Nombres complexes II - équations et Géométrie

Exercice 1 : Calculer les racines carrées des nombres suivants sous forme exponentielle et algébrique si possible

1. 1	4. $8-6\,\mathrm{i}$	7. $7-24\,\mathrm{i}$
2. $-2\,\mathrm{i}$	5. $5+12\,\mathrm{i}$	8. $-15+8\,\mathrm{i}$
3. $3+4\,\mathrm{i}$	6. $7+4\,\mathrm{i}$	9. $9+40\,\mathrm{i}$

Correction :

1. Il suffit de factoriser le polynôme $Z^2-1=(Z-1)(Z+1)$.

   Les racines carrées de 1 sont donc $1=e^{2\,\mathrm{i}\,\pi}$ et $-1=e^{\mathrm{i}\,\pi}$.

2. Soit $u=a+\mathrm{i}\,b\in\mathbb{C}$ tel que $u^2=-2\,\mathrm{i}$:

$$-2\,\mathrm{i}=u^2 \iff \left\{\begin{array}{rcl} -2\,\mathrm{i} & = & a^2-b^2+2ab\,\mathrm{i} \\ 2 & = & |u|^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a^2-b^2 & = & 0 \\ a^2+b^2 & = & 2 \\ 2ab & = & -2. \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a^2 & = & 1 \\ b^2 & = & 1 \\ ab & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\underset{ab<0}{\iff} u_1=1-\mathrm{i} \quad \text{ou} \quad u_2=-1+\mathrm{i}.$$

Soit $u=s\,e^{\mathrm{i}\,\varphi}$:

$$\begin{aligned} -2\,\mathrm{i}=u^2 &\iff 2\,e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}=s^2\,e^{2\,\mathrm{i}\,\varphi} \iff s^2=2 \quad \text{et} \quad 2\varphi\equiv-\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ &\underset{s\geqslant 0}{\iff} s=\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \varphi\equiv-\frac{\pi}{4}\ [\pi] \\ &\iff u_1=\sqrt{2}\,e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}} \quad \text{ou} \quad u_2=\sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{4}}. \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S}=\{1+\mathrm{i}\,,-1+\mathrm{i}\,\}=\left\{\sqrt{2}\,e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}},\sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{4}}\right\}$.

3. Soit $u=a+\mathrm{i}\,b\in\mathbb{C}$ tel que $u^2=3+4\,\mathrm{i}$:

$$3+4\,\mathrm{i}=u^2 \iff \left\{\begin{array}{rcl} 3+4\,\mathrm{i} & = & a^2-b^2+2ab\,\mathrm{i} \\ 5 & = & |u|^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a^2-b^2 & = & 3 \\ a^2+b^2 & = & 5 \\ 2ab & = & 4. \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a^2 & = & 4 \\ b^2 & = & 1 \\ ab & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\underset{ab>0}{\iff} u_1=2+\mathrm{i} \quad \text{ou} \quad u_2=-2-\mathrm{i}.$$

On cherche d'abord la forme exponentielle de $3+4\,\mathrm{i}=5\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\,\mathrm{i}\right)=5\,e^{\mathrm{i}\,\arctan\left(\frac{4}{3}\right)}$.

Soit $u=s\,e^{\mathrm{i}\,\varphi}$:

$$\begin{aligned} 3+4\,\mathrm{i}=u^2 &\iff 5\,e^{\mathrm{i}\,\arctan\left(\frac{4}{3}\right)}=s^2\,e^{2\,\mathrm{i}\,\varphi} \iff s^2=5 \quad \text{et} \quad 2\varphi\equiv\arctan\left(\tfrac{4}{3}\right)\ [2\pi] \\ &\underset{s\geqslant 0}{\iff} s=\sqrt{5} \quad \text{et} \quad \varphi\equiv\frac{1}{2}\arctan\left(\tfrac{4}{3}\right)\ [\pi] \\ &\iff u_1=\sqrt{5}\,e^{\mathrm{i}\,\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{4}{3}\right)} \quad \text{ou} \quad u_2=\sqrt{5}\,e^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{4}{3}\right)+\pi\right)}. \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S}=\{2+\mathrm{i}\,,-2-\mathrm{i}\,\}=\left\{\sqrt{5}\,e^{\mathrm{i}\,\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{4}{3}\right)},\sqrt{5}\,e^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{4}{3}\right)+\pi\right)}\right\}$.

4 Soit $u = a + \mathrm{i}\,b \in \mathbb{C}$ tel que $u^2 = 8 - 6\,\mathrm{i}$:

$$8 - 6\,\mathrm{i} = u^2 \iff \left\{\begin{array}{rcl} 8 - 6\,\mathrm{i} & = & a^2 - b^2 + 2ab\,\mathrm{i} \\ 10 & = & |u|^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a^2 - b^2 & = & 8 \\ a^2 + b^2 & = & 10 \\ 2ab & = & -6. \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a^2 & = & 9 \\ b^2 & = & 1 \\ ab & = & -3 \end{array}\right.$$

$$\underset{ab<0}{\iff} u_1 = 3 - \mathrm{i} \quad \text{ou} \quad u_2 = -3 + \mathrm{i}\,.$$

On cherche d'abord la forme exponentielle de $8 - 6\,\mathrm{i} = 10\left(\dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{5}\,\mathrm{i}\right) = 10\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\arctan\left(\frac{3}{4}\right)}$.

Remarque : $\arctan\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{4}{3}\right)$ donc $10\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\arctan\left(\frac{3}{4}\right)} = 5\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\arctan)\left(\frac{4}{3}\right)} \times 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$
$= 5\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\arctan)\left(\frac{4}{3}\right)} \times (-2\,\mathrm{i}\,)$.

On pourrait alors se servir des deux résultats précédents.

Soit $u = s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$:

$$\begin{aligned} 8 - 6\,\mathrm{i} = u^2 &\iff 10\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan\left(\frac{3}{4}\right)} = s^2\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\varphi} \iff s^2 = 10 \quad \text{et} \quad 2\varphi \equiv \arctan\left(\tfrac{3}{4}\right)\ [2\pi] \\ &\underset{s\geqslant 0}{\iff} s = \sqrt{10} \quad \text{et} \quad \varphi \equiv \frac{1}{2}\arctan\left(\tfrac{3}{4}\right)\ [\pi] \\ &\iff u_1 = \sqrt{10}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{3}{4}\right)} \quad \text{ou} \quad u_2 = \sqrt{10}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{3}{4}\right)+\pi\right)}. \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} = \{3 - \mathrm{i}\,, -3 + \mathrm{i}\,\} = \left\{\sqrt{10}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{3}{4}\right)}, \sqrt{10}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{3}{4}\right)+\pi\right)}\right\}$.

5 Soit $u = a + \mathrm{i}\,b \in \mathbb{C}$ tel que $u^2 = 5 + 12\,\mathrm{i}$:

$$5 + 12\,\mathrm{i} = u^2 \iff \left\{\begin{array}{rcl} 5 + 12\,\mathrm{i} & = & a^2 - b^2 + 2ab\,\mathrm{i} \\ 13 & = & |u|^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a^2 - b^2 & = & 5 \\ a^2 + b^2 & = & 13 \\ 2ab & = & 12. \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a^2 & = & 9 \\ b^2 & = & 4 \\ ab & = & 6 \end{array}\right.$$

$$\underset{ab>0}{\iff} u_1 = 3 + 2\,\mathrm{i} \quad \text{ou} \quad u_2 = -3 - 2\,\mathrm{i}\,.$$

On cherche d'abord la forme exponentielle de $5 + 12\,\mathrm{i} = 13\left(\dfrac{5}{13} + \dfrac{12}{13}\,\mathrm{i}\right) = 13\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan\left(\frac{12}{5}\right)}$.

Soit $u = s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$:

$$\begin{aligned} 5 + 12\,\mathrm{i} = u^2 &\iff 13\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan\left(\frac{12}{5}\right)} = s^2\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\varphi} \iff s^2 = 13 \quad \text{et} \quad 2\varphi \equiv \arctan\left(\tfrac{12}{5}\right)\ [2\pi] \\ &\underset{s\geqslant 0}{\iff} s = \sqrt{13} \quad \text{et} \quad \varphi \equiv \frac{1}{2}\arctan\left(\tfrac{12}{5}\right)\ [\pi] \\ &\iff u_1 = \sqrt{13}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{12}{5}\right)} \quad \text{ou} \quad u_2 = \sqrt{13}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{12}{5}\right)+\pi\right)}. \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} = \{3 + 2\,\mathrm{i}\,, -3 - 2\,\mathrm{i}\,\} = \left\{\sqrt{13}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{12}{5}\right)}, \sqrt{13}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{12}{5}\right)+\pi\right)}\right\}$.

9 Soit $u = a + \mathrm{i}\,b \in \mathbb{C}$ tel que $u^2 = 9 + 40\,\mathrm{i}$:

$$9 + 40\,\mathrm{i} = u^2 \iff \left\{\begin{array}{rcl} 9 + 40\,\mathrm{i} & = & a^2 - b^2 + 2ab\,\mathrm{i} \\ 41 & = & |u|^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a^2 - b^2 & = & 9 \\ a^2 + b^2 & = & 41 \\ 2ab & = & 40. \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a^2 & = & 25 \\ b^2 & = & 16 \\ ab & > & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{ab>0}{\iff} u_1 = 5 + 4\,\mathrm{i} \quad \text{ou} \quad u_2 = -5 - 4\,\mathrm{i}\,.$$

On cherche d'abord la forme exponentielle de $9 + 40\,\mathrm{i} = 41\left(\dfrac{9}{41} + \dfrac{40}{41}\,\mathrm{i}\right) = 41\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan\left(\frac{40}{9}\right)}$.

