

Équations différentielles (linéaires)

Exercice 1 : Résoudre les équations différentielles suivantes en trouvant une solution particulière par la méthode de variation de la constante :

- 1 $y' - \left(2x - \frac{1}{x}\right)y = 1$ sur $]0; +\infty[$.
- 2 $y' - y = x^k \exp(x)$ sur \mathbb{R} , avec $k \in \mathbb{N}$.
- 3 $x(1 + \ln^2(x))y' + 2 \ln(x)y = 1$ sur $]0; +\infty[$.

Correction :

- 1 **Résolution de l'équation homogène $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 0$:** Une primitive de $a(x) = 2x - \frac{1}{x}$ est $A(x) = x^2 - \ln(x)$.

Les solutions de l'équation homogène sont donc les $y(x) = \lambda \exp(x^2 - \ln(x)) = \lambda \frac{1}{x} \exp(x^2)$, pour λ une constante réelle quelconque.

Recherche d'une solution particulière : Nous allons utiliser la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière à l'équation $y' - \left(2x - \frac{1}{x}\right)y = 1$.

On cherche une telle solution sous la forme $y_p(x) = \lambda(x) \frac{1}{x} \exp(x^2)$ où $x \mapsto \lambda(x)$ est maintenant une fonction.

On calcule d'abord, pour tout x de $]0; +\infty[$

$$y'_p(x) = \lambda'(x) \frac{1}{x} \exp(x^2) + \lambda(x) \left(-\frac{1}{x^2} + 2\right) \exp(x^2)$$

Maintenant y_p est solution de $y' - \left(2x - \frac{1}{x}\right)y = 1$ si, et seulement si

$$\begin{aligned} y'_p - \left(2x - \frac{1}{x}\right)y_p = 1 &\Leftrightarrow \lambda'(x) \frac{1}{x} \exp(x^2) + \lambda(x) \left(-\frac{1}{x^2} + 2\right) \exp(x^2) - \left(2x - \frac{1}{x}\right) \lambda(x) \frac{1}{x} \exp(x^2) = 1 \\ &\Leftrightarrow \lambda'(x) \frac{1}{x} \exp(x^2) = 1 \quad (\text{cela doit se simplifier!}) \\ &\Leftrightarrow \lambda'(x) = x \exp(-x^2) \end{aligned}$$

Ainsi on peut prendre $\lambda(x) = -\frac{1}{2} \exp(-x^2)$, ce qui fournit la solution particulière :

$$y_p(x) = \lambda(x) \frac{1}{x} \exp(x^2) = -\frac{1}{2} \exp(-x^2) \frac{1}{x} \exp(x^2) = -\frac{1}{2x}.$$

Pour se rassurer, on n'oublie pas de vérifier que c'est bien une solution !

Solution générale : L'ensemble des solutions s'obtient par la somme de la solution particulière avec les solutions de l'équation homogène.

Autrement dit, les solutions sont les fonctions :

$$x \mapsto y(x) = -\frac{1}{2x} + \frac{\lambda}{x} e^{x^2} = \frac{1}{2x} (2\lambda e^{x^2} - 1) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

- 2 **Résolution de l'équation homogène $y' - y = 0$:** Les solutions de l'équation homogène sont les

$$x \mapsto y(x) = \lambda \exp(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Recherche d'une solution particulière : On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(x) = \lambda(x) \exp(x)$ où $x \mapsto \lambda(x)$ est maintenant une fonction.

Comme $y_0'(x) = \lambda'(x) \exp(x) + \lambda(x) \exp(x)$ alors y_0 est solution de $y' - y = x^k \exp(x)$ si, et seulement si

$$\begin{aligned} \lambda'(x) \exp(x) + \lambda(x) \exp(x) - \lambda(x) \exp(x) &= x^k \exp(x) \iff \lambda'(x) \exp(x) = x^k \exp(x) \\ &\iff \lambda'(x) = x^k. \end{aligned}$$

On fixe $\lambda(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}$, ce qui conduit à la solution particulière :

$$x \mapsto y_0(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} \exp(x).$$

Solution générale : L'ensemble des solutions est donc formé des fonctions :

$$x \mapsto y(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} \exp(x) + \lambda \exp(x) = \left(\frac{x^{k+1}}{k+1} + \lambda \right) e^x \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

3 Le coefficient de y' ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$, l'équation peut donc se mettre sous la forme

$$y' + \frac{2 \ln(x)}{x(1 + \ln^2(x))} y = \frac{1}{x(1 + \ln^2(x))}$$

⊙ Les solutions de l'équation homogène associée sont les $x \mapsto y(x) = \lambda e^{A(x)}$, où A est une primitive de $a(x) = -\frac{2 \ln(x)}{x(1 + \ln^2(x))}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On peut donc choisir $A(x) = -\ln(u(x))$ avec $u(x) = 1 + \ln^2(x)$.

