{aligned}$$

La fonction $x \longmapsto y(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}$, de dérivée nulle sur l'intervalle I est donc constante sur $\mathcal{I}$:

$$\iff \exists\,\lambda \in \mathbb{R},\ \forall\,x \in \mathrm{I},\ y(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)} = \lambda$$

Théorème 3 (Résolution $y' + a(x)y = 0$, a continue) :

Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ sur I est :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ y : x \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)},\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

où A est une primitive sur I de a.

Preuve :

Par hypothèse, la fonction a est continue sur I donc elle y admet une primitive A.

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{S}_0 &\iff y' + a(x)y = 0 \\ &\iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathrm{I},\ y(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)} = \lambda \\ &\iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathrm{I},\ y(x) = \lambda\, \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}. \end{aligned}$$

Théorème 3 (Résolution $y' + a(x)y = 0$, a continue) :

Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ sur I est :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ y : x \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)},\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

où A est une primitive sur I de a.

Preuve :

Par hypothèse, la fonction a est continue sur I donc elle y admet une primitive A.

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{S}_0 &\iff y' + a(x)y = 0 \\ &\iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathrm{I},\ y(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)} = \lambda \\ &\iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathrm{I},\ y(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}. \end{aligned}$$

Théorème 3 (Résolution $y' + a(x)y = 0$, a continue) :

Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ sur I est :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ y : x \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)},\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

où A est une primitive sur I de a.

Toutes les solutions de $(\mathcal{E}_0)$ sont donc colinéaires à $x \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}$.

Théorème 3 (Résolution $y' + a(x)y = 0$, a continue) :

Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ sur I est :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ y : x \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)},\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

où A est une primitive sur I de a.

Toutes les solutions de $(\mathcal{E}_0)$ sont donc colinéaires à $x \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}$.

On dit alors que l'ensemble des solutions est une droite vectorielle, ou d'une autre manière que $\mathcal{S}_0$ est un espace (vectoriel) de dimension un.

Théorème 3 (Résolution $y' + a(x)y = 0$, a continue) :

Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ sur I est :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ y : x \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)},\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

où A est une primitive sur I de a.

Toutes les solutions de $(\mathcal{E}_0)$ sont donc colinéaires à $x \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}$.

On dit alors que l'ensemble des solutions est une droite vectorielle, ou d'une autre manière que $\mathcal{S}_0$ est un espace (vectoriel) de dimension un.

ATTENTION

Il n'y a qu'une solution de $(\mathrm{EDL}_1)_0$ qui s'annule :

Théorème 3 (Résolution $y' + a(x)y = 0$, a continue) :

Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ sur I est :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ y : x \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)},\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

où A est une primitive sur I de a.

Toutes les solutions de $(\mathcal{E}_0)$ sont donc colinéaires à $x \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}$.

On dit alors que l'ensemble des solutions est une droite vectorielle, ou d'une autre manière que $\mathcal{S}_0$ est un espace (vectoriel) de dimension un.

ATTENTION

Il n'y a qu'une solution de $\left(\mathrm{EDL}_1\right)_0$ qui s'annule :

la fonction nulle.

Exemple 5 :

Si a est une constante, les solutions de l'équation $y' + ay = 0$ sont toutes les fonctions

$$x \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-ax},\ \lambda \in \mathbb{K}.$$

Exemple 6 :

$(1+x^2)y' + y = 1$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients continus (non constants), avec second membre.

1. L'équation homogène associée a pour solution les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\operatorname{arctan}(x)},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. La fonction constante égale à 1 est solution particulière évidente.

D'après le théorème (2), la solution générale est donc

$$x \longmapsto 1 + \lambda\,\mathrm{e}^{-\operatorname{arctan}(x)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemple 7 :

$y' + xy = x$.

1. L'équation homogène associée a pour ensemble de solutions les fonctions de la forme $x \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.
2. Une solution particulière évidente est la fonction constante égale à 1.
3. Les solutions de l'équation sont donc de la forme :

$$x \longmapsto 1 + \lambda\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Méthode 2 :

Comment retrouver cette formule si on l'a oubliée.

1. Au brouillon ou à la manière des physiciens,
   1. on s'autorise des divisions par y (rigoureusement incorrect si on n'a pas justifié que la fonction ne s'annule pas !).
      L'équation s'écrit alors $\dfrac{y'}{y} = a(x)$.
   2. On reconnait la dérivée de $\ln|y|$ (appelée dérivée logarithmique de y).
   3. On primitive, on passe à l'exponentielle et le tour est joué.
2. Au propre, il est préférable d'utiliser directement la formule du cours, pour éviter les problèmes de justification issus de la division par y.

Exercice 2 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = ay$ où a est une constante.

Exercice 2 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = ay$ où a est une constante.
2. $y' = yx^{\alpha}$ sur $\mathbb{R}$ si $\alpha \geqslant 0$, sur $\mathbb{R}_+^*$ sinon.

Exercice 2 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = ay$ où a est une constante.
2. $y' = yx^{\alpha}$ sur $\mathbb{R}$ si $\alpha \geqslant 0$, sur $\mathbb{R}_+^*$ sinon.
3. $\sin(x)y' - \cos(x)y = 0$ sur $\mathrm{I} =]0\,;\pi[$.

Pour commencer, il s'agit de fractionner éventuellement le problème en problèmes plus simples par le théorème (1) de superposition.

Supposant cette première étape effectuée, on cherche une solution particulière de l'équation générale

$$y' + a(x)y = b(x). \tag{EDL$_1$}$$

En premier lieu, essayez de DEVINER une solution particulière. Vous pouvez par exemple pour cela vous aider de l'homogénéité. Vous pouvez aussi rechercher une solution constante ou polynomiale comme dans l' exemple (7) ou l' exemple (8) .

Exemples 8 :

Soient $a, b \in \mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $y' + ay = b$: La fonction constante $x \longmapsto -\dfrac{b}{a}$ est solution.
2. $y' + ay = b\,\mathrm{e}^{\alpha x}$: La fonction $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ est solution si λ vérifie l'équation

$$(\alpha + a)\lambda = b.$$

Méthode 3 :

1. Les solutions de l'équation homogène étant de la forme $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ on recherche une solution particulière de l'équation (EDL_1) non homogène sous la forme $x \longmapsto \lambda(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ i.e. on « rend la constante variable ».
2. En remplaçant dans l'équation différentielle (EDL_1) et après simplification, $x \longmapsto \lambda(x)$ s'obtient par primitivation.

Preuve :

Soit $y_0 : x \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ une solution de $(\mathrm{EDL}_1)_0$ i.e. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ y_0' + a y_0 = 0$.

Preuve :

Soit $y_0 : x \longmapsto \lambda \, \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ une solution de $(\mathrm{EDL}_1)_0$ i.e. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $y_0' + a y_0 = 0$.

On cherche alors une solution (particulière) y_p de $(\mathrm{EDL}_1)_0$ sous la forme $y_p = \lambda \, \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ où λ est une fonction dérivable.

Preuve :

Soit $y_0 : x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ une solution de $(\mathrm{EDL}_1)_0$ i.e. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ y_0' + a y_0 = 0$.

On cherche alors une solution (particulière) y_p de $(\mathrm{EDL}_1)_0$ sous la forme $y_p = \lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ où λ est une fonction dérivable.

On a alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ y_p(x) = \lambda(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$$

Preuve :

Soit $y_0 : x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ une solution de $(\mathrm{EDL}_1)_0$ i.e. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ y_0' + ay_0 = 0$.

On cherche alors une solution (particulière) y_p de $(\mathrm{EDL}_1)_0$ sous la forme $y_p = \lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ où λ est une fonction dérivable.

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R},\ y_p(x) &= \lambda(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}\\ y_p'(x) &= \left(\lambda'(x) - a(x)\lambda(x)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}\end{aligned}$$

Preuve :

Soit $y_0 : x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ une solution de $(\mathrm{EDL}_1)_0$ i.e. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ y_0' + ay_0 = 0$.

On cherche alors une solution (particulière) y_p de $(\mathrm{EDL}_1)_0$ sous la forme $y_p = \lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ où λ est une fonction dérivable.

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in \mathbb{R},\ y_p(x) &= \lambda(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} \\
y_p'(x) &= \left(\lambda'(x) - a(x)\lambda(x)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} \\
y_p'(x) + a(x)y_p'(x) &= \Big(\lambda'(x) + \underbrace{a(x)\lambda(x) - a(x)\lambda(x)}_{=0}\Big)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}
\end{aligned}$$

Preuve :

Soit $y_0 : x \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ une solution de $(\mathrm{EDL}_1)_0$ i.e. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ y_0' + a y_0 = 0$.

On cherche alors une solution (particulière) y_p de $(\mathrm{EDL}_1)_0$ sous la forme $y_p = \lambda\, \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ où λ est une fonction dérivable.

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in \mathbb{R},\ y_p(x) &= \lambda(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} \\
y_p'(x) &= \left(\lambda'(x) - a(x)\lambda(x)\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} \\
y_p'(x) + a(x) y_p'(x) &= \lambda'(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}
\end{aligned}$$

Preuve :

Soit $y_0 : x \longmapsto \lambda \,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ une solution de $\left(\mathrm{EDL}_1\right)_0$ i.e. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ y_0' + a y_0 = 0$.

On cherche alors une solution (particulière) y_p de $\left(\mathrm{EDL}_1\right)_0$ sous la forme $y_p = \lambda \,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ où λ est une fonction dérivable.

$$
\begin{aligned}
\forall\, x \in \mathbb{R},\ y_p(x) &= \lambda(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} \\
y_p'(x) &= \left(\lambda'(x) - a(x)\lambda(x)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} \\
y_p'(x) + a(x) y_p'(x) &= \lambda'(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}
\end{aligned}
$$

Or, y_p est solution de (EDL_1) si, et seulement si

$$
y_p'(x) + a(x) y_p'(x) = b(x)
$$

Preuve :

Soit $y_0 : x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ une solution de $(\mathrm{EDL}_1)_0$ i.e. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ y_0' + ay_0 = 0$.
On cherche alors une solution (particulière) y_p de $(\mathrm{EDL}_1)_0$ sous la forme $y_p = \lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ où λ est une fonction dérivable.

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R},\ y_p(x) &= \lambda(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}\\ y_p'(x) &= \left(\lambda'(x) - a(x)\lambda(x)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}\\ y_p'(x) + a(x)y_p'(x) &= \lambda'(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}\end{aligned}$$

Or, y_p est solution de (EDL_1) si, et seulement si

$$y_p'(x) + a(x)y_p'(x) = b(x)$$

si, et seulement si

$$\lambda'(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} = b(x)$$

Preuve :

Soit $y_0 : x \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ une solution de $(\mathrm{EDL}_1)_0$ i.e. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ y_0' + a y_0 = 0$.

On cherche alors une solution (particulière) y_p de $(\mathrm{EDL}_1)_0$ sous la forme $y_p = \lambda\, \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ où λ est une fonction dérivable.

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in \mathbb{R},\ y_p(x) &= \lambda(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} \\
y_p'(x) &= \left(\lambda'(x) - a(x)\lambda(x)\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} \\
y_p'(x) + a(x) y_p'(x) &= \lambda'(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}
\end{aligned}$$

Or, y_p est solution de (EDL_1) si, et seulement si

$$\begin{aligned}
y_p'(x) + a(x) y_p'(x) &= b(x) \\
\lambda'(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} &= b(x) \\
\lambda'(x) &= b(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}.
\end{aligned}$$

Preuve :

Soit $y_0 : x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ une solution de $(\mathrm{EDL}_1)_0$ i.e. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ y_0' + ay_0 = 0$.

On cherche alors une solution (particulière) y_p de $(\mathrm{EDL}_1)_0$ sous la forme $y_p = \lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ où λ est une fonction dérivable.

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R},\ y_p(x) &= \lambda(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}\\ y_p'(x) &= (\lambda'(x) - a(x)\lambda(x))\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}\\ y_p'(x) + a(x)y_p'(x) &= \lambda'(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}\end{aligned}$$

Or, y_p est solution de (EDL_1) si, et seulement si

$$\begin{aligned}y_p'(x) + a(x)y_p'(x) &= b(x)\\ \lambda'(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} &= b(x)\\ \lambda'(x) &= b(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}.\end{aligned}$$

En conclusion, y_p est solution de (EDL_1) si, et seulement si λ est solution de l'équation différentielle du premier ordre :

$$\mathrm{Z}' = b\,\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}. \tag{1}$$

Preuve :

Soit $y_0 : x \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ une solution de $(\mathrm{EDL}_1)_0$ i.e. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ y_0' + a y_0 = 0$.

On cherche alors une solution (particulière) y_p de $(\mathrm{EDL}_1)_0$ sous la forme $y_p = \lambda\, \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ où λ est une fonction dérivable.

En conclusion, y_p est solution de (EDL_1) si, et seulement si λ est solution de l'équation différentielle du premier ordre :

$$\mathrm{Z}' = b\, \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}. \tag{1}$$

Toute primitive Z convient puisque l'on cherche une solution particulière.

Preuve :

Soit $y_0 : x \longmapsto \lambda \, \mathrm{e}^{-A(x)}$ une solution de $(\mathrm{EDL}_1)_0$ i.e. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ y_0' + a y_0 = 0$.

On cherche alors une solution (particulière) y_p de $(\mathrm{EDL}_1)_0$ sous la forme $y_p = \lambda \, \mathrm{e}^{-A(x)}$ où λ est une fonction dérivable.