Soit $u = s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$:

$$\begin{aligned}9+40\,\mathrm{i} = u^2 &\iff 41\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan\left(\frac{40}{9}\right)} = s^2\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\varphi} \iff s^2 = 41 \quad \text{et} \quad 2\varphi \equiv \arctan\left(\tfrac{40}{9}\right)\ [2\pi]\\ &\underset{s\geqslant 0}{\iff} s = \sqrt{41} \quad \text{et} \quad \varphi \equiv \frac{1}{2}\arctan\left(\tfrac{40}{9}\right)\ [\pi]\\ &\iff u_1 = \sqrt{41}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{40}{9}\right)} \quad \text{ou} \quad u_2 = \sqrt{41}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{40}{9}\right)+\pi\right)}.\end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} = \{5+4\,\mathrm{i},\ -5-4\,\mathrm{i}\} = \left\{\sqrt{41}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{40}{9}\right)},\ \sqrt{41}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{40}{9}\right)+\pi\right)}\right\}$.

Exercice 2 :

1 Calculer les racines carrées de $\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$.

En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

2 En suivant la même idée, calculer les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Correction :

1 **Sous forme algébrique :** soit $z = x+\mathrm{i}\,y$ avec $x,\ y\in\mathbb{R}$.

$$z^2 = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \iff \begin{cases} x^2+y^2 = 1\\ x^2-y^2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ 2xy = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}\\ y^2 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}\\ 2xy = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\\ y = \pm\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\\ 2xy = \dfrac{\sqrt{2}}{2} > 0\end{cases}$$

Les racines carrées de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ sont :

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \text{et} \quad -\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$$

Sous forme trigonométrique : on a $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}$.

D'après le cours, les racines carrées de a sont $\sqrt[2]{1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{8}}$ et $\sqrt[2]{1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{2\pi}{2}\right)}$ i.e. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{8}}$ et $-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{8}}$.

Comme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{8}} = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$, on en déduit que :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \iff \begin{cases}\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\\ \sin\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\end{cases}$$

2 De même, pour accéder à $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$, on cherche les racines carrées de $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}$.

Sous forme algébrique : soit $z = x+\mathrm{i}\,y$ avec $x,\ y\in\mathbb{R}$.

$$z^2 = \frac{\sqrt{3}+i}{2} \iff \begin{cases} x^2+y^2 = 1\\ x^2-y^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ 2xy = \dfrac{1}{2}\end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}\\ y^2 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}\\ 2xy = \dfrac{1}{2}\end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\\ y = \pm\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\\ 2xy = \dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Les racines carrées de $\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}$ sont donc :

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \quad \text{et} \quad -\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)$$

Sous forme trigonométrique : on a $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

D'après le cours, les racines carrées de a sont $e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $-e^{i\frac{\pi}{12}}$.

Comme $e^{i\frac{\pi}{12}} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$, on en déduit que :

$$e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \iff \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \end{cases}$$

Remarque :

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \implies \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Exercice 3 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 + z + 1 = 0$.
2. $z^2 - (1+2i)z + i - 1 = 0$.
3. $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$.
4. $z^3 - (3+2i)z^2 + (3+11i)z - 2(1+7i) = 0$.
5. $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$.
6. $z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 0$.
7. $(2+i)z^2 - (5-i)z + 2 - 2i = 0$.
8. $z^4 - (5-14i)z^2 - 2(12+5i) = 0$
9. $z^4 - (3+8i)z^2 - 16 + 12i = 0$.
10. $z^4 + (3-6i)z^2 - 2(4+3i) = 0$.
11. $z^4 + (2i-1)z^2 - 1 - i = 0$.

Correction :

1. $\Delta = -3$ puis $\mathcal{S} = \left\{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\} = \{j\,;\,j^2 = \bar{j}\}$.
2. $\Delta = 1$ puis $\mathcal{S} = \{1+i\,;\,i\}$.
3. $\Delta = 3+4i = (2+i)^2$ puis $\mathcal{S} = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{1}{2}i\,;\,\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{1}{2}i\right\}$.
4. $z^3 - (3+2i)z^2 + (3+11i)z - 2(1+7i) = 0$. (E)

   – On cherche une racine réelle. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\lambda^3 - (3+2i)\lambda^2 + (3+11i)\lambda - 2(1+7i) = 0 \iff (\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 2) + i\,(-2\lambda^2 + 11\lambda - 14) = 0$$
$$\iff \begin{cases} \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 & (1) \\ -2\lambda^2 + 11\lambda - 14 = 0 & (2) \end{cases} \quad \text{car } \lambda \in \mathbb{R}.$$

L'équation (2) admet deux solutions : 2 et $\frac{7}{2}$.

On teste l'équation (1) : 2 est également solution de (1).

2 est donc une solution de l'équation (E).

Remarque : On peut être encore plus malin en remarquant que si λ est une solution réelle de l'équation, alors λ sera aussi une solution de l'équation conjuguée. On raisonne alors par condition nécessaire en cherchant λ réel tel que :

$$\begin{cases} z^3 - (3+2i)z^2 + (3+11i)z - 2(1+7i) = 0 \\ z^3 - (3-2i)z^2 + (3-11i)z - 2(1-7i) = 0 \end{cases} \implies 2z^2 - 11z + 14 = 0$$

en soustrayant les deux équations.

Il suffit alors de vérifier que la solution 2 convient et de poursuivre.

– On factorise par $(z-2)$:

$$(\mathrm{E}) \iff (z-2)(z^2-(1+2\,\mathrm{i})z+(1+7i))=0.$$

Donc, $\mathcal{S}=\{2,\ 2-\mathrm{i}\,,\ -1+3\,\mathrm{i}\}$.

5 $z^4+10z^2+169=0 \iff \mathrm{Z}^2+10\mathrm{Z}+169=0$ en posant $\mathrm{Z}=z^2$

$$\begin{aligned} &\iff \mathrm{Z}=-5+12\,\mathrm{i} \quad \text{ou} \quad \mathrm{Z}=-5-12\,\mathrm{i}\\ &\iff z^2=-5+12\,\mathrm{i} \quad \text{ou} \quad z^2=-5-12\,\mathrm{i}\\ &\iff z=2+3\,\mathrm{i} \quad \text{ou} \quad z=-2-3\,\mathrm{i} \quad \text{ou} \quad z=2-3i \quad \text{ou} \quad z=-2+3\,\mathrm{i}.\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S}=\{2+3\,\mathrm{i}\,,-2-3\,\mathrm{i}\,,2-3\,\mathrm{i}\,,-2+3\,\mathrm{i}\}$.

8 Le discriminant de l'équation $\mathrm{Z}^2-(5-14i)\mathrm{Z}-2(5i+12)=0$ vaut

$$\Delta=(5-14i)^2+8(5i+12)=-75-100i=25(-3-4i)=(5(1-2i))^2.$$

Cette équation admet donc les deux solutions $\mathrm{Z}_1=\dfrac{5-14i+5-10i}{2}=5-12i$ et $\mathrm{Z}_2=\dfrac{5-14i-5+10i}{2}=-2i$.

Ensuite,

$$\begin{aligned} z \text{ est solution de l'équation proposée } &\iff z^2=5-12i=(3-2i)^2 \quad \text{ou} \quad z^2=-2i=(1-i)^2\\ &\iff z=3-2i \quad \text{ou} \quad z=-3+2i \quad \text{ou} \quad z=1-i \quad \text{ou} \quad z=-1+i.\end{aligned}$$

Exercice 4 : On considère le polynôme $\mathrm{P}(z)=z^4-3z^3+\dfrac{9}{2}z^2-3z+1$.

1 Montrer que si z est une racine de P, alors $\overline{z}$ et $\dfrac{1}{z}$ sont également des racines de P.

2 Vérifier que $1+\mathrm{i}$ est une racine de P.

3 Déterminer toutes les racines de P.

Correction :

1 Comme P est à coefficients réels, z est racine de P si, et seulement si $\overline{z}$ l'est :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(z)=0 \iff \overline{\mathrm{P}(z)}=0 &\iff \overline{z^4-3z^3+\frac{9}{2}z^2-3z+1}=0\\ &\iff \overline{z}^4-3\overline{z}^3+\frac{9}{2}\overline{z}^2-3\overline{z}+1=0\\ &\iff \mathrm{P}(\overline{z})=0.\end{aligned}$$

Si $z\neq 0$, alors $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{1}{z^4}-3\dfrac{1}{z^3}+\dfrac{9}{2}\dfrac{1}{z^2}-3\dfrac{1}{z}+1=\dfrac{1}{z^4}\left(1-3z+\dfrac{9}{2}z^2-3z^3+z^4\right)=\dfrac{1}{z^4}\mathrm{P}(z)$.

Donc $z\neq 0$ est racine de P si, et seulement si $\dfrac{1}{z}$ l'est également.

2 Il suffit de calculer. Le plus simple est de le faire sous forme exponentielle : $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$:

$$\mathrm{P}\left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)=4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}-6\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}+9\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}-3\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}+1=-4+6-6\,\mathrm{i}+9\,\mathrm{i}-3-3\,\mathrm{i}+1=0.$$

Donc $1+\mathrm{i}$ est racine de P.

3 D'après les deux questions précédentes, les racines de P, au nombre de 4, sont :

$$\mathcal{S}=\left\{1+\mathrm{i}\,,\overline{1+\mathrm{i}}=1-\mathrm{i}\,,\frac{1}{1+\mathrm{i}}=\frac{1-\mathrm{i}}{2},\overline{\left(\frac{1}{1+\mathrm{i}}\right)}=\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right\}.$$

Exercice 5 : Déterminer toutes les solutions réelles et imaginaires pures de l'équation d'inconnu $z \in \mathbb{C}$

$$z^4 - 4(1+i)z^3 + 12\,\mathrm{i}\,z^2 + 8(1-i)z - 5 = 0. \tag{IX.1}$$

En déduire toutes les solutions complexes.

Correction : Conformément aux indications de l'énoncé, commençons par chercher, si elles existent, des solutions réelles et imaginaires pures. Supposant qu'elle existe, soit $x \in \mathbb{R}$ une telle solution. On a alors :

$$x^4 - 4(1+i)x^3 + 12\,\mathrm{i}\,x^2 + 8(1-i)x - 5 = 0.$$

Par passage au conjugué et par compatibilité avec les lois de $\mathbb{C}$, x est alors également solution de l'équation

$$x^4 - 4(1-i)x^3 - 12\,\mathrm{i}\,x^2 + 8(1+i)x - 5 = 0,$$

soit du système

$$\begin{cases} x^4 - 4(1+i)x^3 + 12\,\mathrm{i}\,x^2 + 8(1-i)x - 5 & = 0 \\ x^4 - 4(1-i)x^3 - 12\,\mathrm{i}\,x^2 + 8(1+i)x - 5 & = 0 \end{cases} \underset{\text{en retranchant}}{\Longrightarrow} \Big(-4x^2 + 12x - 8 \Big) ix = 0.$$

Comme $x = 0$ n'est clairement pas une solution, cette équation est équivalente à $x^2 - 3x + 2 = 0$ dont les racines sont facilement $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$.