Les solutions de l'équation sont les $x \mapsto y(x) = \lambda e^{-\ln(1 + \ln^2(x))} = \frac{\lambda}{1 + \ln^2(x)}$.

⊙ Utilisons la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière de l'équation avec second membre.

On cherche $y_0(x) = \frac{\lambda(x)}{1 + \ln^2(x)}$, avec λ une fonction dérivable.

$y_0 = \lambda(x)z(x)$ est solution si, et seulement si

$$\begin{aligned} y_0' + \frac{2 \ln(x)}{x(1 + \ln^2(x))} y_0 &= \frac{1}{x(1 + \ln^2(x))} \iff \lambda'(x)z(x) + \lambda(x) \underbrace{\left[z'(x) + \frac{2 \ln(x)}{x(1 + \ln^2(x))} z(x) \right]}_{=0 \text{ car } z(x) = \frac{1}{1 + \ln^2(x)} \text{ est solution de l'équation homogène}} = \frac{1}{x(1 + \ln^2(x))} \\ &\iff \frac{\lambda'(x)}{1 + \ln^2(x)} = \frac{1}{x(1 + \ln^2(x))} \\ &\iff \lambda'(x) = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

On peut donc choisir $\lambda(x) = \ln(x)$, ce qui donne la solution particulière $x \mapsto y_0(x) = \frac{\ln(x)}{1 + \ln^2(x)}$.

⊙ Les solutions sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène : ce sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto y(x) = \frac{\ln(x) + \lambda}{1 + \ln^2(x)} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel.

Commentaires : Le choix d'une primitive de λ' se fait à constante additive près.

Si on avait choisi par exemple $\lambda(x) = \ln(x) + 1$, la solution particulière aurait été différente, mais les solutions de l'équation avec second membre auraient été les fonctions de la forme

$$x \mapsto y(x) = \frac{\ln(x) + 1 + \lambda}{1 + \ln^2(x)} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Quitte à poser $\mu = 1 + \lambda$, ce sont évidemment les mêmes que celles trouvées précédemment !

Exercice 2 : Résoudre :

1 $(x+1)y' - xy + 1 = 0$ sur $] -1; +\infty[$.

2 $y' = 2y + \sin(x) + e^x + x$ sur \mathbb{R} .

3 $y' = -\frac{y}{x} + \arctan(x)$ sur \mathbb{R}_+^* .

4 $y' + y \cos(x) = 0$.

5 $e^x y' + x^2 y = 0$.

6 $(1+x^2)y' + 2xy = 1 + 2x^2$.

7 $y' - xy = xe^{x^2}$.

8 $(1+x^2)y' + 2xy = \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}^* .

9 $xy' + 3y = \frac{1}{1-x^2}$ sur $]0; 1[$.

10 $2x(1+x)y' + (1+x)y = 2\sqrt{|x|}$ sur $] -1; 0[$.

11 $y' \sin(x) + y \cos(x) = \sin^2 x$ sur $]0; \pi[$.

12 $y' - y = (2x+1)e^x$

13 $y' + y = \cos(2x) + 2\sin(2x)$

14 $y' + y = 4\operatorname{ch}(x)$

Correction :

4 $S = \{x \mapsto ke^{-\sin(x)}, k \in \mathbb{R}\}$

5 $S = \{x \mapsto k(x^2 + 2x + 2)e^{-x}, k \in \mathbb{R}\}$

6 $S = \left\{x \mapsto \frac{k}{1+x^2} + \frac{x + \frac{2}{3}x^3}{1+x^2}, k \in \mathbb{R}\right\}$

7 $S = \{x \mapsto ke^{\frac{x^2}{2}} + e^{x^2}, k \in \mathbb{R}\}$

8 $S = \left\{x \mapsto \frac{k}{1+x^2} + \frac{\ln(x)}{1+x^2}, k \in \mathbb{R}\right\}$