En conclusion, y_p est solution de (EDL_1) si, et seulement si λ est solution de l'équation différentielle du premier ordre :

$$Z' = b \, \mathrm{e}^{A(x)}. \tag{1}$$

Toute primitive Z convient puisque l'on cherche une solution particulière.

Cette dernière sera alors de la forme :

$$y_p : x \longmapsto Z(x) \, \mathrm{e}^{-A(x)}.$$

Preuve :

Soit $y_0 : x \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ une solution de $(\mathrm{EDL}_1)_0$ i.e. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $y_0' + a y_0 = 0$.

On cherche alors une solution (particulière) y_p de $(\mathrm{EDL}_1)_0$ sous la forme $y_p = \lambda\, \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ où λ est une fonction dérivable.

En conclusion, y_p est solution de (EDL_1) si, et seulement si λ est solution de l'équation différentielle du premier ordre :

$$\mathrm{Z}' = b\, \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}. \tag{1}$$

Toute primitive Z convient puisque l'on cherche une solution particulière.

Cette dernière sera alors de la forme :

$$y_p : x \longmapsto \mathrm{Z}(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}.$$

Les solutions générales s'écriront alors :

$$y = y_0 + y_p : x \longmapsto \Big(\lambda + \mathrm{Z}(x)\Big)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Exercice 3 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$, $(1+x^2)y' + 2xy - 1 = 0$.

Exercice 3 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$, $(1+x^2)y' + 2xy = 1$.

Correction :

1. Comme $1+x^2>0$, la fonction $a : x \longmapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ dont une primitive est $\mathrm{A} : x \longmapsto \ln\left(1+x^2\right)$.

Exercice 3 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$, $(1+x^2)y' + 2xy = 1$.

Correction :

1. Comme $1+x^2>0$, la fonction $a : x \longmapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ dont une primitive est $\mathrm{A} : x \longmapsto \ln(1+x^2)$.
   Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $y_0 : x \longmapsto \dfrac{\lambda}{1+x^2}$.

Exercice 3 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$, $(1+x^2)y' + 2xy = 1$.

Correction :

1. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $y_0 : x \longmapsto \dfrac{\lambda}{1+x^2}$.
2. On cherche donc une solution particulière sous la forme $y_p : x \longmapsto \dfrac{\lambda(x)}{1+x^2}$:

Exercice 3 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$, $(1+x^2)y' + 2xy = 1$.

Correction :

1. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $y_0 : x \longmapsto \dfrac{\lambda}{1+x^2}$.
2. On cherche donc une solution particulière sous la forme $y_p : x \longmapsto \dfrac{\lambda(x)}{1+x^2}$:

   y_p est solution de $(1+x^2)y' + 2xy = 1$ si, et seulement si

Exercice 3 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$, $(1+x^2)y' + 2xy = 1$.

Correction :

1. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $y_0 : x \longmapsto \dfrac{\lambda}{1+x^2}$.
2. On cherche donc une solution particulière sous la forme $y_p : x \longmapsto \dfrac{\lambda(x)}{1+x^2}$:
   y_p est solution de $(1+x^2)y' + 2xy = 1$ si, et seulement si

$$(1+x^2)\left(\frac{\lambda'(x)}{1+x^2} - \frac{2x\lambda(x)}{(1+x^2)^2}\right) + \frac{2x\lambda(x)}{1+x^2} = 1$$

Exercice 3 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$, $(1+x^2)y' + 2xy = 1$.

Correction :

1. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $y_0 : x \longmapsto \dfrac{\lambda}{1+x^2}$.
2. On cherche donc une solution particulière sous la forme $y_p : x \longmapsto \dfrac{\lambda(x)}{1+x^2}$:

   y_p est solution de $(1+x^2)y' + 2xy = 1$ si, et seulement si

$$(1+x^2)\left(\frac{\lambda'(x)}{1+x^2} - \cancel{\frac{2x\lambda(x)}{(1+x^2)^2}}\right) + \cancel{\frac{2x\lambda(x)}{1+x^2}} = 1$$

$$\lambda'(x) = 1$$

Exercice 3 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$, $(1+x^2)y' + 2xy = 1$.

Correction :

1. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $y_0 : x \longmapsto \dfrac{\lambda}{1+x^2}$.
2. On cherche donc une solution particulière sous la forme $y_p : x \longmapsto \dfrac{\lambda(x)}{1+x^2}$:

   y_p est solution de $(1+x^2)y' + 2xy = 1$ si, et seulement si

$$\begin{aligned}(1+x^2)\left(\frac{\lambda'(x)}{1+x^2} - \frac{2x\lambda(x)}{(1+x^2)^2}\right) + \frac{2x\lambda(x)}{1+x^2} &= 1\\ \lambda'(x) &= 1\\ \lambda(x) &= x\ (+\mu).\end{aligned}$$

Exercice 3 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$, $(1+x^2)y' + 2xy = 1$.

Correction :

1. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $y_0 : x \longmapsto \dfrac{\lambda}{1+x^2}$.
2. On cherche donc une solution particulière sous la forme $y_p : x \longmapsto \dfrac{\lambda(x)}{1+x^2}$:

   y_p est solution de $(1+x^2)y' + 2xy = 1$ si, et seulement si

$$\begin{aligned}(1+x^2)\left(\frac{\lambda'(x)}{1+x^2} - \frac{2x\lambda(x)}{(1+x^2)^2}\right) + \frac{2x\lambda(x)}{1+x^2} &= 1\\ \lambda'(x) &= 1\\ \lambda(x) &= x\ (+\mu).\end{aligned}$$

Une solution particulière est donc $y_p : x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^2}$.

Exercice 3 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$, $(1+x^2)y' + 2xy - 1 = 0$.

Correction :

1. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $y_0 : x \longmapsto \dfrac{\lambda}{1+x^2}$.
2. Une solution particulière est donc $y_p : x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^2}$.
3. Les solutions générales de $(1+x^2)y' + 2xy - 1 = 0$ sont donc de la forme :

$$y : x \longmapsto \frac{\lambda}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$, $(1+x^2)y' + 2xy - 1 = 0$.

Correction :

1. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $y_0 : x \longmapsto \dfrac{\lambda}{1+x^2}$.
2. Une solution particulière est donc $y_p : x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^2}$.
3. Les solutions générales de $(1+x^2)y' + 2xy - 1 = 0$ sont donc de la forme :

$$y : x \longmapsto \frac{\lambda + x}{1+x^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dans certains cas de seconds membres bien particuliers, quand a est une fonction constante, on peut systématiquement se dispenser de la méthode de variation de la constante développée ci après, et chercher directement une solution particulière d'une forme pas trop compliquée.

Théorème 4 (Second membre particulier) :

Soient $\mathrm{A}, \alpha \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ un polynôme à coefficients complexes.

On considère l'équation

$$y' + ay = \mathrm{A}\,\mathrm{P}(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}, \quad \text{où } a \in \mathbb{K}. \tag{EDL$_1$}$$

L'équation (EDL_1) admet au moins une solution particulière sous la forme :

$$x \longmapsto \mathrm{B}\,x^m\,\mathrm{Q}(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x},$$

où $\mathrm{B} \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ est un polynôme de degré $\deg(\mathrm{Q}) = \deg(\mathrm{P})$ et

- $m = 0$ si $a + \alpha \neq 0$.
- $m = 1$ sinon.

Ce théorème permet d'envisager les cas suivants :

- $y' + ay = \mathrm{P}(x)$, où $a \in \mathbb{K}$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est une fonction polynômiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré n, admet une solution particulière polynomiale de degré n.

II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

2. Solution particulière

Ce théorème permet d'envisager les cas suivants :

- $y' + ay = \mathrm{P}(x)$, où $a \in \mathbb{K}$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est une fonction polynômiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré n, admet une solution particulière polynomiale de degré n.
- $y' + ay = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{\alpha x}$, où $a, \mathrm{A}, \alpha \in \mathbb{K}$, admet une solution particulière de la forme :

$$x \longmapsto y_p(x) = \mathrm{B}\,\mathrm{e}^{\alpha x} \quad \text{ou} \quad x \longmapsto y_p(x) = \mathrm{B}x\,\mathrm{e}^{\alpha x}, \qquad \mathrm{B} \in \mathbb{K}.$$

Ce théorème permet d'envisager les cas suivants :

- $y' + ay = \mathrm{P}(x)$, où $a \in \mathbb{K}$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est une fonction polynômiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré n, admet une solution particulière polynomiale de degré n.
- $y' + ay = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{\alpha x}$, où $a, \mathrm{A}, \alpha \in \mathbb{K}$, admet une solution particulière de la forme :

$$x \longmapsto y_p(x) = \mathrm{B}\,\mathrm{e}^{\alpha x} \quad \text{ou} \quad x \longmapsto y_p(x) = \mathrm{B}x\,\mathrm{e}^{\alpha x}, \qquad \mathrm{B} \in \mathbb{K}.$$

- $y' + ay = \mathrm{A}\cos(\omega x)$ et $y' + ay = \mathrm{A}\sin(\omega x)$, où $a, \mathrm{A} \in \mathbb{K}$, et $\omega \in \mathbb{R}$, admet une solution particulière de la forme :

$$x \longmapsto y_p(x) = \mathrm{B}\cos(\omega x) + \mathrm{C}\sin(\omega x), \qquad (\mathrm{B}\,;\mathrm{C}) \in \mathbb{K}^2.$$

Ce théorème permet d'envisager les cas suivants :

- $y' + ay = \mathrm{P}(x)$, où $a \in \mathbb{K}$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est une fonction polynômiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré n, admet une solution particulière polynomiale de degré n.
- $y' + ay = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{\alpha x}$, où $a, \mathrm{A}, \alpha \in \mathbb{K}$, admet une solution particulière de la forme :
$$x \longmapsto y_p(x) = \mathrm{B}\,\mathrm{e}^{\alpha x} \quad \text{ou} \quad x \longmapsto y_p(x) = \mathrm{B}x\,\mathrm{e}^{\alpha x}, \qquad \mathrm{B} \in \mathbb{K}.$$
- $y' + ay = \mathrm{A}\cos(\omega x)$ et $y' + ay = \mathrm{A}\sin(\omega x)$, où $a, \mathrm{A} \in \mathbb{K}$, et $\omega \in \mathbb{R}$, admet une solution particulière de la forme :
$$x \longmapsto y_p(x) = \mathrm{B}\cos(\omega x) + \mathrm{C}\sin(\omega x), \qquad (\mathrm{B}\,;\mathrm{C}) \in \mathbb{K}^2.$$
- $y' + ay = \mathrm{A}\mathrm{ch}\,(\omega x)$ et $y' + ay = \mathrm{A}\mathrm{sh}\,(\omega x)$, où $a, \mathrm{A} \in \mathbb{K}$, et $\omega \in \mathbb{R}$, admet une solution particulière de la forme :
$$x \longmapsto y_p(x) = \mathrm{B}\mathrm{ch}\,(\omega x) + \mathrm{C}\mathrm{sh}\,(\omega x), \qquad (\mathrm{B}\,;\mathrm{C}) \in \mathbb{K}^2.$$

Exercice 4 :

Déterminer des solutions particulières pour les équations suivantes :

1. $y' + y\cos(x) = 0$.

Exercice 4 :

Déterminer des solutions particulières pour les équations suivantes :

1. $y' + y\cos(x) = 0.$

Correction :

1. La fonction nulle convient comme à toute équation homogène.

Exercice 4 :

Déterminer des solutions particulières pour les équations suivantes :

2. $(1+x^2)y' + xy = 1 + x + 2x^2$.

Exercice 4 :

Déterminer des solutions particulières pour les équations suivantes :

2. $(1+x^2)y' + xy = 1 + x + 2x^2$.

Correction :

2. Cherchons une solution particulière affine définie par $y_p(x) = ax + b$.

Exercice 4 :

Déterminer des solutions particulières pour les équations suivantes :

2. $(1+x^2)y' + xy = 1 + x + 2x^2$.

Correction :

2. Cherchons une solution particulière affine définie par $y_p(x) = ax + b$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} y_p(x) &= ax + b \\ y_p'(x) &= a \end{aligned}$$

Exercice 4 :

Déterminer des solutions particulières pour les équations suivantes :

2. $(1+x^2)y' + xy = 1 + x + 2x^2$.

Correction :

2. Cherchons une solution particulière affine définie par $y_p(x) = ax + b$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} y_p(x) &= ax + b \\ y_p'(x) &= a \end{aligned}$$

y_p est solution particulière si, et seulement si

$$(1+x^2)y_p' + xy_p = 1 + x + 2x^2$$

Exercice 4 :

Déterminer des solutions particulières pour les équations suivantes :

2. $(1+x^2)y' + xy = 1 + x + 2x^2$.

Correction :

2. Cherchons une solution particulière affine définie par $y_p(x) = ax + b$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} y_p(x) &= ax + b \\ y_p'(x) &= a \end{aligned}$$

y_p est solution particulière si, et seulement si

$$\begin{aligned} (1+x^2)y_p' + xy_p &= 1 + x + 2x^2 \\ (1+x^2)a + x(ax+b) &= 1 + x + 2x^2 \end{aligned}$$

Exercice 4 :

Déterminer des solutions particulières pour les équations suivantes :

2. $(1+x^2)y' + xy = 1 + x + 2x^2$.