Réciproquement, on vérifie que seule $z_1 = 1$ est racine de (IX.1).

On itère le même raisonnement pour une racine imaginaire pure. Soit iy avec $y \in \mathbb{R}$ une telle solution. On a alors :

$$y^4 - 4(1-i)y^3 - 12\,\mathrm{i}\,y^2 + 8(1+i)y - 5 = 0.$$

Par passage au conjugué, iy est alors solution du système

$$\begin{cases} y^4 - 4(1-i)y^3 - 12\,\mathrm{i}\,y^2 + 8(1+i)y - 5 & = 0 \\ y^4 - 4(1+i)y^3 + 12\,\mathrm{i}\,y^2 + 8(1-i)y - 5 & = 0 \end{cases} \underset{\text{en ajoutant}}{\Longrightarrow} y^4 - 4y^3 + 8y - 5 = 0.$$

On remarque (heureusement) que $y = 1$ est une racine en évidence et on vérifie que $z_2 = 1 \times i = i$ est racine de (IX.1).

Factorisons :

$$z^4 - 4(1+i)z^3 + 12\,\mathrm{i}\,z^2 + 8(1-i)z - 5 = (z-1)(z-i)(az^2 + bz + c).$$

Il est déjà clair que $a = 1$ et $c = 5i$. On identifie pour $z = -1$, par exemple, pour trouver :

$$\begin{aligned} -8 + 24i = -2(-1-i)(1 - b + 5i) &\iff -8 + 24i = -8 + 12i - 2(1+i)b \\ &\iff b = -\frac{6}{1+i} = -3 - 3i. \end{aligned}$$

D'où, $z^4 - 4(1+i)z^3 + 12\,\mathrm{i}\,z^2 + 8(1-i)z - 5 = (z-1)(z-i)(z^2 - (3+3i)z + 5i)$.

Il ne reste plus qu'à trouver les racines de $z^2 - (3+3i)z + 5i$:

- $\Delta = -2i = (1-i)^2$.
- Les deux racines complexes sont donc $z_3 = \dfrac{3 + 3i + 1 - i}{2} = 2 + i$ et $z_4 = \dfrac{3 + 3i - 1 + i}{2} = 1 + 2i$.

On en déduit l'ensemble des racines complexes de (IX.1) :

$$\mathscr{S} = \Big\{ 1,\ i,\ 2+i,\ 1+2i \Big\}.$$

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} z+z' = 4+2\,\mathrm{i} \\ zz' = 2+4\,\mathrm{i} \end{cases}$
2. $\begin{cases} a+b = 1+\mathrm{i} \\ ab = 2-\mathrm{i}\,. \end{cases}$
3. $\begin{cases} u+v=2 \\ uv=2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} u+v=3 \\ \dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v} = \dfrac{9+3\,\mathrm{i}}{10} \end{cases}$
5. $\begin{cases} u+v=1 \\ u^2+v^2 = -1+2\,\mathrm{i} \end{cases}$
6. $\begin{cases} u^2v+uv^2 = 6 \\ u^3+v^3 = 9 \end{cases}$

Correction :

1. z et z' sont les racines du trinôme $Z^2-(4+2\,\mathrm{i})Z+2+4\,\mathrm{i}$ de discriminant $\Delta=(4+2\,\mathrm{i})^2-4(2+4\,\mathrm{i})=4$.

   On trouve donc $z=2+\mathrm{i}+1=3+\mathrm{i}$ et $z'=2+\mathrm{i}-1=1+\mathrm{i}$.

2. a et b sont les racines du trinôme $z^2-(1+\mathrm{i})z++2-\mathrm{i}$ de discriminant $\Delta = (1+\mathrm{i})^2-4(2-\mathrm{i}) = -8+6\,\mathrm{i} = \pm(1+3\,\mathrm{i})^2$.

   On trouve donc $a=\dfrac{1+\mathrm{i}+1+3\,\mathrm{i}}{2}=1+2\,\mathrm{i}$ et $b=\dfrac{1+\mathrm{i}-1-3\,\mathrm{i}}{2}=-\mathrm{i}$.

3. u et v sont les racines du trinôme z^2-2z+2 de discriminant $\Delta=-4=(2\,\mathrm{i})^2$.

   On trouve donc $u=1+\mathrm{i}$ et $v=\overline{u}=1-\mathrm{i}$.

4. Tout d'abord il est clair que l'on cherche des valeurs non nulles pour u et v. Ceci assuré, on a :

$$\begin{cases} u+v=3 \\ \dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=\dfrac{9+3\,\mathrm{i}}{10} \end{cases} \iff \begin{cases} u+v=3 \\ \dfrac{u+v}{uv}=\dfrac{9+3\,\mathrm{i}}{10} \end{cases} \iff \begin{cases} u+v=3 \\ uv=\dfrac{10}{3+\mathrm{i}} \end{cases} \iff \begin{cases} u+v=3 \\ uv=3-\mathrm{i} \end{cases}$$

   Le raisonnement est ensuite identique :

   u et v sont les racines du trinôme $z^2-3z+3-\mathrm{i}$ de discriminant $\Delta=9-4(3-\mathrm{i})=-3+4\,\mathrm{i}=(1+2\,\mathrm{i})^2$.

   On trouve donc $u=2+\mathrm{i}\neq 0$ et $v=1-\mathrm{i}\neq 0$.

5. En remarquant que $(u+v)^2=u^2+v^2+2uv$, on a :

$$\begin{cases} u+v=1 \\ u^2+v^2=-1+2\,\mathrm{i} \end{cases} \iff \begin{cases} u+v=1 \\ (u+v)^2-(u^2+v^2)=1^2-(-1+2\,\mathrm{i}) \end{cases} \iff \begin{cases} u+v=1 \\ uv=1-\mathrm{i} \end{cases}$$

   u et v sont les racines du trinôme $z^2-z+1-\mathrm{i}$ de discriminant $\Delta=1-4(1-\mathrm{i})=-3+4\,\mathrm{i}=(1+2\,\mathrm{i})^2$.

   On trouve donc $u=1+\mathrm{i}$ et $v=-\mathrm{i}$.

6. Même exercice, en remarquant que $(u+v)^3=u^3+v^3+3\,(u^2v+uv^2)$.

$$\begin{cases} u^2v+uv^2=6 \\ u^3+v^3=9 \end{cases} \iff \begin{cases} uv(u+v)=6 \\ (u+v)^3=27 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} uv=2 \\ u+v=3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} uv=2\,\mathrm{j}^2 \\ u+v=3\,\mathrm{j} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} uv=2\,\mathrm{j} \\ u+v=3\,\mathrm{j}^2 \end{cases}$$

   u et v sont donc à choisir parmi les racines du trinôme :

   - z^2-3z+2 i.e. les racines en évidence 1 et 2.
   - $z^2-3\,\mathrm{j}\,z+2\,\mathrm{j}^2$ de discriminant $\Delta=9\,\mathrm{j}^2-8\,\mathrm{j}^2=\mathrm{j}^2$. Les racines sont donc $\dfrac{3\,\mathrm{j}+\mathrm{j}}{2}=2\,\mathrm{j}$ et $\dfrac{3\,\mathrm{j}-\mathrm{j}}{2}=\mathrm{j}$.
   - $z^2-3\,\mathrm{j}^2z+2\,\mathrm{j}$ de discriminant $\Delta=9\,\mathrm{j}-8\,\mathrm{j}=\mathrm{j}=(\overline{\mathrm{j}})^2$. Les racines sont donc $\dfrac{3\,\mathrm{j}^2+\overline{\mathrm{j}}}{2}=2\overline{j}$ et $\dfrac{3\,\mathrm{j}-\overline{\mathrm{j}}}{2}=\overline{\mathrm{j}}$.

Exercice 7 : Soit $\omega=e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On pose $\begin{cases} \mathrm{A}=\omega+\omega^2+\omega^4 \\ \mathrm{B}=\omega^3+\omega^5+\omega^6 \end{cases}$.

1. Calculer $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ et AB.

2 En déduire A et B.

Correction :

1 Comme $\omega \in \mathbb{U}_7$, facilement $\mathrm{A}+\mathrm{B} = \sum_{k=0}^{6} \omega^k - 1 = -1$.

De plus, $\mathrm{AB} = (\omega+\omega^2+\omega^4)(\omega^3+\omega^5+\omega^6) = \omega^4(1+\omega+\omega^3)(1+\omega^2+\omega^3)$
$= \omega^4(1+\omega^2+\omega^3+\omega+\omega^3+\omega^4+\omega^3+\omega^5+\omega^6)$
$= \omega^4\left(\underbrace{1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6}_{=0}+2\omega^3\right) = 2\omega^7 = 2.$

2 D'après la question précédente, A et B sont donc les racines du polynôme

$$\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+2 = \left(\mathrm{X} - \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}\right)\left(\mathrm{X} - \frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}\right).$$

On les départage en remarquant que

$$\mathrm{Im}(\mathrm{A}) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{7}\right).$$

Comme sin est croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \geqslant \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \geqslant 0$. Donc $\mathrm{Im}(\mathrm{A}) \geqslant \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) > 0$ et on choisira pour A la racine ayant une partie imaginaire positive :

$$\mathrm{A} = \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B} = \frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}.$$

Exercice 8 : Soit $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{5}}$.