9 $S = \left\{x \mapsto \frac{k}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^3} \ln \frac{1+x}{1-x}, k \in \mathbb{R}\right\}$

10 $S = \left\{x \mapsto \frac{k}{\sqrt{|x|}} - \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{|x|}}, k \in \mathbb{R}\right\}$

11 $S = \left\{x \mapsto \frac{k}{\sin(x)} + \frac{x}{2\sin(x)} - \frac{\cos(x)}{2}, k \in \mathbb{R}\right\}$

12 Les solutions de l'équation homogène sont de la forme λe^x , $\lambda \in \mathbb{R}$

Comme le coefficient dans l'exponentielle correspond à celui du membre de droite, on va chercher une solution particulière sous la forme

$$y_p(x) = x(ax+b)e^x.$$

$$\text{On a alors } y_p'(x) = (ax^2 + (2a+b)x + b)e^x$$

$$y_p'(x) - y_p(x) = (2ax+b)e^x.$$

y_p est donc solution de l'équation complète si $2ax+b = 2x+1$.

On trouve $a = b = 1$ pour obtenir la solution particulière $y_p : x \mapsto (x^2 + x)e^x$.

Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions de la forme :

$$x \mapsto (x^2 + x + \lambda)e^x.$$

13 Le même raisonnement donne pour la deuxième :

$$x \mapsto \lambda e^{-2x} + \frac{3}{4} \cos(x) - \frac{1}{4} \sin(x).$$

Exercice 3 : Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x)f(-x) = 1$$

Exercice 4 : Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2xf(x) = 3 \int_0^x f(t)dt$$

Exercice 5 (Solutions maximales (Hors-Programme)) :

1 Résoudre l'équation différentielle $xy' + y = 0$ sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* .

Montrer que cette équation admet une unique solution sur \mathbb{R} .

2 Résoudre l'équation différentielle $xy' - y = 0$ sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* .

Montrer que cette équation admet une unique solution sur \mathbb{R} telle que $y(1) = 2$.

Combien y a-t-il de solutions sur \mathbb{R} ?

3 Résoudre l'équation différentielle $xy' - 2y = 0$ sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* .

Combien y a-t-il de solutions sur \mathbb{R} vérifiant $y(1) = 2$?

Combien y a-t-il de solutions sur \mathbb{R} vérifiant $y(1) = 2$ et $y(-1) = 1$?

4 Résoudre sur \mathbb{R} les équations différentielles suivantes :

a $\sqrt{|x|}y' = y.$

b $xy' = y.$

5 Résoudre sur le plus grand intervalle possible l'équation différentielle :

$$xy' - y = x^3.$$

Exercice 6 : Déterminer les solutions réelles des équations suivantes :

1 $y'' - 3y' + 2y = e^x + e^{5x}.$

4 $y'' - 4y' + 4y = 4\text{sh}(2x)$

2 $y'' - y' - 2y = \cos(x).$

5 $y'' = e^x + \sin(x)$

3 $y'' - y = x^2 + 1 - e^x.$

Correction :

1 $S_{\mathbb{R}} = \left\{ x \mapsto k_1 e^x + k_2 e^{2x} - x e^x + \frac{1}{12} e^{5x}, (k_1; k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$

2 $S_{\mathbb{R}} = \left\{ x \mapsto k_1 e^{2x} + k_2 e^{-x} - \frac{3 \cos(x) + \sin(x)}{10}, (k_1; k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$

3 **a** L'équation caractéristique est $r^2 - 1 = 0$ dont les solutions sont ± 1 .

b Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x}$.

c Pour chercher une solution particulière, utilisons le principe de superposition :

i. On commence par chercher une solution de l'équation $y'' - y = x^2 + 1$ sous la forme $y_1(x) = ax^2 + bx + c$.

On a donc $y_1''(x) = 2a \iff -ax^2 - bx + 2a - c = x^2 + 1 \iff a = -1, b = 0$ et $c = 2a - 1 = -3$.

On obtient donc $y_1(x) = -x^2 - 3$.

ii. Cherchons maintenant une solution particulière à l'équation $y'' - y = e^x$ sous la forme $y_2(x) = (\alpha x + \beta) e^x$ puisque 1 est racine de l'équation caractéristique.