Correction :

2. Cherchons une solution particulière affine définie par $y_p(x) = ax + b$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} y_p(x) &= ax + b \\ y_p'(x) &= a \end{aligned}$$

y_p est solution particulière si, et seulement si

$$\begin{aligned} (1+x^2)y_p' + xy_p &= 1 + x + 2x^2 \\ (1+x^2)a + x(ax+b) &= 1 + x + 2x^2 \\ 2ax^2 + bx + a &= 1 + x + 2x^2 \end{aligned}$$

Exercice 4 :

Déterminer des solutions particulières pour les équations suivantes :

2. $(1+x^2)y' + xy = 1 + x + 2x^2$.

Correction :

2. Cherchons une solution particulière affine définie par $y_p(x) = ax + b$:

$$2ax^2 + bx + a = 1 + x + 2x^2 \iff \begin{cases} 2a = 2 \\ b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Exercice 4 :

Déterminer des solutions particulières pour les équations suivantes :

2. $(1+x^2)y' + xy = 1 + x + 2x^2$.

Correction :

2. Cherchons une solution particulière affine définie par $y_p(x) = ax + b$:

$$2ax^2 + bx + a = 1 + x + 2x^2 \iff \begin{cases} 2a = 2 \\ b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Une solution particulière est $y_p : x \longmapsto 1 + x$.

Exercice 4 :

Déterminer des solutions particulières pour les équations suivantes :

3. $y' - 2y = 3\cos(x) - \sin(x)$.

Exercice 4 :

Déterminer des solutions particulières pour les équations suivantes :

3. $y' - 2y = 3\cos(x) - \sin(x)$.

Correction :

3. Cherchons une solution particulière sous la forme

$$y_p : x \longmapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x).$$

Exercice 4 :

Déterminer des solutions particulières pour les équations suivantes :

3. $y' - 2y = 3\cos(x) - \sin(x)$.

Correction :

3. Cherchons une solution particulière sous la forme

$$y_p : x \longmapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x).$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} y_p(x) &= \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) \\ y_p'(x) &= \mu\cos(x) - \lambda\sin(x) \end{aligned}$$

Exercice 4 :

Déterminer des solutions particulières pour les équations suivantes :

3. $y' - 2y = 3\cos(x) - \sin(x)$.

Correction :

3. Cherchons une solution particulière sous la forme

$$y_p : x \longmapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x).$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} y_p(x) &= \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) \\ y_p'(x) &= \mu\cos(x) - \lambda\sin(x) \end{aligned}$$

y_p est solution particulière si, et seulement si

$$y_p' - 2y_p = 3\cos(x) - \sin(x)$$

Exercice 4 :

Déterminer des solutions particulières pour les équations suivantes :

3. $y' - 2y = 3\cos(x) - \sin(x)$.

Correction :

3. Cherchons une solution particulière sous la forme

$$y_p : x \longmapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x).$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \begin{aligned} y_p(x) &= \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) \\ y_p'(x) &= \mu\cos(x) - \lambda\sin(x) \end{aligned}$$

y_p est solution particulière si, et seulement si

$$\begin{aligned} y_p' - 2y_p &= 3\cos(x) - \sin(x) \\ (\mu - 2\lambda)\cos(x) - (\lambda + 2\mu)\sin(x) &= 3\cos(x) - \sin(x) \end{aligned}$$

Exercice 4 :

Déterminer des solutions particulières pour les équations suivantes :

3. $y' - 2y = 3\cos(x) - \sin(x)$.

Correction :

3. Cherchons une solution particulière sous la forme

$$y_p : x \longmapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x).$$

y_p est solution particulière si, et seulement si

$$(\mu - 2\lambda)\cos(x) - (\lambda + 2\mu)\sin(x) = 3\cos(x) - \sin(x) \iff \begin{cases} \mu - 2\lambda = 3 \\ \lambda + 2\mu = 1 \end{cases}$$

Exercice 4 :

Déterminer des solutions particulières pour les équations suivantes :

3. $y' - 2y = 3\cos(x) - \sin(x)$.

Correction :

3. Cherchons une solution particulière sous la forme

$$y_p : x \longmapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x).$$

y_p est solution particulière si, et seulement si

$$(\mu - 2\lambda)\cos(x) - (\lambda + 2\mu)\sin(x) = 3\cos(x) - \sin(x) \iff \begin{cases} \mu - 2\lambda = 3 \\ \lambda + 2\mu = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

Exercice 4 :

Déterminer des solutions particulières pour les équations suivantes :

3. $y' - 2y = 3\cos(x) - \sin(x)$.

Correction :

3. Cherchons une solution particulière sous la forme

$$y_p : x \longmapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x).$$

y_p est solution particulière si, et seulement si

$$(\mu - 2\lambda)\cos(x) - (\lambda + 2\mu)\sin(x) = 3\cos(x) - \sin(x) \iff \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

Une solution particulière est $y_p : x \longmapsto -\cos(x) + \sin(x)$.

Exercice 4 :

Déterminer des solutions particulières pour les équations suivantes :

1. $y' + y\cos(x) = 0$.
2. $(1 + x^2)y' + xy = 1 + x + 2x^2$.
3. $y' - 2y = 3\cos(x) - \sin(x)$.

Correction :

1. La fonction nulle convient comme à toute équation homogène.
2. Une solution particulière est $y_p : x \longmapsto 1 + x$.
3. Une solution particulière est $y_p : x \longmapsto -\cos(x) + \sin(x)$.

Définition 4 (Problème de Cauchy d'une EDL_1) :

Soient $a, b \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$, $y_0 \in \mathbb{K}$ et $x_0 \in \mathrm{I}$.

On appelle problème de Cauchy associé à l'équation différentielle du premier ordre tout système de la forme :

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) & (\mathrm{EDL}_1) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \qquad (\mathrm{C.L}_1)$$

La condition $y(x_0) = y_0$ est appelée sa condition initiale.

Définition 4 (Problème de Cauchy d'une EDL_1) :

Soient $a, b \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$, $y_0 \in \mathbb{K}$ et $x_0 \in \mathrm{I}$.

On appelle problème de Cauchy associé à l'équation différentielle du premier ordre tout système de la forme :

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) & (\mathrm{EDL}_1) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \qquad (\mathrm{C.L}_1)$$

La condition $y(x_0) = y_0$ est appelée sa condition initiale.

Théorème 5 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les EDL_1) :

Soient $a, b \in \mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$, $x_0 \in \mathrm{I}$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.

Pour tous $x_0 \in \mathrm{I}$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, le système $(\mathrm{C.L}_1)$ possède une unique solution sur I.

Définition 4 (Problème de Cauchy d'une EDL_1) :

$$\left\{\begin{array}{ll} y' + a(x)y = b(x) & \qquad (\mathrm{EDL}_1) \\ y(x_0) = y_0. & \end{array}\right. \qquad (\mathrm{C.L}_1)$$

Preuve :
Soit A la primitive de la fonction continue a s'annulant en x_0.

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \qquad y' + a(x)y \;=\; b(x)$$

Définition 4 (Problème de Cauchy d'une EDL_1) :

$$\left\{\begin{array}{ll} y' + a(x)y = b(x) & \qquad (\mathrm{EDL}_1) \\ y(x_0) = y_0. & \end{array}\right. \qquad (\mathrm{C.L}_1)$$

Preuve :
Soit A la primitive de la fonction continue a s'annulant en x_0.
Comme $\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)} \neq 0$ sur I, on a une équation équivalente en multipliant les deux membres de l'équation par $\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}$:

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ \ \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}(y' + a(x)y) = \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)} b(x)$$

Définition 4 (Problème de Cauchy d'une EDL_1) :

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) & \qquad (\mathrm{EDL}_1) \\ y(x_0) = y_0. & \end{cases} \qquad (\mathrm{C.L}_1)$$

Preuve :

Soit A la primitive de la fonction continue a s'annulant en x_0.

Comme $\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)} \neq 0$ sur I, on a une équation équivalente en multipliant les deux membres de l'équation par $\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}$:

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ \ \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}(y' + a(x)y) = \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)} b(x)$$

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)} y(x)\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)} b(x)$$

Définition 4 (Problème de Cauchy d'une EDL_1) :

$$\left\{\begin{array}{ll} y' + a(x)y = b(x) & (\mathrm{EDL}_1) \\ y(x_0) = y_0. & \end{array}\right. \qquad (\mathrm{C.L}_1)$$

Preuve :

Soit A la primitive de la fonction continue a s'annulant en x_0.

Comme $\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)} \neq 0$ sur I, on a une équation équivalente en multipliant les deux membres de l'équation par $\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}$:

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}(y' + a(x)y) = \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)} b(x)$$

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)} y(x)\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)} b(x)$$

Avec $y(x_0) = y_0$, en primitivant entre x_0 et $x \in \mathrm{I}$, on obtient :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)} y(x) - \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x_0)} y_0 = \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\mathrm{A}(u)} b(u)\,\mathrm{d}u$$

Définition 4 (Problème de Cauchy d'une EDL_1) :

$$\left\{\begin{array}{ll} y' + a(x)y = b(x) & \qquad (\mathrm{EDL}_1) \\ y(x_0) = y_0. & \end{array}\right. \qquad\qquad (\mathrm{C.L}_1)$$

Preuve :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ \ \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}(y' + a(x)y) = \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}b(x)$$

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}y(x)\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}b(x)$$

Avec $y(x_0) = y_0$, en primitivant entre x_0 et $x \in \mathrm{I}$, on obtient :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}y(x) - \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x_0)}y_0 = \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\mathrm{A}(u)}b(u)\,\mathrm{d}u$$

Comme $\mathrm{A}(x_0) = 0$, on a :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}y(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\mathrm{A}(u)}b(u)\,\mathrm{d}u$$

Définition 4 (Problème de Cauchy d'une EDL_1) :

$$\left\{\begin{array}{ll} y' + a(x)y = b(x) & (\mathrm{EDL}_1) \\ y(x_0) = y_0. & \end{array}\right. \qquad (\mathrm{C.L}_1)$$

Preuve :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ \ \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}(y' + a(x)y) = \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)} b(x)$$

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)} y(x)\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)} b(x)$$

Avec $y(x_0) = y_0$, en primitivant entre x_0 et $x \in \mathrm{I}$, on obtient :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)} y(x) - \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x_0)} y_0 = \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\mathrm{A}(u)} b(u)\,\mathrm{d}u$$

Comme $\mathrm{A}(x_0) = 0$, on a :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)} y(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\mathrm{A}(u)} b(u)\,\mathrm{d}u$$

$$y(t) = \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\mathrm{A}(u)} b(u)\,\mathrm{d}u\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$$

Définition 4 (Problème de Cauchy d'une EDL_1) :

$$\left\{\begin{array}{ll} y' + a(x)y = b(x) & \qquad (\mathrm{EDL}_1) \\ y(x_0) = y_0. & \end{array}\right. \qquad (\mathrm{C.L}_1)$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}y(x) - y_0 &= \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\mathrm{A}(u)}b(u)\,\mathrm{d}u \\ y(t) &= \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\mathrm{A}(u)}b(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} \\ &= \quad y_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} + \left(\int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\mathrm{A}(u)}b(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}. \end{aligned}$$

Définition 4 (Problème de Cauchy d'une EDL_1) :

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) & (\mathrm{EDL}_1) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \qquad (\mathrm{C.L}_1)$$

Preuve :

$$\begin{aligned} e^{A(x)}y(x) - y_0 &= \int_{x_0}^{x} e^{A(u)}b(u)\,du \\ y(t) &= \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(u)}b(u)\,du\right) e^{-A(x)} \\ &= \underbrace{y_0\, e^{-A(x)}}_{y_0(x)} + \underbrace{\left(\int_{x_0}^{x} e^{A(u)}b(u)\,du\right) e^{-A(x)}}_{y_p(x)}. \end{aligned}$$

Définition 4 (Problème de Cauchy d'une EDL_1) :

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) & (\mathrm{EDL}_1) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \qquad (\mathrm{C.L}_1)$$

Preuve :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}y(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\mathrm{A}(u)}b(u)\,\mathrm{d}u$$

$$y(t) = \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\mathrm{A}(u)}b(u)\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$$

$$= \underbrace{y_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}}_{y_0(x)} + \underbrace{\left(\int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\mathrm{A}(u)}b(u)\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}}_{y_p(x)}.$$

La solution y est, en particulier, déterminée de manière unique d'où le résultat.

Définition 4 (Problème de Cauchy d'une EDL_1) :

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) & (\mathrm{EDL}_1) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \qquad (\mathrm{C.L}_1)$$

Preuve :

$$y(t) = \underbrace{y_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}}_{y_0(x)} + \underbrace{\left(\int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\mathrm{A}(u)} b(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}}_{y_p(x)}.$$

La solution y est, en particulier, déterminée de manière unique d'où le résultat.

Remarque : La preuve de ce résultat montre que toute solution de $(\mathrm{C.L}_1)$ est bien de la forme $x \longmapsto \lambda(x)e^{-\mathrm{A}(x)}$, ce qui justifie la méthode (3) de variation de la constante.

Commentaires :

- Les problèmes de Cauchy associés à des équations linéaires **homogènes** du premier ordre ont donc toujours une solution unique : la valeur imposée permet de fixer la constante λ.

Commentaires :

- Les problèmes de Cauchy associés à des équations linéaires **homogènes** du premier ordre ont donc toujours une solution unique : la valeur imposée permet de fixer la constante λ.
- La fonction exponentielle est l'unique solution de l'équation différentielle $y' = y$, avec condition initiale $y(0) = 1$.