1 Calculer $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4$.

2 En déduire une équation du second degré vérifiée par $\Omega = \omega + \dfrac{1}{\omega}$, puis les valeurs de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

3 Comment utiliser ce qui précède pour construire un pentagone régulier à la règle et au compas ?

Correction :

1 Comme $\omega \neq 1$, on a $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = \dfrac{1-\omega^5}{1-\omega} = \dfrac{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi}}{1-\omega} = 0.$

2 Comme $\omega \neq 0$, on peut diviser les deux membres de l'équation précédente par ω^2 et obtenir :

$$\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega}+1+\omega+\omega^2 = 0 \iff \omega^2+\frac{1}{\omega^2}+\omega+\frac{1}{\omega}+1 = 0$$

Or, $\left(\omega+\dfrac{1}{\omega}\right)^2 = \omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}+2.$

$$\iff \left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^2+\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)-1 = 0.$$

$\left(\omega+\dfrac{1}{\omega}\right)$ est donc solution de l'équation du second degré :

$$\iff \mathrm{Z}^2+\mathrm{Z}-1 = 0$$

$$\mathrm{Z} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{Z} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

De plus, $\omega + \dfrac{1}{\omega} = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{5}} + \mathrm{e}^{-\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{5}} = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{5}} + \overline{\left(\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{5}}\right)} = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

Enfin, $0 \leqslant \dfrac{2\pi}{5} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ entraîne $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) \geqslant 0$.

Donc,

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \qquad \text{et} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+1}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

On note traditionnellement $\varphi = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, le nombre d'or, et $\psi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, l'opposée de la seconde racine de $Z^2 + Z - 1$ soit :

$$2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \varphi \qquad \text{et} \qquad 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \psi.$$

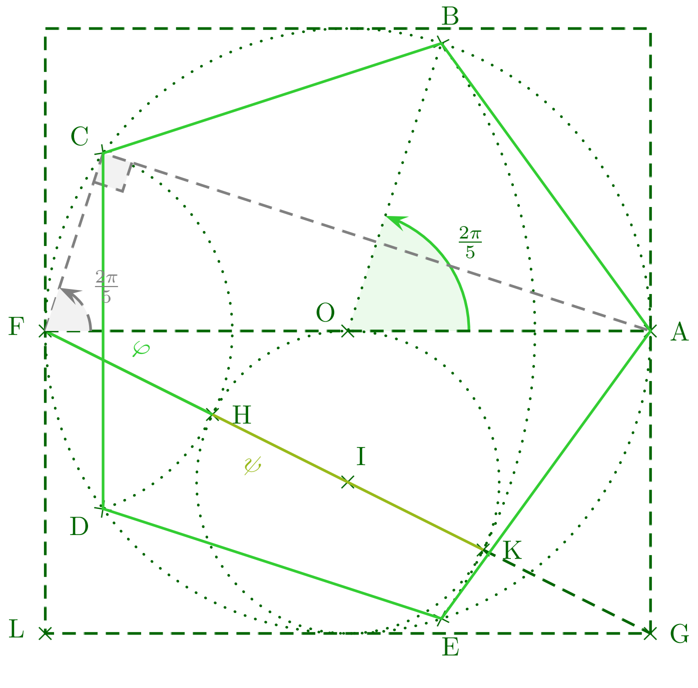
3 Dans la figure ci-dessus, le triangle AFC est rectangle en C (angle inscrit dans un demi-cercle).
L'angle en F vaut $\dfrac{2\pi}{5}$ (angle inscrit moitié de l'angle au centre).

On a donc,

$$FC = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \varphi.$$

De même, en considérant le triangle AFB, on obtient

$$FB = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \psi.$$



Il reste donc à construire φ et ψ, c'est-à-dire $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Pour construire le nombre $\sqrt{5}$ avec la règle et le compas, il suffit de remarquer que c'est la longueur de la diagonale d'un rectangle dont les côtés ont pour longueurs 1 et 2 d'après le théorème de Pythagore comme c'est le cas dans le rectangle AFLG. La diagonale FG mesure donc $\sqrt{5}$.

Le point I est le milieu de la diagonale. Le cercle de centre I, passant par l'origine O, a pour rayon $\dfrac{1}{2}$. Le segment FI a pour longueur $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Par conséquent, on a :

$$\mathrm{FH} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \qquad \text{et} \qquad \mathrm{FK} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \psi.$$

D'où la construction des points B et E, puis C et D en portant au compas les longueurs $\mathrm{FB} = \mathrm{FE} = \mathrm{FK}$ et $\mathrm{FC} = \mathrm{FD} = \mathrm{FH}$.

Exercice 9 : Trouver les racines cubiques des nombres suivants :

1. $2 - 2\,\mathrm{i}$
2. $11 + 2\,\mathrm{i}$
3. $\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$.

Correction : Il suffit de trouver une racine cubique du nombre puis de la multiplier par les racines cubiques de l'unité 1, $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ et $\mathrm{j}^2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ pour les avoir toutes.

1. $2 - 2\,\mathrm{i} = \left(\sqrt{2}\right)^3\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ dont une racine cubique est $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$.

   Conclusion, $\mathcal{S} = \left\{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} \times 1, \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} \times \mathrm{j}, \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} \times \mathrm{j}^2\right\}$
   $= \left\{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}, \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}, \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right\}$.

2. $11+2\,\mathrm{i} = \left(\sqrt{5}\right)^3\left(\dfrac{11}{\sqrt{125}} + \dfrac{2}{\sqrt{125}}\,\mathrm{i}\right) = \left(\sqrt{5}\right)^3\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\arctan\left(\frac{2}{11}\right)}$ dont une racine cubique est $\sqrt{5}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{2}{11}\right)}$.

   Remarque : Il n'existe pas de méthodes simples pour trouver la racine cubique d'un nombre complexe sous forme algébrique.

   Conclusion, $\mathcal{S} = \left\{\sqrt{5}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{2}{11}\right)}, \sqrt{5}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{3}\left(\arctan\left(\frac{2}{11}\right)-2\pi\right)}, \sqrt{5}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{3}\left(\arctan\left(\frac{2}{11}\right)+2\pi\right)}\right\}$.

3. Comme $\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}} = \dfrac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$ dont une racine cubique est $\dfrac{1}{2^{\frac{1}{6}}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{36}}$, on trouve :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2^{\frac{1}{6}}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{36}}, \frac{1}{2^{\frac{1}{6}}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{29\pi}{36}}, \frac{1}{2^{\frac{1}{6}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{19\pi}{36}}\right\}.$$

Exercice 10 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $\left(\dfrac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$.
2. $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$.
3. $z^4 = \dfrac{16\sqrt{2}}{1-\mathrm{i}}$
4. $z^8 = \dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$

Correction :

2. Remarquons tout d'abord que -1 n'est pas solution de $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$. On peut donc supposer $z \neq -1$.

   D'où $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0 \iff 27(z-1)^6 = -(z+1)^6$

$$\begin{aligned}
&\iff \frac{-27(z-1)^6}{(z+1)^6} = 1 \iff \left(\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}(z-1)}{z+1}\right)^6 = 1\\
&\iff \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}(z-1)}{z+1} \in \mathbb{U}_6\\
&\iff \frac{i\sqrt{3}(z-1)}{z+1} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{3}} \text{ avec } k \in [\![0\,;5]\!].\\
&\iff z = \frac{\mathrm{i}\sqrt{3} + \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{3}}}{\mathrm{i}\sqrt{3} - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{3}}} \text{ avec } k \in [\![0\,;5]\!].
\end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} = \left\{ 2 - \mathrm{i}\sqrt{3}, 2 + \mathrm{i}\sqrt{3}, \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, \dfrac{2+\mathrm{i}\sqrt{3}}{7}, \dfrac{2-\mathrm{i}\sqrt{3}}{7} \right\}$.

3 Comme $\dfrac{16\sqrt{2}}{1-\mathrm{i}} = \left(2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{16}}\right)^4$, on a déjà trouvé une racine primitive de $\dfrac{16\sqrt{2}}{1-\mathrm{i}}$. Il ne reste plus qu'à multiplier par les racines quatrième de l'unité i, -1 et $-\mathrm{i}$ différentes de 1 pour avoir toutes les autres :

$$\mathscr{S} = \left\{ 2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{16}}, 2\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{16}}, -2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{16}}, -2\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{16}} \right\} = \left\{ 2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{16}}, 2\,\mathrm{e}^{\frac{9\mathrm{i}\pi}{16}}, 2\,\mathrm{e}^{-\frac{15\mathrm{i}\pi}{16}}, 2\,\mathrm{e}^{-\frac{9\mathrm{i}\pi}{16}} \right\}.$$

Ce sont les sommets d'un carré inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 2.

Exercice 11 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation (E) : $z^{n+1} = \bar{z}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
Si $z \neq 0$ est une solution de (E), que vaut $|z|$? Résoudre alors (E).

Correction : $z = 0$ est une solution évidente de (E).
Supposons maintenant $z \neq 0$. On a alors :

$$z^{n+1} = \bar{z} \implies |z|^{n+1} = |z| \iff |z|\left(|z|^n - 1\right) = 0 \iff z = 0 \quad \text{ou} \quad |z| = 1.$$

On en déduit que si $z \neq 0$ alors $|z| = 1$ et $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

L'équation (E) se réduit alors à $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \iff \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+2)\theta} = 1 \iff z^{n+2} = 1$.

En conclusion, $\mathcal{S} = \{0\} \cup \mathbb{U}_{n+2}$.