On a donc $y_1'(x) = (\alpha x + \alpha + \beta) e^x$, et $y''(x) = (\alpha + 2\alpha + \beta) e^x$, donc

$$\begin{aligned} y'' - y &= e^x \iff \alpha x + 2\alpha + \beta - (\alpha x + \beta) = 1 \\ &\iff 2\alpha = 1 \iff \alpha = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On peut prendre n'importe quelle valeur pour β , choisissons le par exemple tel que $y_2(x) = \frac{1}{2} x e^x$.

Une solution particulière de l'équation complète est donc $y_p : x \mapsto -x^2 - 3 - \frac{1}{2} x e^x$.

La solution générale est donc :

$$x \mapsto -x^2 - 3 + \left(\lambda - \frac{1}{2} x \right) e^x + \mu e^{-x}.$$

4 - **Solution homogène** : $(E_0) : y'' - 4y' + 4y = 0$.

$(E_c) : r^2 - 4r + 4 = 0$ a une seule solution 2.

Les solutions réelles de (E_0) sont les

$$x \mapsto (k_1 x + k_2) e^{2x} \text{ avec } (k_1 ; k_2) \in \mathbb{R}^2$$

- **Recherche de solution particulière** : Comme 2 est racine double de l'équation caractéristique, on va utiliser le principe de superposition pour résoudre séparément les équations $y'' - 4y' + 4y = -2e^{-2x}$ et $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$.

La première équation ne pose pas de problèmes et une solution particulière sera aisément trouvée sous la forme $y_{p_1} = \lambda e^{-2x}$ où λ est solution de $4\lambda + 8\lambda + 4\lambda = -2$ soit $\lambda = -\frac{1}{8}$ et $y_{p_1} = -\frac{1}{8} e^{-2x}$.

Pour la seconde, on cherche une solution y_{p_2} sous la forme :

$$\begin{aligned} y_{p_2} &= \lambda x^2 e^{2x} \\ y_{p_2}' &= \lambda (2x^2 + 2x) e^{2x} \\ y_{p_2}'' &= \lambda (4x^2 + 8x + 2) e^{2x} \end{aligned}$$

y_p sera solution de notre équation si, et seulement si

$$\begin{aligned} 2e^{2x} &= y_p'' - 4y_p' + 4y_p \\ 2e^{2x} &= 2\lambda e^{2x} \\ \lambda &= 1 \text{ et } y_{p_2} = x^2 e^{2x}. \end{aligned}$$

Une solution particulière de $y'' - 4y' + 4y = 4\text{sh}(2x)$ est donc $x \mapsto x^2 e^{2x} - \frac{1}{8} e^{-2x}$.

- **Solution générale** : $S_{\mathbb{R}} = \left\{ x \mapsto (k_1 x + k_2) e^{2x} + x^2 e^{2x} - \frac{1}{8} e^{-2x}, (k_1 ; k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

5 $S_{\mathbb{R}} = \{ x \mapsto e^x - \sin(x) + k_1 x + k_2, (k_1 ; k_2) \in \mathbb{R}^2 \}$

Exercice 7 : Déterminer les solutions réelles et complexes de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$, et montrer qu'elles tendent vers 0 en $+\infty$.

Exercice 8 : Résoudre les équations différentielles suivantes, avec les conditions initiales indiquées :

1 $y'' + 6y' + 9y = 50 \sin(x)$ avec $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

$$\boxed{2} \quad y'' - y' - 2y = 2x \quad \text{avec} \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{3} \quad y'' - 4y' + 5y = e^x \quad \text{avec} \quad y(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad y'(0) = 0.$$

$$\boxed{4} \quad y'' + 2y' + y = \cos(2t) \quad \text{avec} \quad y(0) = 1 \quad \text{et} \quad y'(0) = 0.$$

$$\boxed{5} \quad y'' + y' - 2y = 8 \sin(2t) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}.$$

$$\boxed{6} \quad \begin{cases} y'' - 2y' - 3y = 2 \operatorname{sh}(x) - 3 \\ y(0) = \frac{3}{4} \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad \boxed{7} \quad \begin{cases} y'' + 2y' + 10y = 5 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Correction :

$$\boxed{1} \quad \mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto -3 \cos(x) + 4 \sin(x) + 5(2x + 1)e^{-3x}\}.$$

$$\boxed{2} \quad \mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto -e^{-x} + \frac{1}{2}e^{2x} - x + \frac{1}{2}\right\}.$$

Exercice 9 (Variation de la constante d'ordre 2) :

Après avoir trouvé une solution homogène simple adapter la méthode de variation de la constante pour résoudre $t^2 y'' + ty' - y = 1$ sur \mathbb{R}_+^* .