Commentaires :

- Les problèmes de Cauchy associés à des équations linéaires **homogènes** du premier ordre ont donc toujours une solution unique : la valeur imposée permet de fixer la constante λ.
- La fonction exponentielle est l'unique solution de l'équation différentielle $y' = y$, avec condition initiale $y(0) = 1$.
- Dans la même idée, l'unique solution de $y' + a(x)y = 0$ telle que $y(x_0) = 0$ est la fonction nulle.
  En effet, la fonction nulle est solution et vérifie $y(x_0) = 0$.
  D'après le théorème (??), c'est la seule.

Commentaires :

- Les problèmes de Cauchy associés à des équations linéaires **homogènes** du premier ordre ont donc toujours une solution unique : la valeur imposée permet de fixer la constante λ.
- La fonction exponentielle est l'unique solution de l'équation différentielle $y' = y$, avec condition initiale $y(0) = 1$.
- Dans la même idée, l'unique solution de $y' + a(x)y = 0$ telle que $y(x_0) = 0$ est la fonction nulle.
  En effet, la fonction nulle est solution et vérifie $y(x_0) = 0$.
  D'après le théorème (??), c'est la seule.
- La formule $y(t) = \left(y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\mathrm{A}(u)} b(u)\,\mathrm{d}u\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ donnant la forme générale de la solution de $(\mathrm{C.L}_1)$ n'est à peu près d'aucune utilité pour le calcul pratique de solution, puisqu'on ne saura pas, en général, calculer l'intégrale. Pour réellement résoudre une équation différentielle, il faut (et c'est bien le plus difficile) trouver une solution particulière.

Exemple 9 :

Considérons l'équation différentielle $y' + 2xy = 0$ (sur $\mathbb{R}$), avec comme condition initiale $y(1) = 2$.

Les solutions de l'équation sont de la forme $\lambda\,\mathrm{e}^{-x^2}$, et la condition initiale se traduit alors par $\lambda\,\mathrm{e}^{-1} = 2$, soit $\lambda = 2\,\mathrm{e}$.

Donc, l'unique solution de ce problème de Cauchy est la fonction

$$y :\ x \longmapsto 2\,\mathrm{e}^{1-x^2}.$$

Exercice 5 :

Résoudre $y' - \dfrac{1}{2x}y = \sqrt{x}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+^*$ avec $y(1) = 0$.

Exercice 5 :

Résoudre $y' - \dfrac{1}{2x}y = \sqrt{x}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+^*$ avec $y(1) = 0$.

Correction :

1. La solution de l'équation homogène sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \longmapsto \lambda\sqrt{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 :

Résoudre $y' - \dfrac{1}{2x}y = \sqrt{x}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+^*$ avec $y(1) = 0$.

Correction :

1. La solution de l'équation homogène sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \longmapsto \lambda\sqrt{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Par la méthode de variation de la constante, une solution particulière de $(\mathrm{C.L}_1)$ est $x \longmapsto x\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 5 :

Résoudre $y' - \dfrac{1}{2x}y = \sqrt{x}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$ avec $y(1) = 0$.

Correction :

1. La solution de l'équation homogène sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \longmapsto \lambda\sqrt{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Par la méthode de variation de la constante, une solution particulière de $(C.L_1)$ est $x \longmapsto x\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. La solution générale de $(C.L_1)$ est donc $x \longmapsto (\lambda + x)\sqrt{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 :

Résoudre $y' - \dfrac{1}{2x} y = \sqrt{x}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+^*$ avec $y(1) = 0$.

Correction :

1. La solution de l'équation homogène sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \longmapsto \lambda\sqrt{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Par la méthode de variation de la constante, une solution particulière de $(\mathrm{C.L}_1)$ est $x \longmapsto x\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. La solution générale de $(\mathrm{C.L}_1)$ est donc $x \longmapsto (\lambda + x)\sqrt{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. La condition initiale impose $\lambda = -1$.

Exercice 5 :

Résoudre $y' - \dfrac{1}{2x}y = \sqrt{x}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+^*$ avec $y(1) = 0$.

Correction :

1. La solution de l'équation homogène sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \longmapsto \lambda\sqrt{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Par la méthode de variation de la constante, une solution particulière de $(\mathrm{C.L}_1)$ est $x \longmapsto x\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. La solution générale de $(\mathrm{C.L}_1)$ est donc $x \longmapsto (\lambda + x)\sqrt{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. La condition initiale impose $\lambda = -1$.

La solution du problème de Cauchy considéré est donc $x \longmapsto (x-1)\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Corollaire 4.1 (Étude qualitatives des courbes intégrales) :

(Hors-Programme)

On considère deux fonctions a et b continues sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ ainsi que l'équation différentielle

$$y' + a(x)y = b(x). \tag{EDL_1}$$

Alors :

- Une seule courbe intégrale définie sur I passe par le point $\mathrm{M}_0(x_0, y_0) \in \mathrm{I} \times \mathbb{K}$.
- Deux courbes intégrales distinctes ne peuvent se couper dans $\mathrm{I} \times \mathbb{K}$.

Corollaire 4.2 (Équation linéaire $y' + ay = b$ à coefficients constants) :

Soit a et b deux éléments de $\mathbb{K}$.

L 'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ est :

$$\mathcal{S} = \left\{ y : x \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-ax} + \frac{b}{a},\ \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

En particulier, l'unique solution telle que $y(x_0) = y_0$ est :

$$y : x \longmapsto \left(y_0 - \frac{b}{a} \right) \mathrm{e}^{-a(x-x_0)} + \frac{b}{a}.$$

Exemple 10 (Un peu de physique : Circuit RL) :

On considère un circuit électrique constitué d'un échelon de tension E, une résistance R, une bobine d'inductance L et un interrupteur.

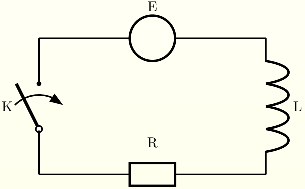


Figure 1 – Circuit RL

Exemple 10 (Un peu de physique : Circuit RL) :

À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur, qui était jusque là ouvert.

On note $i : t \longmapsto i(t)$ l'intensité dans le circuit en fonction du temps t.

L'intensité vérifie l'équation différentielle :

$$\mathrm{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \mathrm{R}i = \mathrm{E}, \tag{2}$$

et la condition initiale $i(0) = 0$.

En notant $\tau = \dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}}$ (constante de temps du circuit), l'équation précédente s'écrit :

$$i' + \frac{i}{\tau} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{L}}. \tag{3}$$

Exemple 10 (Un peu de physique : Circuit RL) :

$$i' + \frac{i}{\tau} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{L}}. \tag{2}$$

1. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $i_{\mathrm{H}} : t \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$,

Exemple 10 (Un peu de physique : Circuit RL) :

$$i' + \frac{i}{\tau} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{L}}. \tag{2}$$

1. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $i_{\mathrm{H}} : t \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$,
2. la fonction constante à $i_p : t \longmapsto \dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}$ est solution particulière de l'équation.

Exemple 10 (Un peu de physique : Circuit RL) :

$$i' + \frac{i}{\tau} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{L}}. \tag{2}$$

1. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $i_{\mathrm{H}} : t \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$,
2. la fonction constante à $i_p : t \longmapsto \dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}$ est solution particulière de l'équation.
3. Les solutions générales sont donc de la forme

$$i : t \longmapsto \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}} + \lambda\, \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{3}$$

Exemple 10 (Un peu de physique : Circuit RL) :

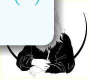
$$i' + \frac{i}{\tau} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{L}}. \tag{2}$$

1. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $i_{\mathrm{H}} : t \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$,
2. la fonction constante à $i_p : t \longmapsto \dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}$ est solution particulière de l'équation.
3. Les solutions générales sont donc de la forme

$$i : t \longmapsto \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}} + \lambda\, \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{3}$$

4. Comme $i(0) = 0$, on obtient $\lambda = -\dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}$ soit :

$$i : t \longmapsto i(t) = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad \text{(si } t \geqslant 0\text{, bien entendu).} \tag{4}$$



Exemple 10 (Un peu de physique : Circuit RL) :

$$i : t \longmapsto i(t) = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad \text{(si } t \geqslant 0\text{, bien entendu).} \tag{2}$$

Commentaires : En pratique, $t \in [0\,;+\infty[$ et $\tau > 0$. La fonction i est alors une fonction d'atténuation dont la courbe ressemble à la figure ci-dessous.

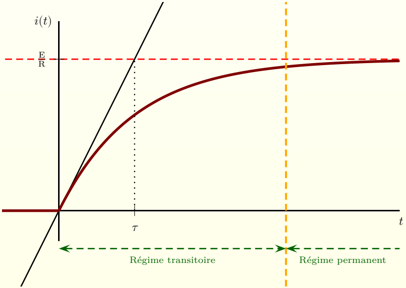


Figure 1 – Intensité dans un circuit RL en régime forcé.

Exemple 10 (Un peu de physique : Circuit RL) :

$$i : t \longmapsto i(t) = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad \text{(si } t \geqslant 0\text{, bien entendu).} \tag{2}$$

Commentaires :

- En particulier, la fonction i est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Exemple 10 (Un peu de physique : Circuit RL) :

$$i : t \longmapsto i(t) = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad \text{(si } t \geqslant 0\text{, bien entendu).} \tag{2}$$

Commentaires :

- La courbe de i admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = \dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}$.

Exemple 10 (Un peu de physique : Circuit RL) :

$$i : t \longmapsto i(t) = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad \text{(si } t \geqslant 0\text{, bien entendu).} \tag{2}$$

Commentaires :

- La tangente à la courbe en $t = 0$ a pour coefficient directeur

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0) = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{L}} - \mathrm{R}i(0) = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{L}}.$$

Cette tangente, d'équation $y = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{L}}\,t$, coupe donc l'asymptote à la courbe $y = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}$ en $x = \frac{\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}}{\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{L}}} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}} = \tau$.

Exemple 10 (Un peu de physique : Circuit RL) :

$$i : t \longmapsto i(t) = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad (\text{si } t \geqslant 0, \text{ bien entendu}). \tag{2}$$

Commentaires :

- En physique, on dit que l'intensité est :
  - en régime permanent quand elle s'approche fortement de son asymptote.
  - et en régime transitoire dans sa période de forte croissance.

Exemple 10 (Un peu de physique : Circuit RL) :

$$i : t \longmapsto i(t) = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad \text{(si } t \geqslant 0\text{, bien entendu).} \tag{2}$$

Commentaires :

- En physique, on dit que l'intensité est :
  - en **régime permanent** quand elle s'approche fortement de son asymptote.
  - et en **régime transitoire** dans sa période de forte croissance.

  En pratique, on considère le **régime permanent** atteint pour $t = 3\tau$. À à cet instant, l'intensité vaut environ 95% de sa valeur maximale.

Exercice 6 :

Quelle est la réponse en intensité d'un circuit RL en régime alternatif lorsque $\mathrm{E} = \sqrt{2}\cos(\omega t)$, où $\omega \in \mathbb{R}$?

III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Équations et opérateurs linéaires
2. Équations différentielles linéaires d'ordre 1
3. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants
   - Solutions de l'équation homogène
   - Solution générale
   - Problème de Cauchy associé à une EDL_2

III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Le programme prévoit l'étude des équations différentielles linéaires du deuxième ordre, à coefficients constants

$$ay'' + by' + cy = f(x) \qquad (\mathrm{EDL}_2)$$

où a, b, c sont des constantes, et f est une fonction de la forme :

$$x \longmapsto \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{\alpha x} \text{ avec } \mathrm{A}, \alpha \in \mathbb{C} \quad \text{ou} \quad x \longmapsto \mathrm{B}\cos(\omega x) \quad \text{ou} \quad x \longmapsto \mathrm{B}\sin(\omega x) \text{ avec } \mathrm{B} \in \mathbb{C}, \omega \in \mathbb{R}.$$

III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Le programme prévoit l'étude des équations différentielles linéaires du deuxième ordre, à coefficients constants

$$ay'' + by' + cy = f(x) \qquad (\mathrm{EDL}_2)$$

où a, b, c sont des constantes, et f est une fonction de la forme :

$$x \longmapsto \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{\alpha x} \textit{ avec } \mathrm{A}, \alpha \in \mathbb{C} \quad \textit{ou} \quad x \longmapsto \mathrm{B}\cos(\omega x) \quad \textit{ou} \quad x \longmapsto \mathrm{B}\sin(\omega x) \textit{ avec } \mathrm{B} \in \mathbb{C}, \omega \in \mathbb{R}.$$

Les méthodes ne sont pas très différentes de celles vues pour le premier ordre même si leur complexité augmente.

En accord avec le programme, on se restreindra au cas de **coefficients constants** :

$$ay'' + by' + cy = f(x), \text{ où } a, b, c \in \mathbb{K} \text{ et } f \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{K}). \qquad (\mathrm{EDL}_2)$$

L'équation homogène associée (EDL_2) s'écrit :

$$ay'' + by' + cy = 0. \qquad (\mathrm{EDL}_2)_0$$

À retenir :

Solution générale de (EDL_2) $=$ Solution particulière de (EDL_2) $+$ Solution générale de l'équation homogène $(\mathrm{EDL}_2)_0$

À retenir :

Solution générale de (EDL_2)	$=$	Solution particulière de (EDL_2)	$+$	Solution générale de l'équation homogène $\left(\mathrm{EDL}_2\right)_0$

Notre démarche sera donc la même que pour les EDL_1.