Exercice 12 : Résoudre de deux manières l'équation $(z+1)^5 - (z-1)^5 = 0$.
En déduire la valeur de $\operatorname{cotan}\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

Correction : Remarquons tout d'abord que $z = 1$ n'est pas solution de $(z+1)^5 - (z-1)^5 = 0$. On peut donc supposer $z \neq 1$.

$$\begin{aligned}
(z+1)^5 - (z-1)^5 = 0 &\iff \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^5 = 1 \iff \frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{U}_5 \\
&\iff \frac{z+1}{z-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}} \quad \text{avec } k \in [\![0\,;4]\!] \\
&\iff z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}} + 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}} - 1} = -\mathrm{i}\,\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)} \quad \text{avec } k \in [\![1\,;4]\!]. \\
&\iff z = \mathrm{i}\,\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{5}\right) \quad \text{avec } k \in [\![1\,;4]\!].
\end{aligned}$$

Développons les deux binômes de newton :

$$\begin{aligned}
(z+1)^5 - (z-1)^5 = 0 &\iff z^5 + 5z^4 + 10z^3 + 10z^2 + 5z + 1 - z^5 + 5z^4 - 10z^3 + 10z^2 - 5z + 1 = 0 \\
&\iff 10z^4 + 20z^2 + 2 = 0 \iff 5\mathrm{Z}^2 + 10\mathrm{Z} + 1 = 0 \quad \text{en posant } \mathrm{Z} = z^2 \\
&\iff \mathrm{Z} = \frac{-5+2\sqrt{5}}{5} \quad \text{ou} \quad \mathrm{Z} = \frac{-5-2\sqrt{5}}{5} \\
&\iff z^2 = \frac{-5+2\sqrt{5}}{5} < 0 \quad \text{ou} \quad z^2 = \frac{-5-2\sqrt{5}}{5} < 0 \\
&\iff z \in \left\{ \mathrm{i}\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}, -\mathrm{i}\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}, \mathrm{i}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}, -\mathrm{i}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \right\}.
\end{aligned}$$

Comme $0 \leqslant \frac{\pi}{5} \leqslant \frac{\pi}{4}$ alors $\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{5}\right) \geqslant 1$. La seule valeur qui convient est donc $\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$:

$$\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}.$$

Exercice 13 : Résoudre l'équation $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$ dans $\mathbb{C}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction : En remarquant que i n'est jamais solution de $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, le raisonnement est identique à la première partie de l'exercice précédent en supposant $z \neq \mathrm{i}$.

$$\begin{aligned}
(z+\mathrm{i})^n - (z-\mathrm{i})^n = 0 &\iff \left(\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^n = 1 \iff \frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} \in \mathbb{U}_n \\
&\iff \frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} \quad \text{avec } k \in [\![1\,;n-1]\!] \quad (\text{pas de solution pour } k=0) \\
&\iff z = \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}+1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}-1} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \quad \text{avec } k \in [\![1\,;n-1]\!] \\
&\iff z = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad \text{avec } k \in [\![1\,;n-1]\!].
\end{aligned}$$

Exercice 14 :

1. Soit $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \omega^k$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et ω une racine n-ième de 1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\omega^{k-1}$.

Exercice 15 : Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

1. Factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme $\mathrm{P}(z) = z^{n-1} + \cdots + z + 1$.
2. Démontrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}\right) = n$.
3. En déduire que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Correction :

1. On a :

$$(z-1)\mathrm{P}(z) = (z-1)(z^{n-1}+\cdots+z+1) = z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(z - \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}\right) = (z-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(z - \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}\right),$$

Egalité également vraie pour $z=1$. En identifiant, on obtient :

$$\mathrm{P}(z) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(z - \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}\right).$$

2. Il suffit d'évaluer P en 1 soit $\mathrm{P}(1) = n$ puis

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}\right) = n.$$

3. A partir du résultat précédent, l'éternelle factorisation par l'angle moitié donne

$$1 - \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}} = -2\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

puis

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}}\right)=2^{n-1}(-i)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,k\pi}{n}}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$
$$=2^{n-1}(-i)^{n-1}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,k\pi}{n}}\right)\left(\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right).$$

Or, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,k\pi}{n}}=\mathrm{e}^{\left(\sum_{k=1}^{n-1}k\right)\frac{\mathrm{i}\,\pi}{n}}=\mathrm{e}^{\frac{n(n-1)}{2}\frac{\mathrm{i}\,\pi}{n}}=\mathrm{e}^{(n-1)\frac{\mathrm{i}\,\pi}{2}}=i^{n-1}$. On en déduit :

$$1-\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}}=2^{n-1}\times(-i^2)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Finalement,

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

Exercice 16 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^3+(2+\mathrm{i})z^2-3(1+4\,\mathrm{i})z+5(\mathrm{i}-2)=0.$
2. $z^4-8(1+\mathrm{i})z^2+63+16\,\mathrm{i}=0$
3. $z^6+z^3(z+1)^3+(z+1)^6=0$
4. $z^3-(2+\mathrm{i})z^2+2(1+\mathrm{i})z-2\,\mathrm{i}=0$
5. $z^2+2(1+\mathrm{i})z-5(1+2\,\mathrm{i})=0$
6. $z^3=4\sqrt{2}(1+\mathrm{i})$
7. $e^z+e^{-z}=\frac{3}{2}\,\mathrm{i}$
8. $z^2-2z\cos(\theta)+1=0,\theta\in\mathbb{R}.$
9. $z^4-(5-14\,\mathrm{i})z^2-2(12+5\,\mathrm{i})=0.$
10. $e^z=1+\mathrm{i}.$
11. $z^4+3z^2-4=0$

Correction :

8. Tout élève de PTSI, doit savoir que $z^2-2z\cos(\theta)+1=(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})\,(z-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta})$.

   Ceci commence par calculer $\Delta=4\cos^2(\theta)-4=(2\,\mathrm{i}\,\sin(\theta))^2$, puis les solutions :

   $\alpha=\dfrac{2\cos(\theta)+2\,\mathrm{i}\,\sin(\theta)}{2}=\cos(\theta)+\mathrm{i}\,\sin(\theta)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ et son conjugué $\overline{\alpha}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}$.

9. Comme dans le cours :

$$\mathrm{e}^z=1+\mathrm{i}\iff\mathrm{e}^z=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\iff\mathrm{Re}\,(z)=\frac{1}{2}\ln 2\quad\text{et}\quad\mathrm{Im}\,(z)\equiv\frac{\pi}{4}\;[2\pi]$$
$$\iff z\equiv\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}\;[2\,\mathrm{i}\,\pi].$$

Exercice 17 : Soit $(x,y,z)\in\mathbb{U}^3$. Montrer que $|x+y+z|=|xy+xz+yz|$.

Correction : Il suffit de se rappeler que $|u|^2=u\overline{u}$ et que, pour tout $u\in\mathbb{U}$, $|u|=1$ et $\overline{u}=\frac{1}{u}$, $(u\neq 0)$.
Le reste se fait tout seul :

$$\begin{aligned}|xy+xz+yz|^2&=(xy+xz+yz)\overline{(xy+xz+yz)}=(xy+xz+yz)(\overline{xy}+\overline{xz}+\overline{yz})\\&=|xy|^2+|xz|^2+|yz|^2+|y|\,x\overline{z}+|x|\,y\overline{z}+|y|\,z\overline{y}+|z|\,x\overline{y}+|y|\,z\overline{x}+|z|\,y\overline{x}\\&=3+x\overline{z}+y\overline{z}+z\overline{y}+x\overline{y}+z\overline{x}+y\overline{x}\\&=3+2\mathrm{Re}\,(xy+xz+yz)\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}|x+y+z|^2 &= (x+y+z)\overline{(x+y+z)}\\ &= |x|^2+|y|^2+|z|^2+x\overline{y}+x\overline{z}+y\overline{x}+y\overline{z}+z\overline{x}+z\overline{y}\\ &= 3+x\overline{z}+y\overline{z}+z\overline{y}+x\overline{y}+z\overline{x}+y\overline{x}\\ &= 3+2\mathrm{Re}\,(xy+xz+yz)\end{aligned}$$

Égalité entre deux nombres positifs donc entre leur racine :

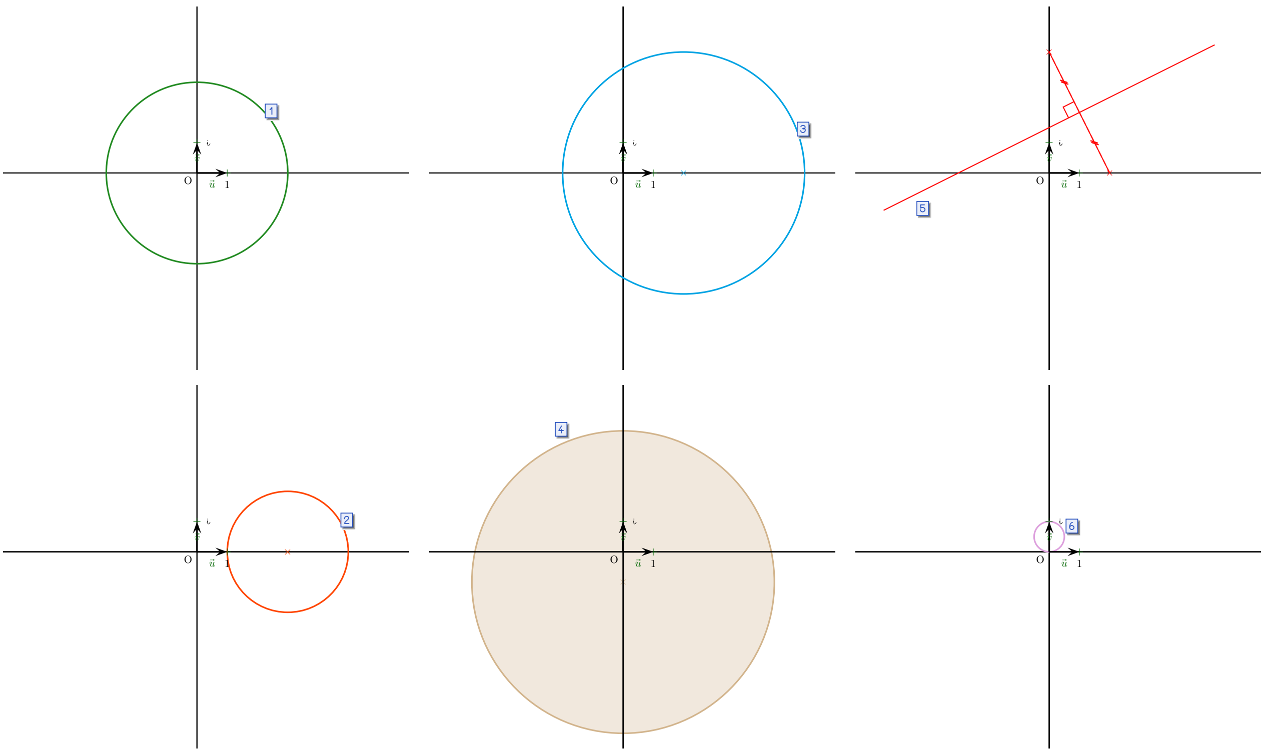
$$\forall\,(x,y,z)\in\mathbb{U}^3,\ |x+y+z| = |xy+xz+yz|.$$

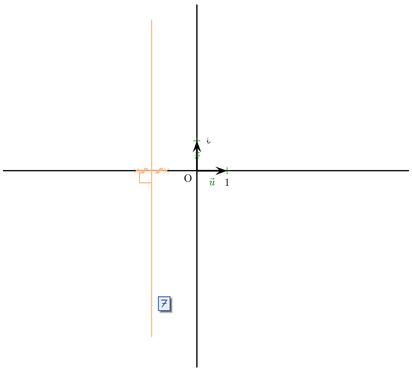
Exercice 18 : Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$.
Calculer la longueur d'un côté d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité.