Correction : $y : t \mapsto t$ est une solution de E_0 .

On applique la méthode de Lagrange en posant $y(t) = \lambda(t)t$.

On arrive à $t^3 \lambda'' + 3t^2 \lambda' = 0$.

D'où, $\lambda(t) = \frac{1}{t^2}$ après deux intégrations convient et fournit une deuxième solution de l'équation E_0 :

$$y : t \mapsto \frac{1}{t}.$$

En remarquant qu'une solution particulière est la constante 1, on trouve l'ensemble des solutions :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+^*} = \left\{t \mapsto \frac{\lambda}{t} + \mu t - 1, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Exercice 10 : On considère $y'' - 4y' + 4y = d(x)$.

$$\boxed{1} \quad \text{Résoudre l'équation homogène, puis trouver une solution particulière lorsque } d(x) = e^{-2x}, \text{ puis } d(x) = e^{2x}.$$

$$\boxed{2} \quad \text{Donner la forme générale des solutions quand } d(x) = \frac{1}{2} \operatorname{ch}(2x).$$

Correction :

$$\boxed{1} \quad \text{L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est } r^2 - 4r + 4 = 0, \text{ pour laquelle } r = 2 \text{ est racine double.}$$

Les solutions de l'équation homogène sont donc les $(\lambda x + \mu)e^{2x}$.

Lorsque $d(x) = e^{-2x}$, on cherche une solution particulière sous la forme ae^{-2x} , qui convient si $a = \frac{1}{16}$.

Lorsque $d(x) = e^{2x}$, comme 2 est la racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution comme le produit de e^{2x} par un polynôme de degré 2.

Comme on sait déjà que $(\lambda x + \mu)e^{2x}$ est solution de l'équation homogène, il est inutile de faire intervenir des termes de degré 1 et 0. On cherche donc une solution de la forme ax^2e^{2x} , qui convient si, et seulement si $a = \frac{1}{2}$.

- 2 Puisque $\frac{1}{2}\text{ch}(2x) = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x})$, d'après le principe de superposition les solutions générales sont obtenues sous la forme

$$x \mapsto y(x) = \frac{1}{64}e^{-2x} + \frac{1}{8}x^2e^{2x} + (\lambda x + \mu)e^{2x}, \quad (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 11 : Déterminer toutes les fonctions $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dérivables, telles que

$$\forall x \in [0; 1], \quad f'(x) + f(x) = f(0) + f(1).$$

Correction : Une fonction $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ convient si, et seulement si

- f est dérivable
- f est solution de $y' + y = c$
- f vérifie $f(0) + f(1) = c$ (où c est un réel quelconque)

Or, les solutions de l'équation différentielle $y' + y = c$ sont exactement les $f : x \mapsto \lambda e^{-x} + c$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ (en effet, on voit facilement que la fonction constante égale à c est une solution particulière de $y' + y = c$).

Clairement, ces fonctions sont dérivables et $f(0) + f(1) = \lambda(1 + e^{-1}) + 2c$.

Donc, la troisième condition est satisfaite si, et seulement si $-\lambda(1 + e^{-1}) = c$.

Les solutions du problème sont exactement les

$$x \mapsto f(x) = \lambda(e^{-x} - 1 - e^{-1}), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 12 : On considère l'équation : $y'' + 2y' + 4y = xe^x$ (E)

- 1 Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
- 2 Trouver une solution particulière de (E), puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E).
- 3 Déterminer l'unique solution h de (E) vérifiant $h(0) = 1$ et $h(1) = 0$.
- 4 Soit $f :]0; +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ et qui vérifie :

$$t^2 f''(t) + 3t f'(t) + 4f(t) = t \ln t.$$

- a On pose $g(x) = f(e^x)$, vérifier que g est solution de (E).
- b En déduire une expression de f .

Correction :

- 1 Le polynôme caractéristique associé à E est : $p(x) = x^2 + 2x + 4$; son discriminant est $\Delta = -12$ et il a pour racines les 2 nombres complexes $-1 + i\sqrt{3}$ et $-1 - i\sqrt{3}$.