En pratique, ce sont généralement les solutions réelles des équations différentielles qui nous intéressent, mais nous commencerons pourtant par le cas complexe car c'est lui le cas théorique fondamental, celui dont la preuve est naturelle, et ceci entièrement grâce à l'exponentielle complexe.

En pratique, ce sont généralement les solutions réelles des équations différentielles qui nous intéressent, mais nous commencerons pourtant par le cas complexe car c'est lui le cas théorique fondamental, celui dont la preuve est naturelle, et ceci entièrement grâce à l'exponentielle complexe.

Définition 5 (Polynôme caractéristique) :

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

On appelle polynôme caractéristique de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ le polynôme $\mathrm{P}_{car} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$ de discriminant $\Delta_{car} = b^2 - 4ac$.

Théorème 5 (Résolution de $(\mathrm{EDL}_2)_0$ dans le cas complexe) :

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

On considère l'équation différentielle linéaire

$$ay'' + by' + cy = 0. \qquad (\mathrm{EDL}_2)_0$$

- $\mathrm{P}_{car} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$ son polynôme caractéristique et $\Delta_{car} = b^2 - 4ac$ son discriminant.
- $\mathcal{S}_0^{\mathbb{C}}$ l'ensemble des solutions de $(\mathrm{EDL}_2)_0$.

Théorème 5 (Résolution de $(\mathrm{EDL}_2)_0$ dans le cas complexe) :

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

On considère l'équation différentielle linéaire

$$ay'' + by' + cy = 0. \qquad (\mathrm{EDL}_2)_0$$

Alors, les solutions sont données par le tableau suivant où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$:

Δ_{car}	Racines de P_{car}	$\mathcal{S}_0^{\mathbb{C}}$
$\Delta_{car} \neq 0$	r_1 et r_2 distinctes	$x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{r_1 x} + \mu\,\mathrm{e}^{r_2 x}$
$\Delta_{car} = 0$	r	$x \longmapsto (\lambda x + \mu)\,\mathrm{e}^{rx}$

Autrement dit, $\mathcal{S}_0^{\mathbb{C}} = \left\{ \lambda u + \mu v \,/\, (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$ où

- si $\Delta_{car} \neq 0$ alors $u : x \longmapsto \mathrm{e}^{r_1 x}$ et $v : x \longmapsto \mathrm{e}^{r_2 x}$.
- Si $\Delta_{car} = 0$ alors $u : x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}$ et $v : x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{rx}$.

Dans les deux cas, toute solution est combinaison linéaire de deux solutions fondamentales u, v, déterminées à partir des solutions de l'équation caractéristique.

Autrement dit, $\mathcal{S}_0^{\mathbb{C}} = \left\{ \lambda u + \mu v \,/\, (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$ où

- si $\Delta_{car} \neq 0$ alors $u : x \longmapsto \mathrm{e}^{r_1 x}$ et $v : x \longmapsto \mathrm{e}^{r_2 x}$.
- Si $\Delta_{car} = 0$ alors $u : x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}$ et $v : x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{rx}$.

Dans les deux cas, toute solution est combinaison linéaire de deux solutions fondamentales u, v, déterminées à partir des solutions de l'équation caractéristique.

Ces solutions fondamentales ne sont pas multiples l'une de l'autre.

On dira bientôt qu'elles sont libres et qu'elles constituent une base de $\mathcal{S}_0^{\mathbb{C}}$.

On dira alors de ce dernier qu'il constitue un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}^2(\mathbb{R}\,;\mathbb{C})$ de dimension 2 et que, dès lors, $\mathcal{S}^{\mathbb{C}}$ est un plan affine de direction $\mathcal{S}_0^{\mathbb{C}}$.

Remarques :

- Si $\Delta_{car} \neq 0$, la première étape de la méthode exposée pour trouver ces solutions nous fournissait déjà la totalité des solutions (puisqu'on pouvait choisir indifféremment r_1 ou r_2 et puisque l'ensemble des solutions est stable par combinaison linéaire).
  La deuxième étape ne sert dans ce cas seulement qu'à prouver qu'il n'y a pas d'autre solution.

Remarques :

- Si $\Delta_{car} \neq 0$, la première étape de la méthode exposée pour trouver ces solutions nous fournissait déjà la totalité des solutions (puisqu'on pouvait choisir indifféremment r_1 ou r_2 et puisque l'ensemble des solutions est stable par combinaison linéaire).
  La deuxième étape ne sert dans ce cas seulement qu'à prouver qu'il n'y a pas d'autre solution.
- Dans le cas où $\Delta_{car} = 0$, la deuxième étape nous fournit une solution que la première étape ne nous permettait pas d'obtenir.
  Même si les coefficients a et b sont réels, il peut arriver que l'expression obtenue au bout fasse intervenir des exponentielles complexes (cas où $\Delta_{car} < 0$).
  La solution générale obtenue est alors une fonction à valeurs complexes. Parmi celles-ci, certaines sont à valeurs réelles. On est souvent intéressé par ces fonctions spécifiquement. C'est le propos de la proposition (6) et du théorème (7).

Remarques :

- Si $\Delta_{car} \neq 0$, la première étape de la méthode exposée pour trouver ces solutions nous fournissait déjà la totalité des solutions (puisqu'on pouvait choisir indifféremment r_1 ou r_2 et puisque l'ensemble des solutions est stable par combinaison linéaire).
  La deuxième étape ne sert dans ce cas seulement qu'à prouver qu'il n'y a pas d'autre solution.
- Dans le cas où $\Delta_{car} = 0$, la deuxième étape nous fournit une solution que la première étape ne nous permettait pas d'obtenir.
  Même si les coefficients a et b sont réels, il peut arriver que l'expression obtenue au bout fasse intervenir des exponentielles complexes (cas où $\Delta_{car} < 0$).
  La solution générale obtenue est alors une fonction à valeurs complexes. Parmi celles-ci, certaines sont à valeurs réelles. On est souvent intéressé par ces fonctions spécifiquement. C'est le propos de la proposition (6) et du théorème (7).
- La méthode exposée ci-dessus est aussi valable pour des coefficients variables, à partir du moment où on connait une solution particulière. Elle trouve là toute sa pertinence.

Exercice 7 :

Déterminer les solutions complexes des équations suivantes :

1. $y'' + 4y = 0$

Exercice 7 :

Déterminer les solutions complexes des équations suivantes :

1. $y'' + 4y = 0$
2. $y'' - y' + (1+i)y = 0$

Exercice 7 :

Déterminer les solutions complexes des équations suivantes :

1. $y'' + 4y = 0$
2. $y'' - y' + (1 + i)y = 0$
3. $y'' - (2 + i)y' + (1 + i)y = 0$

Voici un résultat permettant de retrouver facilement l'ensemble des solutions à valeurs réelles :

Proposition 6 (Passer des solutions complexes aux solutions réelles) :

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

On considère l'équation différentielle linéaire à coefficients réels :

$$ay'' + by' + cy = 0. \qquad \left(\mathrm{EDL}_2\right)_{0,\mathbb{R}}$$

En notant $\mathcal{S}_0^{\mathbb{C}}$ l'ensemble des solutions de $\left(\mathrm{EDL}_2\right)_{0,\mathbb{R}}$ à valeurs complexes et $\mathcal{S}_0^{\mathbb{R}}$ celui des solutions à valeurs réelles, on a :

$$\mathcal{S}_0^{\mathbb{R}} = \left\{ \mathrm{Re}\,(y) \ / \ y \in \mathcal{S}_0^{\mathbb{C}} \right\}.$$

Théorème 7 (Résolution de $(\mathrm{EDL}_2)_0$ dans le cas réel) :

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

On considère l'équation différentielle linéaire

$$ay'' + by' + cy = 0. \qquad (\mathrm{EDL}_2)_{0,\mathbb{R}}$$

- $\mathrm{P}_{car} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$ son polynôme caractéristique et $\Delta_{car} = b^2 - 4ac$ son discriminant.
- $\mathcal{S}_0^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des solutions de $(\mathrm{EDL}_2)_{0,\mathbb{R}}$.

Théorème 7 (Résolution de $(\mathrm{EDL}_2)_0$ dans le cas réel) :

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

On considère l'équation différentielle linéaire

$$ay'' + by' + cy = 0. \qquad (\mathrm{EDL}_2)_{0,\mathbb{R}}$$

Alors, les solutions sont données par le tableau suivant où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

Δ_{car}	Racines de P_{car}	$\mathcal{S}_0^{\mathbb{R}}$
$\Delta_{car} > 0$	r_1 et r_2 réelles distinctes	$x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{r_1 x} + \mu\,\mathrm{e}^{r_2 x}$
$\Delta_{car} = 0$	$r\ (\in \mathbb{R})$	$x \longmapsto (\lambda x + \mu)\ \mathrm{e}^{rx}$
$\Delta_{car} < 0$	$r \pm \mathrm{i}\,\omega$ complexes conjuguées	$x \longmapsto\ \mathrm{e}^{rx}\Big(\lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)\Big)$

Autrement dit, $\mathcal{S}_0^{\mathbb{R}} = \left\{ \lambda u + \mu v \,/\, (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ où

- si $\Delta_{car} \neq 0$ alors $u : x \longmapsto \mathrm{e}^{r_1 x}$ et $v : x \longmapsto \mathrm{e}^{r_2 x}$.

Autrement dit, $\mathcal{S}_0^{\mathbb{R}} = \left\{ \lambda u + \mu v \,/\, (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ où

- si $\Delta_{car} \neq 0$ alors $u : x \longmapsto \mathrm{e}^{r_1 x}$ et $v : x \longmapsto \mathrm{e}^{r_2 x}$.
- Si $\Delta_{car} = 0$ alors $u : x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}$ et $v : x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{rx}$.

Autrement dit, $\mathcal{S}_0^{\mathbb{R}} = \left\{ \lambda u + \mu v \,/\, (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ où

- si $\Delta_{car} \neq 0$ alors $u : x \longmapsto \mathrm{e}^{r_1 x}$ et $v : x \longmapsto \mathrm{e}^{r_2 x}$.
- Si $\Delta_{car} = 0$ alors $u : x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}$ et $v : x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{rx}$.
- Si $\Delta_{car} < 0$ alors $u : x \longmapsto \mathrm{e}^{rx} \cos(\omega x)$ et $v : x \longmapsto \mathrm{e}^{rx} \sin(\omega x)$.

Autrement dit, $\mathcal{S}_0^{\mathbb{R}} = \left\{ \lambda u + \mu v \,/\, (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ où

- si $\Delta_{car} \neq 0$ alors $u : x \longmapsto \mathrm{e}^{r_1 x}$ et $v : x \longmapsto \mathrm{e}^{r_2 x}$.
- Si $\Delta_{car} = 0$ alors $u : x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}$ et $v : x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{rx}$.
- Si $\Delta_{car} < 0$ alors $u : x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}\cos(\omega x)$ et $v : x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}\sin(\omega x)$.

Comme dans le cas complexe, toute solution est combinaison linéaire de deux solutions fondamentales u, v, déterminées à partir des solutions de l'équation caractéristique.

Autrement dit, $\mathcal{S}_0^{\mathbb{R}} = \left\{ \lambda u + \mu v \,/\, (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ où

- si $\Delta_{car} \neq 0$ alors $u : x \longmapsto \mathrm{e}^{r_1 x}$ et $v : x \longmapsto \mathrm{e}^{r_2 x}$.
- Si $\Delta_{car} = 0$ alors $u : x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}$ et $v : x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{rx}$.
- Si $\Delta_{car} < 0$ alors $u : x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}\cos(\omega x)$ et $v : x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}\sin(\omega x)$.

Exemple ll :

En physique, on privilégie d'autres formes équivalentes des solutions.

- Dans le cas périodique, on peut aussi réexprimer les solutions en regroupant sin et cos à l'aide d'une transformation de Fresnel :

$$\mathcal{S}_0^{\mathbb{R}} = \left\{ y : x \longmapsto \mathrm{A}\, \mathrm{e}^{rx} \cos(\omega x + \varphi),\ (\mathrm{A}\,;\varphi) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exemple II :

En physique, on privilégie d'autres formes équivalentes des solutions.

- Enfin, dans le cas $\Delta > 0$, les solutions peuvent aussi s'exprimer sous une forme trigonométrique mais hyperbolique cette fois :

$$\lambda_1 \,\mathrm{e}^{r_1 x} + \mu_1 \,\mathrm{e}^{r_2 x} = \mathrm{e}^{\frac{r_1+r_2}{2}\,x}\left(\lambda_1 \,\mathrm{e}^{\frac{r_1-r_2}{2}\,x} + \mu_1 \,\mathrm{e}^{-\frac{r_1-r_2}{2}\,x}\right)$$

On pose $r = \dfrac{r_1+r_2}{2}$ et $\omega = \dfrac{r_1-r_2}{2}$:

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{e}^{rx}\Big(\lambda_1 \left(\mathrm{ch}\,(\omega x) + \mathrm{sh}\,(\omega x)\right) + \mu_1 \left(\mathrm{ch}\,(\omega x) - \mathrm{sh}\,(\omega x)\right)\Big) \\
&= \mathrm{e}^{rx}\Big(\left(\lambda_1 + \mu_1\right)\mathrm{ch}\,(\omega x) + \left(\lambda_1 - \mu_1\right)\mathrm{sh}\,(\omega x)\Big) \\
&= e^{rx}\Big(\lambda \mathrm{ch}\,(\omega x) + \mu \mathrm{sh}\,(\omega x)\Big).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_0^{\mathbb{R}} &= \left\{ y : x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}\left(\lambda \mathrm{ch}\,(\omega x) + \mu \mathrm{sh}\,(\omega x)\right),\ (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \left\{ y : x \longmapsto \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{rx}\mathrm{ch}\,(\omega x + \varphi),\ (\mathrm{A}\,;\varphi) \in \mathbb{R}^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Exercice 8 :

Déterminer les solutions réelles des équations :

1. $y'' - 2y' - 3y = 0$

Exercice 8 :

Déterminer les solutions réelles des équations :

1. $y'' - 2y' - 3y = 0$
2. $y'' + 2y' + y = 0$

Exercice 8 :

Déterminer les solutions réelles des équations :

1. $y'' - 2y' - 3y = 0$
2. $y'' + 2y' + y = 0$
3. $y'' + 2y' + 4y = 0$

Remarque : Des équations différentielles de la forme :

$$y'' + \omega^2 y = 0 \qquad \text{ou} \qquad y'' - \omega^2 y = 0,$$

avec $\omega \in \mathbb{R}$ sont fréquentes en physique.