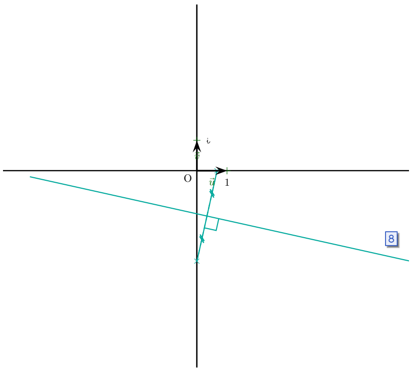
Exercice 19 : Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes :

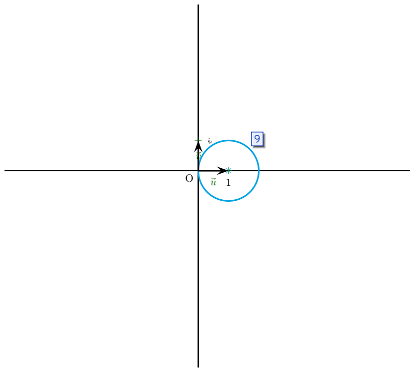
1. $|z|=3$
2. $|z-3|=2$
3. $|z-2|=4$
4. $|z+i|\leqslant 5$
5. $|z-2|=|z-4\,\mathrm{i}\,|$
6. $|2z-\mathrm{i}\,|=1$
7. $\left|\dfrac{z+1}{z+2}\right|=1$
8. $\dfrac{|3z-2|}{|z+3\,\mathrm{i}\,|}=3$
9. $z+\overline{z}=z\overline{z}$

Correction :









Exercice 20 : Montrer que les points du plan dont l'affixe vérifie $|z-3| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z-5|$ forment un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Correction : *Pas trop le choix de développer :*

$$\begin{aligned} |z-3| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z-5| &\iff (z-3)\overline{(z-3)} = \frac{1}{2}(z-5)\overline{(z-5)} \\ &\iff 2z\overline{z} - 6\overline{z} - 6z + 18 = z\overline{z} - 5\overline{z} - 5z + 25 \\ &\iff z\overline{z} - \overline{z} - z = 7 \\ &\iff (z-1)\overline{(z-1)} - 1 = 7 \\ &\iff |z-1| = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

L'ensemble cherché est donc le cercle de centre $\Omega(1)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

Exercice 21 (Une équation de degré 3) : On considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 - z^2 + 2 = 0 \quad \text{(E)}$$

1. Vérifier que $z^3 - z^2 + 2 = (z+1)(z^2 - 2z + 2)$ pour tout nombre complexe z.
2. En déduire la résolution de l'équation (E).
3. Placer dans un repère orthonormé les points dont les affixes sont des solutions de l'équation.
4. Démontrer que le triangle obtenu est isocèle.

Exercice 22 : Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point d'affixe $\frac{2}{1+\mathrm{i}t}$ appartient au cercle de centre 1 et de rayon 1.

Correction : *Déjà, comme $t \in \mathbb{R}$, les points d'affixe $\frac{2}{1+\mathrm{i}t}$ sont correctement définis pour tout t. Il suffit de calculer :*

$$\left|\frac{2}{1+\mathrm{i}t} - 1\right| = \left|\frac{1-\mathrm{i}t}{1+\mathrm{i}t}\right| = \frac{|1-\mathrm{i}t|}{|1-\mathrm{i}t|} = 1.$$

Donc, $\forall t \in \mathbb{R}$, les points d'affixe $\frac{2}{1+\mathrm{i}t}$ appartiennent au cercle de centre 1 et de rayon 1.

Exercice 23 :

1. Traduire géométriquement la condition

$$(z-i)\overline{(z-i)} = 9$$

2. Développer et simplifier autant que possible l'expression $(z-i)\overline{(z-i)}$.
3. Représenter dans le plan complexe l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie

$$|z|^2 - 2\mathrm{Im}\,(z) = 8.$$

Correction :

1. $(z-i)\overline{(z-i)} = 9 \iff |z-i| = 3.$

   C'est le cercle de centre $\Omega(\,\mathrm{i}\,)$ et de rayon 3.

2. $(z-i)\overline{(z-i)} = |z|^2 - \overline{\mathrm{i}}\,z - \mathrm{i}\,\overline{z} - 1 = |z|^2 + \mathrm{i}\,(z-\overline{z}) - 1 = |z|^2 - 2\mathrm{Im}\,(z) - 1$

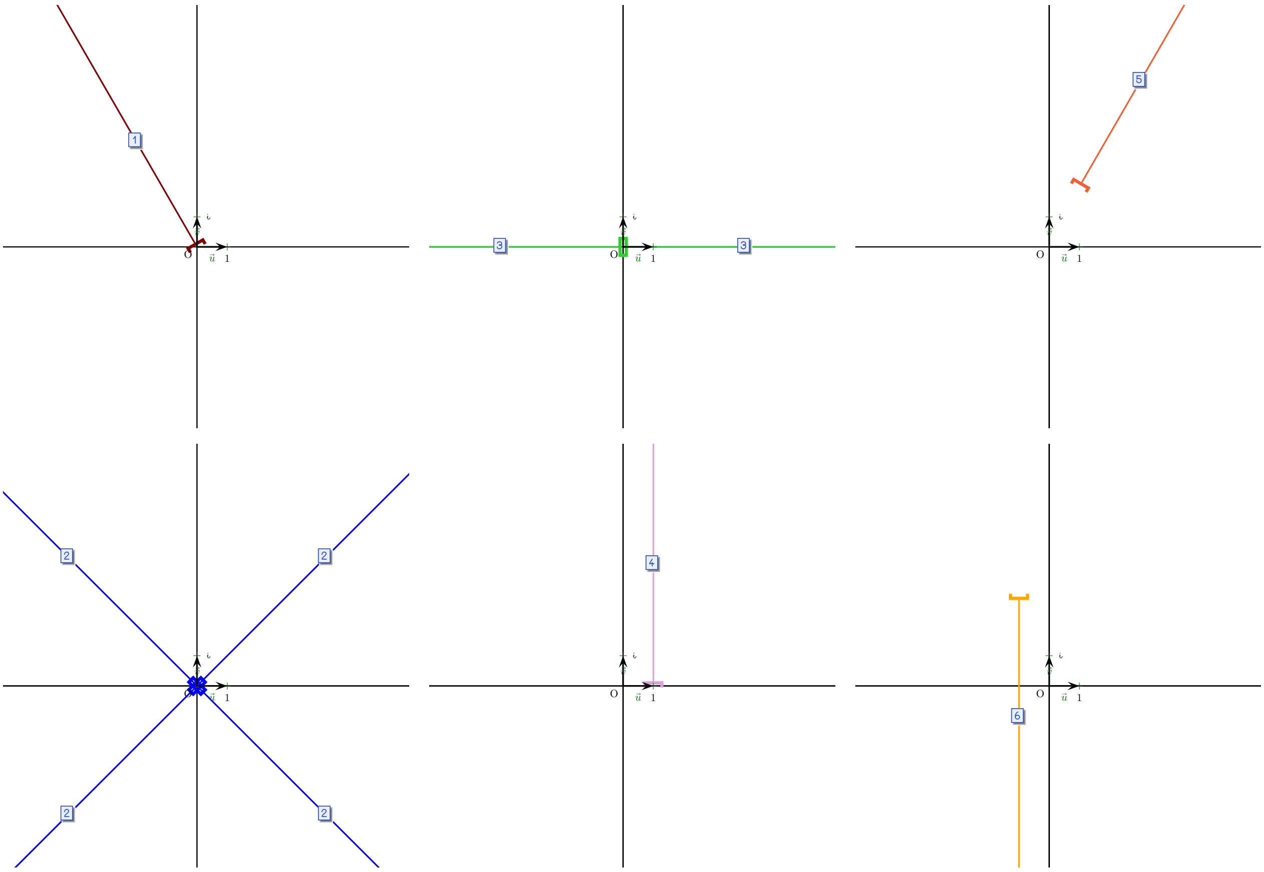
3. D'après les questions précédentes, $|z|^2 - 2\mathrm{Im}\,(z) = 8 \iff |z|^2 - 2\mathrm{Im}\,(z) - 1 = 9 \iff |z-i| = 3.$

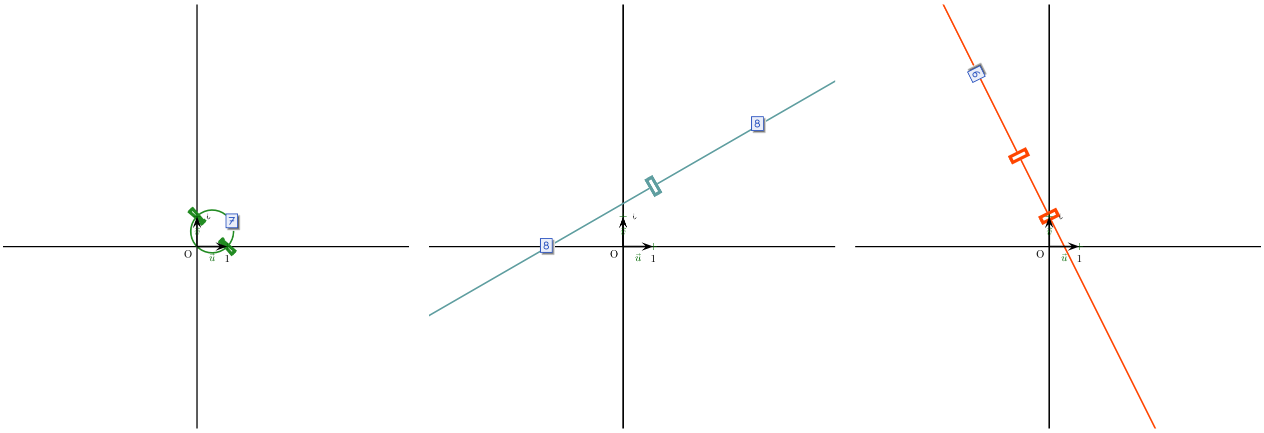
   L'ensemble cherché est donc le cercle de centre $\Omega(\,\mathrm{i}\,)$ et de rayon 3.