Les solutions de l'équation homogène sont donc toutes fonctions définies par :

$$y(x) = e^{-x}(a \cos \sqrt{3}x + b \sin \sqrt{3}x)$$

obtenues lorsque a, b décrivent \mathbb{R} .

2 Le second membre est de la forme $e^{\lambda x}Q(x)$ avec $\lambda = 1$ et $Q(x) = x$.

On cherchera une solution de l'équation sous la forme : $y_p(x) = R(x)e^x$ avec R polynôme de degré égal à celui de Q puisque $p(1) \neq 0$.

On pose donc $R(x) = ax + b$.

D'où,

$$y_p'(x) + 2y_p'(x) + 4y_p(x) = (7ax + 7b + 4a)e^x.$$

Donc y_p est solution si, et seulement si $7ax + 7a + 4b = x$.

On trouve après identification des coefficients :

$$a = \frac{1}{7} \quad \text{et} \quad b = \frac{-4}{49}.$$

La fonction $x \mapsto y_p(x) = \frac{1}{7}(x - \frac{4}{7})e^x$ est donc solution de E et la forme générale des solutions de E est :

$$x \mapsto y(x) = e^{-x}(a \cos \sqrt{3}x + b \sin \sqrt{3}x) + \frac{1}{7}\left(x - \frac{4}{7}\right)e^x, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

3 Soit h une solution de E .

Les conditions $h(0) = 1$, $h(1) = 0$ sont réalisées si, et seulement si

$$a = \frac{53}{49} \quad \text{et} \quad b = -\frac{53 \cos \sqrt{3} + 3e^2}{49 \sin \sqrt{3}}.$$

4 \odot On a $g'(x) = e^x f'(e^x)$ et $g''(x) = e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x)$.

D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g''(x) + 2g'(x) + 4g(x) = e^{2x} f''(e^x) + 2e^x f'(e^x) + 4f(e^x) = e^x \ln e^x = xe^x.$$

Donc g est solution de E .

\odot Réciproquement pour $f(t) = g(\ln(t))$ où g est une solution de E on montre que f est 2 fois dérivable et vérifie l'équation donnée en 2.

Les fonctions f recherchées sont donc de la forme :

$$t \mapsto \frac{1}{t} \left(a \cos(\sqrt{3} \ln(t)) + b \sin(\sqrt{3} \ln(t)) \right) + \frac{t}{7} \left(\ln(t) - \frac{4}{7} \right), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Exercice B : Résoudre les équations différentielles suivantes à l'aide du changement de variable suggéré.

1 $x^2 y'' + xy' + y = 0$, sur $]0; +\infty[$, en posant $x = e^t$;

2 $(1 + x^2)^2 y'' + 2x(1 + x^2)y' + my = 0$, sur \mathbb{R} , en posant $x = \tan t$ (en fonction de $m \in \mathbb{R}$).

3 $y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x}$ (poser $u = e^x$).

4 $y'' - \left(6x + \frac{1}{x}\right)y' + 8x^2y = x^4$ (poser $u = x^2$).

5 $x(1 - 2 \ln(x))y'' + (1 + 2 \ln(x))y' - \frac{4}{x}y = 0$ (chercher une solution de la forme $y = x^\alpha$).

Correction :

- 1 Puisqu'on cherche y fonction de $x \in]0; +\infty[$ et que l'application $t \mapsto e^t$ est bijective de \mathbb{R} sur $]0; +\infty[$, on peut poser $x = e^t$ et $z(t) = y(e^t)$.

On a alors $t = \ln(x)$ et $y(x) = z(\ln(x))$.

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} y(x) &= z(\ln(x)) = z(t) \\ y'(x) &= \frac{1}{x} z'(\ln(x)) = e^{-t} z'(t) \\ y''(x) &= -\frac{1}{x^2} z'(\ln(x)) + \frac{1}{x^2} z''(\ln(x)) = -e^{-2t} z'(t) + e^{-2t} z''(t) \end{aligned}$$

En remplaçant, on obtient donc que

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad x^2 y'' + xy' + y = 0 \iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad z''(t) + z(t) = 0$$

autrement dit, $z(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Finalement, les solutions de l'équation de départ sont de la forme

$$y(x) = z(\ln(x)) = \lambda \cos(\ln(x)) + \mu \sin(\ln(x))$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- 2 L'application $t \mapsto \tan t$ étant bijective de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sur \mathbb{R} , on peut poser $x = \tan t$ et $z(t) = y(\tan t)$.