Leurs solutions respectives s'écrivent :

$$x \longmapsto \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x) \qquad \qquad x \longmapsto \lambda \mathrm{ch}\,(\omega x) + \mu \mathrm{sh}\,(\omega x)$$

ou

$$x \longmapsto \mathrm{A} \cos(\omega x + \varphi). \qquad \qquad x \longmapsto \mathrm{A}\mathrm{ch}\,(\omega x + \varphi).$$

$$(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad (\mathrm{A}\,;\varphi) \in \mathbb{R}^2.$$

Exemple 12 (Circuit LC) :

La charge q au cours du temps d'un condensateur dans un circuit LC constitué d'un condensateur de capacité R et d'une bobine d'inductance L vérifie l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$q'' + \frac{1}{\mathrm{LC}} q = 0.$$

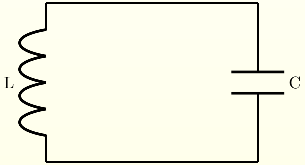


Figure 1 – Circuit LC.

Exemple 12 (Circuit LC) :

La charge q au cours du temps d'un condensateur dans un circuit LC constitué d'un condensateur de capacité R et d'une bobine d'inductance L vérifie l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$q'' + \frac{1}{\mathrm{LC}} q = 0.$$

En posant $\omega^2 = \dfrac{1}{\mathrm{LC}}$:

$$q'' + \omega^2 q = 0. \tag{LC}$$

Les solutions s'écrivent alors sous la forme :

$$q : \; t \longmapsto \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t) = \mathrm{A} \cos(\omega t + \varphi).$$

avec $(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2$ ou $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \left[0\,; \dfrac{2\pi}{\omega}\right[$.

La constante A est appelée amplitude de la solution et la constante φ, son déphasage.

Exemple 13 (Un peu de physique : Circuit RLC) :

On considère cette fois un circuit RLC série muni d'un interrupteur que l'on fermera à $t = 0$ et on suppose le condensateur chargé avec une certaine charge q_0 avant la fermeture de celui-ci.

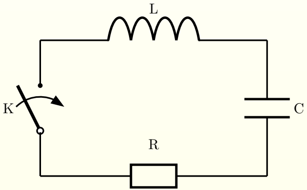


Figure 1 – Circuit RLC.

Exemple 13 (Un peu de physique : Circuit RLC) :

On considère cette fois un circuit RLC série muni d'un interrupteur que l'on fermera à $t = 0$ et on suppose le condensateur chargé avec une certaine charge q_0 avant la fermeture de celui-ci.

On s'intéresse à l'évolution de cette charge q au cours du temps.

Comme $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = i$, elle est, mathématiquement parlant, la primitive de l'intensité i.

Par ailleurs, la tension aux bornes d'un condensateur est donnée par $u_c = \dfrac{q}{\mathrm{C}}$, où C est une constante appelée charge du condensateur.

La loi des mailles appliquée au circuit s'écrit :

$$u_{\mathrm{R}} + u_{\mathrm{L}} + u_{\mathrm{C}} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \mathrm{R}i + \frac{q}{\mathrm{C}} = 0.$$

Équation qui se met sous la forme habituelle :

$$q'' + \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}q' + \frac{1}{\mathrm{LC}}q = 0.$$

Exemple 13 (Un peu de physique : Circuit RLC) :

$$q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{1}{LC}q = 0.$$

On note usuellement en physique :

- $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, constante appelée pulsation propre du circuit.
- $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} = \dfrac{L}{R\omega_0}$, qu'on appelle facteur de qualité du circuit.

Notre équation différentielle devient :

$$q'' + \frac{\omega_0}{Q}q' + \omega_0^2 q = 0.$$

Exemple 13 (Un peu de physique : Circuit RLC) :

$$q'' + \frac{\omega_0}{\mathrm{Q}} q' + \omega_0^2 q = 0.$$

On a, par ailleurs, les conditions initiales $q(0) = q_0$ et $q'(0) = i(0) = 0$ (continuité de la charge et de l'intensité).

Exemple 13 (Un peu de physique : Circuit RLC) :

$$q'' + \frac{\omega_0}{\mathrm{Q}} q' + \omega_0^2 q = 0.$$

Son équation caractéristique a pour discriminant $\Delta = \dfrac{\omega_0^2}{\mathrm{Q}^2}(1 - 4\mathrm{Q}^2)$.

Exemple 13 (Un peu de physique : Circuit RLC) :

$\Delta = \dfrac{\omega_0^2}{Q^2}(1 - 4Q^2)$.

- Le discriminant est positif quand $Q < \dfrac{1}{2}$, auquel cas les deux racines de l'équation caractéristiques sont $\dfrac{\omega_0}{2Q}(\pm\sqrt{1-4Q^2} - 1)$, négatives toutes les deux.
  La charge est donc une somme de deux exponentielles décroissantes.
  On parle alors de régime apériodique, la charge se contentant de décroitre de q_0 vers 0.

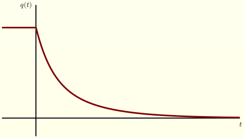


Figure 1 – Décharge aux bornes du condensateur d'un circuit RLC en régime apériodiqu

Exemple 13 (Un peu de physique : Circuit RLC) :

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2}(1 - 4Q^2).$$

- Au contraire, lorsque $Q > \frac{1}{2}$, le discriminant de l'équation est négatif, et on a donc une charge qui est le produit d'une fonction périodique par une exponentielle décroissante.
  On parle alors de régime pseudo-périodique : la charge tend toujours vers 0, mais en oscillant avec une amplitude décroissante au cours du temps.

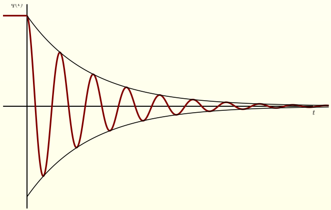


Figure 1 – Décharge aux bornes du condensateur d'un circuit RLC en régime pseudo-périodique.

Exemple 13 (Un peu de physique : Circuit RLC) :

$\Delta = \dfrac{\omega_0^2}{Q^2}(1 - 4Q^2)$.

- Enfin, dans le cas où $Q = \dfrac{1}{2}$ il y a une racine double et une charge qui est produit d'une fonction affine par une exponentielle décroissante.
  On parle de régime critique, la courbe ressemble à celle du régime apériodique.

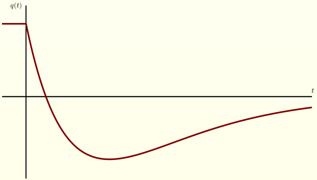


Figure 1 – Décharge aux bornes du condensateur d'un circuit RLC en régime critique.

On considère à nouveau notre équation générale :

$$ay'' + by' + cy = f(x), \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{K} \text{ et } f \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{K}). \tag{EDL$_2$}$$

En accord avec le théorème (2), toute solution de (EDL_2) s'obtient en ajoutant à une solution particulière y_p de (EDL_2) une solution de l'équation homogène associée $(\mathrm{EDL}_2)_0$ ce que l'on résume par :

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0.$$

On considère à nouveau notre équation générale :

$$ay'' + by' + cy = f(x), \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{K} \text{ et } f \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{K}). \qquad (\mathrm{EDL}_2)$$

En accord avec le théorème (2), toute solution de (EDL_2) s'obtient en ajoutant à une solution particulière y_p de (EDL_2) une solution de l'équation homogène associée $(\mathrm{EDL}_2)_0$ ce que l'on résume par :

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0.$$

Le problème principal reste donc de trouver une solution particulière. Certes, il existe une méthode, dite « de variation des constantes » mais elle est plus délicate à mettre en œuvre et n'est pas au programme de PTSI qui nous restreint au second membre de la forme

$$f : x \longmapsto \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{\alpha x}, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

On considère à nouveau notre équation générale :

$$ay'' + by' + cy = f(x), \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{K} \text{ et } f \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{K}). \tag{EDL$_2$}$$

En accord avec le théorème (2), toute solution de (EDL_2) s'obtient en ajoutant à une solution particulière y_p de (EDL_2) une solution de l'équation homogène associée $(\mathrm{EDL}_2)_0$ ce que l'on résume par :

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0.$$

Le problème principal reste donc de trouver une solution particulière. Certes, il existe une méthode, dite « de variation des constantes » mais elle est plus délicate à mettre en œuvre et n'est pas au programme de PTSI qui nous restreint au second membre de la forme

$$f : x \longmapsto \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{\alpha x}, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Par extension, seront également concernés tous ceux de la forme

$$x \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\Omega x) \text{ ou } x \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\Omega x) \text{ ou } x \longmapsto \sin(\Omega x) \text{ ou } x \longmapsto \sin(\Omega x).$$

$$(\alpha\,;\Omega) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}.$$

On considère à nouveau notre équation générale :

$$ay'' + by' + cy = f(x), \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{K} \text{ et } f \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{K}). \qquad (\mathrm{EDL}_2)$$

En accord avec le théorème (2), toute solution de (EDL_2) s'obtient en ajoutant à une solution particulière y_p de (EDL_2) une solution de l'équation homogène associée $(\mathrm{EDL}_2)_0$ ce que l'on résume par :

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0.$$

Le problème principal reste donc de trouver une solution particulière. Certes, il existe une méthode, dite « de variation des constantes » mais elle est plus délicate à mettre en œuvre et n'est pas au programme de PTSI qui nous restreint au second membre de la forme

$$f : x \longmapsto \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{\alpha x}, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Par extension, seront également concernés tous ceux de la forme

$$x \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\Omega x) \;\text{ ou }\; x \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\Omega x) \;\text{ ou }\; x \longmapsto \sin(\Omega x) \;\text{ ou }\; x \longmapsto \sin(\Omega x).$$

$$(\alpha\,;\Omega) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}.$$

Quitte à user du théorème (1) de superposition, tous nos exemples se ramèneront à un des ces cas.

Théorème 8 (Second membre exponentiel) :

Soient $\mathrm{A}, \alpha \in \mathbb{C}$. On considère l'équation

$$ay'' + by' + cy = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{\alpha x}, \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{K} \text{ et } a \neq 0. \qquad (\mathrm{EDL}_2)$$

L'équation (EDL_2) admet au moins une solution particulière sous la forme :

$$x \longmapsto \mathrm{B}\,x^m\,\mathrm{e}^{\alpha x}, \qquad \text{où } \mathrm{B} \in \mathbb{C} \text{ et}$$

- $m = 0$ si α n'est PAS racine du polynôme caractéristique.
- $m = 1$ si α est racine SIMPLE du polynôme caractéristique.
- $m = 2$ si α est racine DOUBLE du polynôme caractéristique.

Exemple 14 :

On veut trouver les solutions générales de l'équation

$$y'' - y = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}.$$

Exemple 14 :

$$y'' - y = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}.$$

Équation homogène : Les solutions de l'équation $y'' - y = 0$ sont toutes les fonctions

$$x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{x} + \mu\,\mathrm{e}^{-x}, \qquad (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2$$

car les racines du polynôme $\mathrm{X}^2 - 1$ sont -1 et 1.

Exemple 14 :

$$y'' - y = e^{2x} - e^{x}.$$

Solution particulière de l'équation $y'' - y = e^{2x}$: Comme 2 n'est pas racine de $X^2 - 1$, cherchons-en une sous la forme

$$x \longmapsto B\,e^{2x}, \qquad B \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} x \longmapsto B\,e^{2x} \text{ est solution de } y'' - y = e^{2x} &\iff 4B\,e^{2x} - B\,e^{2x} = e^{2x} \\ &\iff B = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Exemple 14 :

$$y'' - y = e^{2x} - e^{x}.$$

Solution particulière de l'équation $y'' - y = e^{x}$: Comme 1 est racine simple de $X^2 - 1$, cherchons-en une sous la forme

$$x \longmapsto Bx\,e^{x}, \qquad B \in \mathbb{R}.$$

$$x \longmapsto Bx\,e^{x} \text{ est solution de } y'' - y = e^{x} \iff (Bx\,e^{x} + 2B\,e^{x}) - Bx\,e^{x} = e^{x}$$
$$\iff B = \frac{1}{2}.$$

Exemple 14 :

$$y'' - y = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}.$$

Conclusion : Les solutions de l'équation complète $y'' - y = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}$ sont finalement toutes les fonctions

$$x \longmapsto \left(\lambda - \frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{x} + \mu\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{2x}, \qquad (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 9 :

Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' + y = \mathrm{e}^x \cos(x)$.