Exercice 24 : Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes. Sauf mention contraire, on résoudra ces équations modulo 2π et modulo π.

1. $\arg\,(z) = \dfrac{2\pi}{3}$
2. $\arg\,(z) = \dfrac{\pi}{4}\ \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$
3. $\arg\,(z^2) = 0$
4. $\arg\,(z-1) = \dfrac{\pi}{2}$
5. $\arg\,(z-1-2\,\mathrm{i}\,) = \dfrac{\pi}{3}$
6. $\arg\,(z-3\,\mathrm{i}\,+1) = \dfrac{3\pi}{2}$
7. $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi].$
8. $\arg\,((z-1-2\,\mathrm{i}\,)^2) = \dfrac{\pi}{3}$
9. $\arg\,(z-3\,\mathrm{i}\,+1) = \arg\,(z-\mathrm{i}\,)$

Correction : Sauf mention contraire dans l'énoncé, on a représenté, ci-dessous, les ensembles de points modulo 2π :





Exercice 25 : Dans chacun des cas suivants, vérifier si le triangle ABC est rectangle en B ;

1. $A(3+2\,i)$, $B(0)$ et $C\left(-1+\dfrac{3}{2}\,i\right)$;
2. $A(2-i)$, $B(1-4\,i)$ et $C(-2-3\,i)$;
3. $A(-4)$, $B(-2+3\,i)$ et $C(4-i)$.

Dans les cas où il est rectangle vérifier s'il est isocèle.

Correction :

1. $\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\dfrac{-1+\frac{3}{2}\,i}{3+2\,i}=\dfrac{1}{2}\,i$ donc $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)=\arg\left(\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ et le triangle ABC est rectangle en B non isocèle.
2. $\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\dfrac{-3+i}{1+3\,i}=i$ donc $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)=\arg\left(\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ et le triangle ABC est rectangle isocèle en B.
3. $\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\dfrac{6-4\,i}{2+3\,i}=-2\,i$ donc $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)=\arg\left(\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ et le triangle ABC est rectangle en B non isocèle.

Exercice 26 : Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1. les points d'affixes j, z, jz sont alignés.
2. les points d'affixes z, z^2, z^3 forment un triangle rectangle.
3. Les points d'affixes 1, z et z^3 sont alignés.

Correction :

1. Les points d'affixes j, z, jz sont alignés si, et seulement si $\dfrac{jz-j}{z-j}\in\mathbb{R}$. Le cas où $z=j$ est trivial car alors les deux points seraient confondus et deux points alignés. On suppose dorénavant $z\neq j$. Or,

$$\begin{aligned}
\frac{jz-j}{z-j}\in\mathbb{R} &\iff \frac{jz-j}{z-j}=\overline{\left(\frac{jz-j}{z-j}\right)} \iff \frac{jz-j}{z-j}=\frac{\overline{j}\overline{z}-\overline{j}}{\overline{z}-\overline{j}}\\
&\iff \frac{jz-j}{z-j}=\frac{j^2\overline{z}-j^2}{\overline{z}-j^2}, \qquad \text{car } \overline{j}=j^2.\\
&\iff (jz-j)\left(\overline{z}-j^2\right)-(z-j)\left(j^2\overline{z}-j^2\right)=0\\
&\iff (j-j^2)z\overline{z}+(-1+j^2)z+(1-j)\overline{z}=0, \qquad \text{car } j^3=1.\\
&\iff (j-\overline{j})z\overline{z}\underbrace{-\overline{(1-j)\overline{z}}+(1-j)\overline{z}}_{=-\overline{Z}+Z=2\,i\,\mathrm{Im}(Z)\text{ où }Z=(1-j)\overline{z}}=0, \qquad \text{car } j^2=\overline{j}.
\end{aligned}$$

En posant $z = x + \mathrm{i}\,y$, $2\mathrm{Im}\left((1-j)\overline{z}\right) = -\sqrt{3}x - 3y$, on obtient :

$$\iff \mathrm{i}\sqrt{3}\,|z|^2 - \mathrm{i}\left(\sqrt{3}x + 3y\right) = 0, \qquad \text{car } j - \overline{j} = 2\,\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,(j) = \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

On simplifie par $\mathrm{i}\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned} &\iff x^2 + y^2 - x - \sqrt{3}y = 0 \\ &\iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 \\ &\iff \mathrm{M} \text{ appartient au cercle de centre } \Omega(1+j) = \left(\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ et de rayon } 1. \end{aligned}$$

2. Les points d'affixes z, z^2, z^3 sont alignés si, et seulement si $z = 0$ (un point), $z = 1$ (un point) ou exclusif $\dfrac{z^3 - z^2}{z^2 - z} = z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ ou $\dfrac{z^3 - z}{z^2 - z} = z + 1 \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.
L'ensemble cherché est donc la réunion de l'axe imaginaire, de la droite d'équation $x = -1$ et du point d'affixe 1.

3. Les points d'affixes 1, z, z^3 sont alignés si, et seulement si $z = 1$ (un point), $z = 0$ (deux points) ou $\dfrac{z^3 - z}{z - 1} = z(z+1) \in \mathbb{R}$ dans le cas où $z \neq 1$. Les deux premiers cas étant triviaux, on s'occupe du dernier :
Or,

$$\begin{aligned} z(z+1) \in \mathbb{R} &\iff z(z+1) = \overline{z}\,(\overline{z}+1) \iff z^2 - \overline{z}^2 + z - \overline{z} = 0 \\ &\iff (z - \overline{z})(z + \overline{z} + 1) = 0 \\ &\iff z \in \mathbb{R} \ \text{ ou } \ \mathrm{Re}\,(z) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

L'ensemble cherché est donc la réunion de l'axe réel et de la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 27 : Soient A, B, C trois points du plan complexe d'affixes a, b, c. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Démontrer qu'il y a équivalence entre :

1. Le triangle ABC est équilatéral.
2. L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet pour solution j ou $\overline{j}$.
3. $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.
4. Bonus : $\dfrac{1}{b-c} + \dfrac{1}{c-a} + \dfrac{1}{a-b} = 0$.

Correction :

$$\begin{aligned} \text{ABC est équilatéral} &\iff \mathrm{C} = r_{\mathrm{A},\pi/3}(\mathrm{B}) ou \mathrm{C} = r_{\mathrm{A},-\pi/3}(\mathrm{B}) \\ &\iff c - a = \left(-j^2\right)(b - a) \ \text{ ou } \ c - a = (-j)(b-a) \\ &\iff \left(-1 - j^2\right)a + j^2 b + c = 0 \ \text{ ou } \ (-1-j)a + jb + c = 0 \\ &\iff ja + j^2 b + c = 0 \ \text{ ou } \ j^2 a + jb + c = 0 \\ &\iff \left(j^2\right)^2 a + j^2 b + c = 0 \ \text{ ou } \ j^2 a + jb + c = 0 \\ &\iff j \ \text{ ou } \ j^2 \text{ sont solutions de l'équation } az^2 + bz + c = 0. \end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned} j \text{ ou } j^2 \text{ sont solutions de l'équation } az^2 + bz + c = 0 &\iff ja + j^2 b + c = 0 \ \text{ ou } \ j^2 a + jb + c = 0 \\ &\iff \left(ja + j^2 b + c\right)\left(j^2 a + jb + c\right) = 0 \\ &\iff a^2 + b^2 + c^2 + \left(j + j^2\right)(ab + ac + bc) = 0 \\ &\iff a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc, \end{aligned}$$

puis,

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc &\iff a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0 \\ &\iff -a^2+ab+ac-bc-b^2+bc+ba-ac-c^2+ca+cb-ab=0 \\ &\iff (c-a)(a-b)+(a-b)(b-c)+(b-c)(c-a)=0 \\ &\iff \frac{(c-a)(a-b)+(a-b)(b-c)+(b-c)(c-a)}{(b-c)(c-a)(a-b)}=0 \\ &\iff \frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}=0. \end{aligned}$$

Exercice 28 : Soit ABC un triangle du plan affine euclidien. On construit à l'extérieur de ce triangle les trois triangles équilatéraux de base [AB], [AC] et [BC].

Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

Correction : En supposant que ABC est direct, on calcule les affixes des nouveaux sommets en utilisant l'exercice précédent puis les affixes des centre de gravité (moyenne des trois sommets), puis, soit on applique l' exercice (27) soit on montre que chaque sommet du nouveau triangle est obtenu par rotation d'un sommet par une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ de centre le troisième sommet.

Soient $\mathrm{A}'(a')$, $\mathrm{B}'(b')$ et $\mathrm{C}'(c')$ les sommets des triangles équilatéraux respectivement opposés à $\mathrm{A}(a)$, $\mathrm{B}(b)$ et $\mathrm{C}(c)$.