On a alors $t = \arctan x$ et ainsi :

$$\begin{aligned} y(x) &= z(\arctan x) = z(t) \\ y'(x) &= \frac{1}{1+x^2} z'(\arctan x) \\ y''(x) &= \frac{1}{(1+x^2)^2} (z''(\arctan x) - 2xz'(\arctan x)) \end{aligned}$$

En remplaçant, on obtient que z est solution de l'équation différentielle $z'' + mz = 0$. Pour résoudre cette équation, on doit distinguer trois cas :

- $m < 0$: alors $z(t) = \lambda e^{\sqrt{-m}t} + \mu e^{-\sqrt{-m}t}$ et donc

$$y(x) = \lambda e^{\sqrt{-m} \arctan x} + \mu e^{-\sqrt{-m} \arctan x},$$

- $m = 0$: $z'' = 0$ et donc $z(t) = \lambda t + \mu$ et $y(x) = \lambda \arctan x + \mu$,

- $m > 0$: alors $z(t) = \lambda \cos(\sqrt{m}t) + \mu \sin(\sqrt{m}t)$ et donc

$$y(x) = \lambda \cos(\sqrt{m} \arctan x) + \mu \sin(\sqrt{m} \arctan x)$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- 3 $y = -e^x + \lambda e^{e^x} + \mu e^{-e^x}$.

- 4 $x \mapsto \lambda e^{x^2} + \mu e^{2x^2} + \frac{2x^2 + 3}{16}$.

- 5 $x \mapsto \lambda x^2 + \mu \ln(x)$.

$$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 14 (Équations à variables séparables) :

- 1 $y' = y(1 + y)$.

- 2 $y' = \sin(x) \cos(y)$.

- 3 $2yy' \sqrt{x} = \sqrt{y^2 - 1}$.

- 4 $1 + xy' = e^y$, condition initiale : $y(1) = 1$.

5 $y' = \sqrt{|y|}$ et étudier les problèmes de raccordements.

Correction :

1 $y = -1 + \frac{1}{1 - \lambda e^x}$ ou $y = -1$.

2 $y \equiv 2 \arctan(\lambda e^{-\cos(x)}) - \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

3 $y = \pm \sqrt{1 + (\sqrt{x} + \lambda)^2}$ ou $y = \pm 1$.

4 $y = -\ln(1 - x(1 - 1/e))$.

5 $y = \left(\lambda + \frac{x}{2}\right) \left|\lambda + \frac{x}{2}\right|$ ou $y = 0$.

Exercice 15 (Recollement (Hors-Programme)) : Résoudre l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y' - 2xy = x^2,$$

sur chacun des intervalles I suivants :

1 $I =]1; +\infty[$,

2 $I =]-1; 1[$,

3 $I =]-1; +\infty[$

4 et $I = \mathbb{R}$.

Correction : L'équation différentielle à résoudre dans cet exercice est linéaire du premier ordre. On note (E) l'équation différentielle proposée et (E_H) l'équation homogène associée.

1 Soit I l'un des deux intervalles $] -1; 1[$ ou $] 1; +\infty[$.

Les fonctions $x \mapsto \frac{-2x}{1-x^2}$ et $x \mapsto \frac{x^2}{1-x^2}$ sont continues sur I et on sait que les solutions de (E) sur I sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).

Soit f une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de (E) sur I} &\Leftrightarrow \forall x \in I, (1-x^2)f'(x) - 2xf(x) = x^2 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, ((1-x^2)f)'(x) = x^2 \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in I, (1-x^2)f(x) = \frac{x^3}{3} + \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} / \forall x \in I, f(x) = \frac{x^3 + \lambda_0}{3(1-x^2)}, \quad (\text{en renommant } \lambda_0 \text{ la constante } 3\lambda). \end{aligned}$$

Attention ! La constante λ_0 dépend évidemment de l'intervalle I choisi.

3 Soit $I =]-1; +\infty[$.

Soit f une éventuelle solution de (E) sur I. Les restrictions de f à $] -1; 1[$ et $] 1; +\infty[$ sont encore solution de (E) et donc de la forme précédente.

Par suite, nécessairement, il existe deux constantes λ_1 et λ_2 telles que, pour $-1 < x < 1$, $f(x) = \frac{x^3 + \lambda_1}{3(1-x^2)}$

et pour $x > 1$, $f(x) = \frac{x^3 + \lambda_2}{3(1-x^2)}$.