Corollaire 8.1 (Second membre trigonométrique) :

Soient $\mathrm{A} \in \mathbb{K}, \Omega \in \mathbb{R}$. Pour $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, on considère l'équation

$$ay'' + by' + cy = \mathrm{A}\cos(\Omega x) \quad \text{ou} \quad ay'' + by' + cy = \mathrm{A}\sin(\Omega x). \tag{EDL$_2$}$$

L'équation (EDL_2) admet au moins une solution particulière sous la forme :

$$x \longmapsto x^m \Big(\mathrm{B}\cos(\Omega x) + \mathrm{C}\sin(\Omega x)\Big), \qquad \text{où } \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathbb{K} \text{ et}$$

- $m = 0$ si Ω n'est PAS racine du polynôme caractéristique.
- $m = 1$ si Ω est racine SIMPLE du polynôme caractéristique.

Exercice 10 :

Déterminer les solutions de $y'' - 4y' + 13y = 8\cos(x) + 16\sin(x)$.

Même si nous n'irons guère plus loin, ce théorème se généralise aisément à des seconds membres un poil plus compliqués :

Corollaire 8.2 (Second membre exponentiel-polynôme) :

Soient $\mathrm{A}, \alpha \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ un polynôme à coefficients complexes.

On considère l'équation

$$ay'' + by' + cy = \mathrm{A}\,\mathrm{P}(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}, \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{K} \text{ et } a \neq 0. \qquad (\mathrm{EDL}_2)$$

L'équation (EDL_2) admet au moins une solution particulière sous la forme :

$$x \longmapsto \mathrm{B}\,x^m\,\mathrm{Q}(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x},$$

où $\mathrm{B} \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ est un polynôme de degré $\deg \mathrm{Q} = \deg \mathrm{P}$ et

- $m = 0$ si α n'est PAS racine du polynôme caractéristique.
- $m = 1$ si α est racine SIMPLE du polynôme caractéristique.
- $m = 2$ si α est racine DOUBLE du polynôme caractéristique.

Par superposition, le corollaire (8.2) permet d'envisager les équations (EDL_2) avec des seconds membres de la forme :

- $f(x) = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{\alpha x}$.

Par superposition, le corollaire (8.2) permet d'envisager les équations (EDL_2) avec des seconds membres de la forme :

- $f(x) = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{\alpha x}$.
- $f(x) = \mathrm{A}x^n$ et par superposition $f \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

Par superposition, le corollaire (8.2) permet d'envisager les équations (EDL_2) avec des seconds membres de la forme :

- $f(x) = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{\alpha x}$.
- $f(x) = \mathrm{A}x^n$ et par superposition $f \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$.
- $f(x) = \mathrm{B}\cos(\Omega x)$ et plus généralement $f(x) = \mathrm{B}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\Omega x)$, B, α, $\Omega \in \mathbb{R}$.

Par superposition, le corollaire (8.2) permet d'envisager les équations (EDL_2) avec des seconds membres de la forme :

- $f(x) = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{\alpha x}$.
- $f(x) = \mathrm{A}x^n$ et par superposition $f \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$.
- $f(x) = \mathrm{B}\cos(\Omega x)$ et plus généralement $f(x) = \mathrm{B}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\Omega x)$, B, α, $\Omega \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = \mathrm{B}\sin(\Omega x)$ et plus généralement $f(x) = \mathrm{B}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\Omega x)$, B, α, $\Omega \in \mathbb{R}$.

Par superposition, le corollaire (8.2) permet d'envisager les équations (EDL_2) avec des seconds membres de la forme :

- $f(x) = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{\alpha x}$.
- $f(x) = \mathrm{A}x^n$ et par superposition $f \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$.
- $f(x) = \mathrm{B}\cos(\Omega x)$ et plus généralement $f(x) = \mathrm{B}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\Omega x)$, B, α, $\Omega \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = \mathrm{B}\sin(\Omega x)$ et plus généralement $f(x) = \mathrm{B}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\Omega x)$, B, α, $\Omega \in \mathbb{R}$.
- Par superposition, le cas où f est une somme de fonctions sinusoïdales de même pulsation, cette même somme produit par une exponentielle complexe, ...

Exercice 11 :

Déterminer les solutions réelles de $y'' - 3y' + 2y = x\,\mathrm{e}^{2x}$.

Définition 6 (Problème de Cauchy d'une EDL_2) :

Soient $a, b, c, y_0, y_1 \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, $f \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$ et $x_0 \in \mathrm{I}$.

On appelle problème de Cauchy associé à l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre tout système de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ll} ay'' + by' + cy = f(x) & \quad (\mathrm{EDL}_2) \\ y'(x_0) = y_1 & \\ y(x_0) = y_0. & \end{array}\right. \qquad (\mathrm{C.L}_2)$$

La condition $\begin{cases} y'(x_0) = y_1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ est encore appelée sa condition initiale.

Définition 6 (Problème de Cauchy d'une EDL_2) :

Soient $a, b, c, y_0, y_1 \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, $f \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$ et $x_0 \in \mathrm{I}$.

On appelle problème de Cauchy associé à l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre tout système de la forme :

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(x) & (\mathrm{EDL}_2) \\ y'(x_0) = y_1 \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \qquad (\mathrm{C.L}_2)$$

La condition $\begin{cases} y'(x_0) = y_1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ est encore appelée sa condition initiale.

Comme pour les (EDL_1), on peut s'attendre à l'existence et l'unicité d'une solution dans notre cas très restreint :

Théorème 9 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les EDL_2) :

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$.

Pour tous $x_0 \in \mathrm{I}$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$, le système $(\mathrm{C.L}_2)$ possède une unique solution sur I.

Exemple 15 :

On veut résoudre le problème de Cauchy : $\begin{cases} y'' - y = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$

D'après l' **exemple** (14) , les solutions générales sur $\mathbb{R}$ soit de la forme :

$$x \longmapsto \left(\lambda - \frac{x}{2}\right) \mathrm{e}^{x} + \mu\, \mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{3}\, \mathrm{e}^{2x}, \qquad (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

L'unique solution pour laquelle $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ est obtenue sous réserve que λ et μ satisfassent les relations $\lambda + \mu + \dfrac{1}{3} = 1$ et $\lambda - \mu + \dfrac{1}{6} = 0$, *i.e.* $(\lambda\,;\mu)$ est solution du système linéaire :

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \dfrac{1}{3} & = & 1 \\ \lambda - \mu + \dfrac{1}{6} & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda & = & \dfrac{1}{4} \\ \mu & = & \dfrac{5}{12} \end{cases}$$

Exercice 12 :

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1.
$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 12 :

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} y'' + y = \cos^2(t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

La démonstration de ce théorème dans le cas général nous échappe encore et de loin mais nous pouvons toujours en démontrer une version affaiblie :

Théorème 10 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les $(\mathrm{EDL}_2)_0$) :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{I}$ et $(y_0\,; y_1) \in \mathbb{K}^2$.

Le problème de Cauchy linéaire homogène à coefficients constants

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

admet une unique solution.

La démonstration de ce théorème dans le cas général nous échappe encore et de loin mais nous pouvons toujours en démontrer une version affaiblie :

Théorème 10 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les $(\mathrm{EDL}_2)_0$) :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{I}$ et $(y_0\,; y_1) \in \mathbb{K}^2$.

Le problème de Cauchy linéaire homogène à coefficients constants

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

admet une unique solution.

Remarque : Ici encore, la seule solution de $(\mathrm{EDL}_2)_0$ telle que $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ est la fonction nulle.

Exemple 16 :

Considérons $y'' - 2y' + y = 0$.

Les solutions sont de la forme $x \longmapsto (\mathrm{A} + \mathrm{B}x)\, \mathrm{e}^x$, et la seule vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ est la fonction

$$x \longmapsto \mathrm{e}^x.$$

Corollaire 10.1 (Étude qualitatives des courbes intégrales) :

(Hors-Programme)

On considère des scalaires $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ et une fonction f continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$ ainsi que l'équation différentielle linéaire à coefficient constants :

$$ay'' + by' + cy = f(x). \qquad (\mathrm{EDL}_2)$$

Alors :

- Une seule courbe intégrale définie sur I passe par le point $\mathrm{M}_0(x_0, y_0) \in \mathrm{I} \times \mathbb{R}$ avec une tangente de pente donnée $y'(x_0) = y_1 \in \mathbb{K}$ en ce point.
- Deux telles courbes intégrales distinctes ne peuvent se couper dans $\mathrm{I} \times \mathbb{K}$ avec une tangente commune.

Corollaire 10.2 (Étude qualitatives des courbes intégrales) :

(Hors-Programme)

On considère des scalaires $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ et une fonction f continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$ ainsi que l'équation différentielle linéaire à coefficient constants :

$$ay'' + by' + cy = f(x). \qquad (\text{EDL}_2)$$

Alors :

- Une seule courbe intégrale définie sur I passe par le point $\mathrm{M}_0(x_0, y_0) \in \mathrm{I} \times \mathbb{R}$ avec une tangente de pente donnée $y'(x_0) = y_1 \in \mathbb{K}$ en ce point.
- Deux telles courbes intégrales distinctes ne peuvent se couper dans $\mathrm{I} \times \mathbb{K}$ avec une tangente commune.

Vocabulaire : Le second membre d'une équation différentielle $ay'' + by' + cy = f(t)$ est également appelé signal d'entrée et les solutions de l'équation définiront la réponse du système étudie.

On parle de régime libre si f est la fonction nulle, et de régime forcé sinon.

Exercice 13 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation $y'' - 4y' + 5y = 2e^x$ avec les conditions initiales $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 5 \end{cases}$.

Méthode 4 :

1. Dans les conditions de validité, transformer l'équation sous une forme normalisée : $y' + a(x)y = b(x)$ ou $ay'' + by' + cy = d$.

Méthode 4 :

1. Dans les conditions de validité, transformer l'équation sous une forme normalisée : $y' + a(x)y = b(x)$ ou $ay'' + by' + cy = d$.
2. Résoudre l'équation homogène : y_{H} sera de la forme

Méthode 4 :

1. Dans les conditions de validité, transformer l'équation sous une forme normalisée : $y' + a(x)y = b(x)$ ou $ay'' + by' + cy = d$.
2. Résoudre l'équation homogène : y_{H} sera de la forme
   1. $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ pour une équation du premier ordre où A est une primitive de a sur I

Méthode 4 :

1. Dans les conditions de validité, transformer l'équation sous une forme normalisée : $y' + a(x)y = b(x)$ ou $ay'' + by' + cy = d$.
2. Résoudre l'équation homogène : y_{H} sera de la forme
   1. $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ pour une équation du premier ordre où A est une primitive de a sur I
   2. $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{r_1 x} + \mathrm{e}^{r_2 x}$, $x \longmapsto (\lambda x + \mu)\,\mathrm{e}^{rx}$ ou $x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}(\lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x))$ pour une équation du deuxième ordre.

Méthode 4 :

1. Dans les conditions de validité, transformer l'équation sous une forme normalisée : $y' + a(x)y = b(x)$ ou $ay'' + by' + cy = d$.
2. Résoudre l'équation homogène : y_{H} sera de la forme
    1. $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ pour une équation du premier ordre où A est une primitive de a sur I
    2. $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{r_1 x} + \mathrm{e}^{r_2 x}$, $x \longmapsto (\lambda x + \mu)\,\mathrm{e}^{rx}$ ou $x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}(\lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x))$ pour une équation du deuxième ordre.
3. Trouver une solution particulière : y_p

Méthode 4 :

1. Dans les conditions de validité, transformer l'équation sous une forme normalisée : $y' + a(x)y = b(x)$ ou $ay'' + by' + cy = d$.
2. Résoudre l'équation homogène : y_H sera de la forme
   1. $x \longmapsto \lambda\, e^{-A(x)}$ pour une équation du premier ordre où A est une primitive de a sur I
   2. $x \longmapsto \lambda\, e^{r_1 x} + e^{r_2 x}$, $x \longmapsto (\lambda x + \mu)\, e^{rx}$ ou $x \longmapsto e^{rx}(\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x))$ pour une équation du deuxième ordre.
3. Trouver une solution particulière : y_p
   1. On cherchera toujours en premier une solution sous la forme d'un second membre particulier.

Méthode 4 :

1. Dans les conditions de validité, transformer l'équation sous une forme normalisée : $y' + a(x)y = b(x)$ ou $ay'' + by' + cy = d$.
2. Résoudre l'équation homogène : y_{H} sera de la forme
   1. $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ pour une équation du premier ordre où A est une primitive de a sur I
   2. $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{r_1 x} + \mathrm{e}^{r_2 x}$, $x \longmapsto (\lambda x + \mu)\,\mathrm{e}^{rx}$ ou $x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}(\lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x))$ pour une équation du deuxième ordre.
3. Trouver une solution particulière : y_p
   1. On cherchera toujours en premier une solution sous la forme d'un second membre particulier.
   2. Dans le cas des équations du premier ordre, si une solution particulière n'apparaît pas, on pourra utiliser la méthode de variation de la constante.

Méthode 4 :

1. Dans les conditions de validité, transformer l'équation sous une forme normalisée : $y' + a(x)y = b(x)$ ou $ay'' + by' + cy = d$.
2. Résoudre l'équation homogène : y_{H} sera de la forme
    1. $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ pour une équation du premier ordre où A est une primitive de a sur I
    2. $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{r_1 x} + \mathrm{e}^{r_2 x}$, $x \longmapsto (\lambda x + \mu)\,\mathrm{e}^{rx}$ ou $x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}(\lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x))$ pour une équation du deuxième ordre.
3. Trouver une solution particulière : y_p
    1. On cherchera toujours en premier une solution sous la forme d'un second membre particulier.
    2. Dans le cas des équations du premier ordre, si une solution particulière n'apparaît pas, on pourra utiliser la méthode de variation de la constante.
4. Donner l'allure générale des solutions : $y = y_{\mathrm{H}} + y_p$.