- A' est l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Ce qui s'écrit :
$$a'-c=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(b-c).$$
- De même pour B', image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Ce qui s'écrit :
$$b'-a=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c-a).$$
- Et C', image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Ce qui s'écrit :
$$c'-b=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(a-b).$$

Soient $\mathrm{G}_{\mathrm{A}'}(g_{\mathrm{A}'})$, $\mathrm{G}_{\mathrm{B}'}(g_{\mathrm{B}'})$ et $\mathrm{G}_{\mathrm{C}'}(g_{\mathrm{C}'})$ les centre de gravité respectifs des triangles $\mathrm{A}'\mathrm{BC}$, $\mathrm{AB}'\mathrm{C}$ et ABC'. On a :

$$\begin{aligned} g_{\mathrm{A}'} &= \frac{1}{3}\left(c+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(b-c)+b+c\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)b+\left(2-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)c\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)b+\left(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)c\right) \\ g_{\mathrm{B}'} &= \frac{1}{3}\left(\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)c+\left(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)a\right) \\ g_{\mathrm{C}'} &= \frac{1}{3}\left(\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)a+\left(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)b\right) \end{aligned}$$

On peut alors :

1. Vérifier que les longueurs des côtés de $\mathrm{G}_{\mathrm{A}'}\mathrm{G}_{\mathrm{B}'}\mathrm{G}_{\mathrm{C}'}$ sont égales en posant $\mathrm{j}=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$:
   - $\begin{aligned}[t] \mathrm{G}_{\mathrm{A}'}\mathrm{G}_{\mathrm{B}'}=|g_{\mathrm{B}'}-g_{\mathrm{A}'}| &= \frac{1}{3}\left|\left(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)a-\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)b+\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)c\right| \\ &= \frac{1}{3}\left|(1-\mathrm{j})a-(1-\mathrm{j}^2)b+(\mathrm{j}-\mathrm{j}^2)c\right| \end{aligned}$

– $$\begin{aligned}
\mathrm{G_{B'}G_{C'}} = |g_{C'} - g_{B'}| &= \frac{1}{3}\left|\left(e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)a + \left(1+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)b - \left(1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)c\right|.\\
&= \frac{1}{3}\left|(j - j^2)\,a + (1-j)\,b - (1-j^2)\,c\right|\\
&= \frac{1}{3}\,|j|\left|(1-j)\,a + \left(\frac{1}{j}-1\right)b - \left(\frac{1}{j}-j\right)c\right| \qquad \left(\frac{1}{j} = \overline{j} = j^2 \ \text{ et } \ |j| = 1\right)\\
&= \frac{1}{3}\left|(1-j)\,a - (1-j^2)\,b + (j-j^2)\,c\right|\\
&= \mathrm{G_{A'}G_{B'}}.
\end{aligned}$$

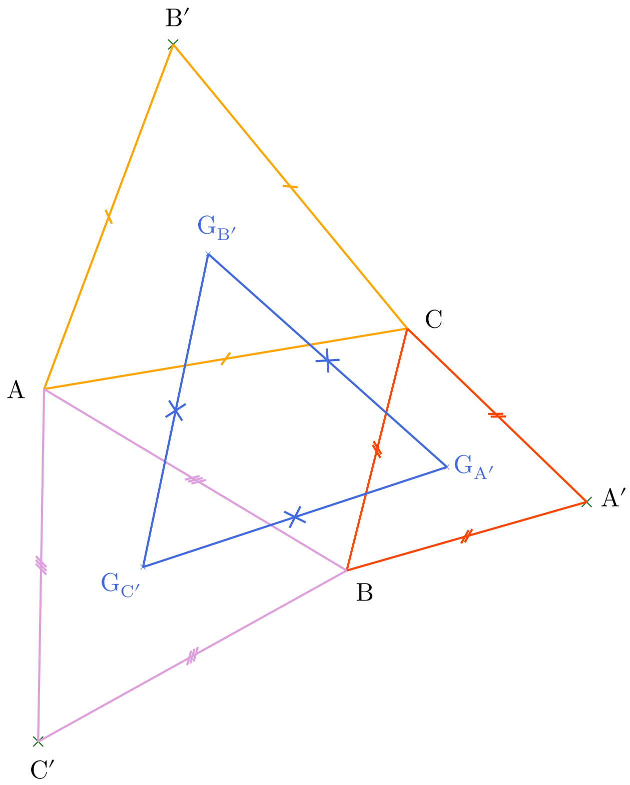
– $$\begin{aligned}
\mathrm{G_{C'}G_{A'}} = |g_{A'} - g_{C'}| &= \frac{1}{3}\left|-\left(1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)a + \left(e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)b + \left(1+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)c\right|\\
&= \frac{1}{3}\left|-(1-j^2)\,a + (j-j^2)\,b + (1-j)\,c\right|\\
&= \frac{1}{3}\left|\frac{1}{j}\right|\left|-(j-1)\,a + (j^2-1)\,b + (j-j^2)\,c\right| \qquad (j^3 = 1)\\
.&= \frac{1}{3}\left|(1-j)\,a - (1-j^2)\,b + (j-j^2)\,c\right|\\
&= \mathrm{G_{A'}G_{B'}}.
\end{aligned}$$

2 *Vérifier que, par exemple, $\mathrm{G_{C'}}$ est l'image de $\mathrm{G_{B'}}$ par la rotation de centre $\mathrm{G_{A'}}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$:*

$$\begin{aligned}
g_{A'} + e^{i\frac{\pi}{3}}(g_{B'} - g_{A'}) &= \left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)g_{A'} + e^{i\frac{\pi}{3}}g_{B'}\\
&= \frac{1}{3}\left(\left(1-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)b + \left(1-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(1+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)c\right.\\
&\qquad\qquad \left. + e^{i\frac{\pi}{3}}\left(1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)c + e^{i\frac{\pi}{3}}\left(1+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)a\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(\left(1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)a + \left(1-e^{2i\frac{\pi}{3}}\right)b + \underbrace{\left(1+e^{-i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{2i\frac{\pi}{3}}\right)}_{=0}c\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(\left(1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)a + \left(1+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)b\right)\\
&= g_{C'}.
\end{aligned}$$

3 *En utilisant l'* exercice (27) *, on peut vérifier que* $g_{A'}\,j^2 + g_{B'}\,j + g_{C'} = 0$ *ou* $g_{A'}\,\overline{j}^2 + g_{B'}\,\overline{j} + g_{C'} = 0$.
Or,

$$\begin{aligned}
3\left(g_{A'}\overline{j}^2 + g_{B'}\overline{j} + g_{C'}\right) &= e^{2i\frac{\pi}{3}}\left(\left(1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)b + \left(1+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)c\right) + e^{-2i\frac{\pi}{3}}\left(\left(1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)c + \left(1+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)a\right)\\
&\qquad + \left(1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)a + \left(1+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)b\\
&= \underbrace{\left(e^{-2i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{3}}\right)}_{=0}a + \underbrace{\left(e^{2i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}_{=0}b + \left(\underbrace{e^{2i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}}_{=0} + \underbrace{e^{-2i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{3}}}_{=0}\right)c\\
&= 0.
\end{aligned}$$



Exercice 29 : Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations géométriques données par l'écriture complexe suivante :

1. $z \longmapsto \mathrm{i}\,\overline{z}$
2. $z \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{i}} z$
3. $z \longmapsto z + (2 + \mathrm{i}\,)$
4. $z \longmapsto (1 + \mathrm{i}\,\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - \mathrm{i}\,)$
5. $z \longmapsto (1 + \mathrm{i}\,\tan\alpha)z - \mathrm{i}\,\tan\alpha$, $\alpha \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.
6. $z \longmapsto z + 3 - \mathrm{i}$
7. $z \longmapsto 2z + 3$
8. $z \longmapsto \mathrm{i}\,z + 1$
9. $z \longmapsto (1 - \mathrm{i}\,)z + 2 + \mathrm{i}$

Correction :

2. On écrit $\dfrac{1}{i}z = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}} z$, et on remarque que l'on a affaire à une rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
3. On a ici l'écriture d'une translation de vecteur $(2, 1)$.
4. L'application de la forme $z \longmapsto az + b$ est une similitude directe. Cherchons son centre qui est le point invariant, c'est-à-dire le point vérifiant $z = (1 + \mathrm{i}\,\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - \mathrm{i}\,)$.

   On trouve $z = 1 + i$, le centre de la similitude est donc le point $\mathrm{A}(1, 1)$.

   On a de plus
   $$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}.$$
   Le rapport de la similitude est donc égal à 2, et l'angle à $\dfrac{\pi}{3}$.
5. Si $\alpha = 0$, la transformation est simplement l'identité. Sinon, on a affaire à une similitude directe. Son point invariant est le nombre complexe z solution de l'équation
   $$z = (1 + \mathrm{i}\,\tan\alpha)z - \mathrm{i}\,\tan\alpha \iff z = 1.$$

Le centre de la similitude est donc le point $A(1, 0)$.

De plus, on a

$$1 + \mathrm{i}\tan\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \times (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha} e^{\mathrm{i}\alpha}.$$

Ainsi, la similitude est de rapport $\frac{1}{\cos\alpha}$ et d'angle α.

6. C'est la translation de vecteur $\vec{u}(3, -1)$.
7. $\omega = 2\omega + 3 \iff \omega = -3$. C'est l'homothétie de rapport 2 et de centre $\Omega(-3, 0)$.
8. $\omega = \mathrm{i}\omega + 1 \iff \omega = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{i})$.

   Comme $i = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, c'est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
9. $\omega = (1 - \mathrm{i})\omega + 2 + \mathrm{i} \iff \omega = 1 - 2\mathrm{i}$.

   Comme $1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, c'est la similitude de centre $\Omega(1, -2)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Exercice 30 : Soit r_1 la rotation de centre A d'affixe -1 et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre B d'affixe $j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi/3}$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Montrer que $r_2 \circ r_1$ est une symétrie centrale dont on déterminera l'affixe du centre.

Exercice 31 : On donne A, d'affixe $1 + \mathrm{i}$, B, d'affixe $1 - \mathrm{i}$ et C, d'affixe $4 + 3\mathrm{i}$ dans le plan complexe.

Déterminer la nature du triangle $\mathrm{ABA'}$ où $\mathrm{A'}$ est le symétrique de A par rapport au centre de gravité de ABC.

Exercice 32 : Dans le plan complexe, on donne $\mathrm{A}(2)$, $\mathrm{B}(1 - \mathrm{i})$ et $\mathrm{C}(1 + \mathrm{i})$.

1. Quelle est la nature de ABC ?
2. Γ est le cercle de diamètre [BC] et r est la rotation de centre A qui envoie B sur C. Si M est un point de Γ et si $\mathrm{M'}$ est son image par r, démontrer que C, M et $\mathrm{M'}$ sont alignés.