Méthode 4 :

1. Dans les conditions de validité, transformer l'équation sous une forme normalisée : $y' + a(x)y = b(x)$ ou $ay'' + by' + cy = d$.
2. Résoudre l'équation homogène : y_H sera de la forme
   1. $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)}$ pour une équation du premier ordre où A est une primitive de a sur I
   2. $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{r_1 x} + \mathrm{e}^{r_2 x}$, $x \longmapsto (\lambda x + \mu)\,\mathrm{e}^{rx}$ ou $x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}(\lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x))$ pour une équation du deuxième ordre.
3. Trouver une solution particulière : y_p
   1. On cherchera toujours en premier une solution sous la forme d'un second membre particulier.
   2. Dans le cas des équations du premier ordre, si une solution particulière n'apparaît pas, on pourra utiliser la méthode de variation de la constante.
4. Donner l'allure générale des solutions : $y = y_H + y_p$.
5. Déterminer les constantes à l'aide des conditions initiales.

Exemple 17 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime libre) :

Considérons le mouvement d'une masse m suspendue à un ressort vertical de raideur K et de longueur L, et soumise à une force de frottement fluide (par exemple en plaçant l'oscillateur dans un liquide visqueux)

$$\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}.$$

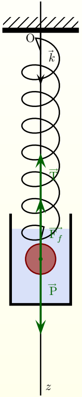


Figure 2 – Oscillateur harmonique en régime libre

Exemple 17 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime libre) :

Mise en équation : Si l'origine est en haut du ressort et l'axe vertical oriente vers le bas, la loi fondamentale de la dynamique donne :

$$mz'' = -\alpha z' - \mathrm{K}(z - \mathrm{L}) + mg \iff mz'' + \alpha z' + \mathrm{K}z = \mathrm{KL} + mg.$$

Cette équation équation différentielle a un second membre constant, et on vérifie que $z_0 = \mathrm{L} + \dfrac{mg}{\mathrm{K}}$ est solution constante (correspondant à l'équilibre).

En portant l'origine en z_0 *i.e.* en posant $\mathrm{Z} = z - z_0$, on obtient :

$$m\mathrm{Z}'' + \alpha \mathrm{Z}' + \mathrm{KZ} = 0 \iff \mathrm{Z}'' + 2\lambda \mathrm{Z}' + \omega^2 \mathrm{Z} = 0.$$

Exemple 17 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime libre) :

L'équation du mouvement est donc régie par l'équation différentielle :

$$z'' + 2\lambda z' + \omega_0^2 z = 0. \tag{$\mathrm{O}scil_0$}$$

Où on a noté, comme d'usage en physique :

- $2\lambda = \dfrac{\alpha}{m}$, le coefficient d'amortissement de l'oscillateur,
- $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ qui représente la pulsation propre.

Exemple 17 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime libre) :

Interprétation géométrique : Dans le cas d'un oscillateur harmonique amorti en régime libre, on parle de :

- **Régime apériodique** quand $\lambda > \omega_0$,

On retrouve des courbes semblables, respectivement, à celles des figures (**??**), (**??**) et (**??**).
Par exemple, dans le dernier cas, on observe un comportement transitoire qui présente quelques oscillations périodiques avant de retrouver un état stable.

Exemple 17 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime libre) :

Interprétation géométrique : Dans le cas d'un oscillateur harmonique amorti en régime libre, on parle de :

- **Régime critique** quand $\lambda = \omega_0$,

On retrouve des courbes semblables, respectivement, à celles des figures (**??**), (**??**) et (**??**).
Par exemple, dans le dernier cas, on observe un comportement transitoire qui présente quelques oscillations périodiques avant de retrouver un état stable.

Exemple 17 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime libre) :

Interprétation géométrique : Dans le cas d'un oscillateur harmonique amorti en régime libre, on parle de :

- **Régime pseudo-périodique** quand $\lambda < \omega_0$.

On retrouve des courbes semblables, respectivement, à celles des figures (**??**), (**??**) et (**??**).
Par exemple, dans le dernier cas, on observe un comportement transitoire qui présente quelques oscillations périodiques avant de retrouver un état stable.

Exercice 14 :

Déterminer le mouvement d'un oscillateur harmonique en régime libre donné par l'équation

$$z'' + 2z' + 5z = 0. \qquad (\lambda = 1 \text{ et } \omega_0 = \sqrt{5})$$

avec les conditions initiales $z(0) = 10$ et $z'(0) = 0$.

Exemple 18 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime forcé) :

On reprend l'équation précédente mais avec un second membre non nul :

$$z'' + 2\lambda z' + \omega_0^2 z = \mathrm{F}\cos(\omega t). \qquad (\mathrm{O}scil)$$

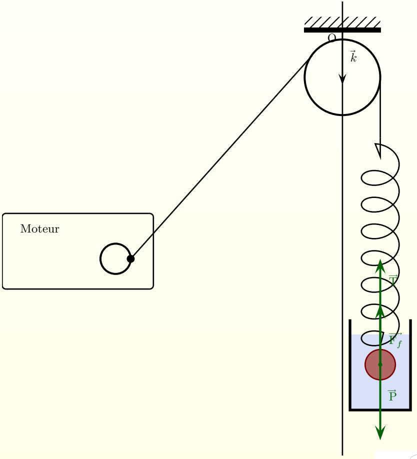


Figure 2 – Oscillateur harmonique en régime forcé

Exemple 18 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime forcé) :

Solutions générales : Selon la théorie, la solution générale d'une telle équation est égale à la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation non homogène.

Exemple 18 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime forcé) :

Solutions générales : Selon la théorie, la solution générale d'une telle équation est égale à la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation non homogène.

Interprétation physique : Ceci se traduit en disant que le mouvement obtenu est la somme de l'oscillation propre, qui dépend des conditions initiales, et de l'oscillation forcée par la force extérieure ; on parle aussi de réponse à l'excitation décrite par le second membre. Généralement, il suffit de ne considérer que cette réponse qui subsiste seule après l'extinction de l'oscillation propre due à l'amortissement.

Exemple 18 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime forcé) :

Résolution : Pour ce faire il est commode d'utiliser les nombres complexes en considérant l'équation :

$$z'' + 2\lambda z' + \omega_0^2 z = \mathrm{F}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}.$$

La recherche d'une solution particulière sous la forme $\tilde{z_p} = \mathrm{Z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}$ conduit à

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\,\mathrm{i}\,\lambda\omega)\mathrm{Z} = \mathrm{F} \iff \mathrm{Z} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\,\mathrm{i}\,\lambda\omega}\,\mathrm{F}.$$

Exemple 18 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime forcé) :

Fonction de transfert : En posant $\mathrm{H}(\omega)=\dfrac{1}{\omega_0^2-\omega^2+2\,\mathrm{i}\,\lambda\omega}$, cette équation se réécrit :

$$\mathrm{Z}=\mathrm{H}(\omega)\mathrm{F}.$$

$\mathrm{H}(\omega)$ représente la fonction de transfert qui décrit la réponse en fonction de la pulsation.
Écrite sous sa forme exponentielle on a $\mathrm{H}(\omega)=|\mathrm{H}|e^{\mathrm{i}\,\varphi}$ puis $\tilde{z}_p=|\mathrm{H}(\omega)|\,\mathrm{F}\,e^{\mathrm{i}\,(\omega t+\varphi)}$.
Notre solution particulière s'écrit alors :

$$z_p=|\mathrm{H}(\omega)|\,\mathrm{F}\,\cos(\omega t+\varphi).$$

Exemple 18 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime forcé) :

$$z_p = |\mathrm{H}(\omega)|\,\mathrm{F}\,\cos(\omega t + \varphi).$$

Interprétation : Ainsi, à une excitation sinusoïdale un système linéaire fait correspondre une réponse sinusoïdale de même pulsation.
De même, à une somme de sinusoïdes correspond une somme de sinusoïdes. Pour chacune d'entre elles le module et l'argument de la fonction de transfert représentent respectivement l'amplification et le déphasage.

Exemple 18 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime forcé) :

$$z_p = |\mathrm{H}(\omega)|\, \mathrm{F} \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \mathrm{H}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\,\mathrm{i}\,\lambda\omega}.$$

Système conservatif : $\lambda = 0$.

La fonction de transfert est alors $\mathrm{H}(\omega) = \dfrac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \in \mathbb{R}$ et

$|\mathrm{H}(\omega)| = \dfrac{1}{|\omega_0^2 - \omega^2|}$.

L'amplification croît avec un déphasage nul à partir de la valeur statique $\dfrac{\mathrm{F}}{\omega_0}$ jusqu'à l'infini lorsque ω atteint la valeur ω_0.

Exemple 18 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime forcé) :

$$z_p = |\mathrm{H}(\omega)|\,\mathrm{F}\,\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \mathrm{H}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\,\mathrm{i}\,\lambda\omega}.$$

Système conservatif : $\lambda = 0$.

La fonction de transfert est alors $\mathrm{H}(\omega) = \dfrac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \in \mathbb{R}$ et

$|\mathrm{H}(\omega)| = \dfrac{1}{|\omega_0^2 - \omega^2|}$.

Ensuite elle décroît jusqu'à zéro avec un déphasage égal à $-\pi$, le déphasage étant défini par :

$$\begin{cases} \cos\varphi = \lim\limits_{\omega\to+\infty} (\omega_0^2 - \omega^2)|\mathrm{H}(\omega)| = -1 \\ \sin\varphi = -\lim\limits_{\omega\to+\infty} 2\lambda\omega|\mathrm{H}(\omega)| = 0 \end{cases}$$

Exemple 18 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime forcé) :

$$z_p = |H(\omega)|\, F\, \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad H(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\,i\,\lambda\omega}.$$

Système conservatif : $\lambda = 0$.

La fonction de transfert est alors $H(\omega) = \dfrac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \in \mathbb{R}$ et

$|H(\omega)| = \dfrac{1}{|\omega_0^2 - \omega^2|}$.

La valeur infinie correspond à la résonance lorsque le système est excité à sa pulsation propre ω_0.

Dans la conception d'un système, le simple calcul de cette pulsation (ou fréquence ou période propre) peut conduire à modifier l'inertie ou la raideur d'un système pour l'éloigner des excitations attendues.

En tout état de cause, la réponse ne peut être que finie à cause de l'amortissement qui est négligé ici.

Exemple 18 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime forcé) :

$$z_p = |\mathrm{H}(\omega)|\,\mathrm{F}\,\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \mathrm{H}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\,\mathrm{i}\,\lambda\omega}.$$

Système dissipatif : $\lambda \neq 0$.

Dans ce système plus réaliste, l'amplification est :

$$|\mathrm{H}(\omega)| = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2}.$$

Il apparaît que le dénominateur de la fonction de transfert ne peut plus s'annuler : pour un amortissement faible on a une courbe de réponse voisine de celle du système non amorti mais avec un maximum fini.

En annulant la dérivée de $|\mathrm{H}(\omega)|$ par rapport à ω^2, on obtient la pulsation qui donne ce maximum :

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\lambda^2.$$

Exemple 18 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime forcé) :

$$z_p = |\mathrm{H}(\omega)|\,\mathrm{F}\,\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \mathrm{H}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\,\mathrm{i}\,\lambda\omega}.$$

Système dissipatif : $\lambda \neq 0$.

Dans ce système plus réaliste, l'amplification est :

$$|\mathrm{H}(\omega)| = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2}.$$

À mesure que le coefficient d'amortissement λ augmente, l'abscisse du maximum diminue jusqu'à 0 où la fonction $|\mathrm{H}(\omega)|$ de ω devient décroissante, ce qui se produit pour l'amortissement critique :

$$\omega_0^2 - 2\lambda_{crit}^2 = 0 \iff \lambda_{crit} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}.$$

Exemple 18 (Un peu de physique : Oscillateur linéaire en régime forcé) :

$$z_p = |\mathrm{H}(\omega)|\,\mathrm{F}\,\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \mathrm{H}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\,\mathrm{i}\,\lambda\omega}.$$

Système dissipatif : $\lambda \neq 0$.

Le déphasage est, ici, défini par :

$$\begin{cases} \cos\varphi &= (\omega_0^2 - \omega^2)|\mathrm{H}(\omega)| \\ \sin\varphi &= -2\lambda\omega|\mathrm{H}(\omega)| \end{cases}$$

- Pour les plus petites valeurs de la pulsation on a le régime quasi statique dominé par la raideur dans lequel la réponse est en phase avec l'excitation.
- Pour les plus grandes, on atteint le régime dominé par l'inertie dans lequel la réponse est en opposition et l'amplification est de l'ordre de $\dfrac{\mathrm{F}}{\omega^2}$.
  L'amortissement devient essentiel loin de ces deux extrêmes.

Exercice 15 :

Déterminer le mouvement d'un oscillateur harmonique en régime forcé donné par l'équation

$$z'' + 2z' + 5z = 5\cos(t). \qquad (\lambda = 1 \text{ et } \omega_0 = \sqrt{5})$$

avec les conditions initiales $z(0) = 10$ et $z'(0) = 0$.

On déterminera également le comportement asymptotique correspondant physiquement à l'état stable.