Enfin, l'équation impose $-2 \times 1 \times f(1) = 1^2$ soit $f(1) = -\frac{1}{2}$.

En résumé, une éventuelle solution de (E) sur I est nécessairement de la forme :

$$\forall x > -1, f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \frac{x^3 + \lambda_1}{3(1-x^2)} & \text{si } -1 < x < 1, \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 1, \\ f_2(x) = \frac{x^3 + \lambda_2}{3(1-x^2)} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Réciproquement, une telle fonction f ne sera solution de (E) si, et seulement si elle est continue et dérivable sur $]-1; +\infty[$. Les restrictions f_1 et f_2 sont clairement dérivables, respectivement, sur leur intervalle de définition.

Il nous reste à vérifier qu'en les points, dits de raccordement, la fonction f est continue et dérivable.

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f_1(x)$ n'existe que si $\lambda_1 = -1$ et dans ce cas

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f_1(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x^2 + x + 1}{-3(1+x)} = -\frac{1}{2} = f(1).$$

La solution f est donc continue à gauche en 1.

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f_2(x)$ n'existe que si $\lambda_2 = -1$ et dans ce cas

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f_2(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 + x + 1}{-3(1+x)} = -\frac{1}{2} = f(1).$$

La solution f est donc également continue à droite en 1.

Une telle solution f avec $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ est donc bien continue sur $]-1; +\infty[$.

Vérifions maintenant si la fonction définie par

$$\forall x > -1, f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \frac{x^3 - 1}{3(1-x^2)} = -\frac{x^2 + x + 1}{3(1+x)} & \text{si } x \neq -1, \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

est dérivable sur I.

- Sur $]-1; 1[\cup]1; +\infty[$, la fonction f est clairement dérivable et on a :

$$\forall x \in]-1; 1[\cup]1; +\infty[, f'(x) = \frac{x(x+2)}{3(1+x)^2}.$$

- En 1, on revient à la définition et on regarde, la limite des taux d'accroissement en 1 par valeurs supérieures et inférieures :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{-\frac{x^2+x+1}{3(1+x)} + \frac{1}{2}}{x - 1} = \frac{2x^2 - x - 1}{6(1+x)(1-x)} = \frac{2x+1}{6(1+x)}.$$

D'où $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{6(1+x)} = \frac{1}{4} < \infty$. Elle est dérivable en 1.

La fonction f ainsi déterminée par les choix précédents de λ_1 et λ_2 est donc bien dérivable sur I. C'est une solution de (E) sur I. C'est même la seule.

Commentaires : $\forall x \in]-1; 1[\cup]1; +\infty[, \lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = \frac{x(x+2)}{3(1+x)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x+2)}{3(1+x)^2} = \frac{1}{4}$.

La fonction f est donc même de classe \mathcal{C}^1 sur I.

- 4] Si $I = \mathbb{R}$, soit f une éventuelle solution de (E) sur \mathbb{R} . La restriction de f à $] -1; +\infty[$ est nécessairement la fonction précédente.

Or, cette fonction tend vers $-\infty$ quand x tend vers -1 par valeurs supérieures.

Donc, f ne peut être continue sur \mathbb{R} et (E) n'a pas de solution sur \mathbb{R} tout entier.

Exercice 16 (Équation de Bernoulli) :

- 1] Montrer que l'équation de Bernoulli

$$y' + a(x)y + b(x)y^n = 0 \quad n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, n \neq 1,$$

se ramène à une équation linéaire par le changement de fonction $z(x) = \frac{1}{y^{n-1}(x)}$.

- 2] Trouver les solutions de l'équation $xy' + y - xy^3 = 0$.

Correction :

- 1] On suppose qu'une solution y ne s'annule pas.

On divise l'équation $y' + a(x)y + b(x)y^n = 0$ par y^n , ce qui donne

$$\frac{y'}{y^n} + a(x)\frac{1}{y^{n-1}} + b(x) = 0.$$

On pose $z(x) = \frac{1}{y^{n-1}}$ et donc $z'(x) = (1-n)\frac{y'}{y^n}$. L'équation de Bernoulli devient une équation différentielle linéaire :

$$\frac{1}{1-n}z' + a(x)z + b(x) = 0$$

- 2] Équation $xy' + y - xy^3 = 0$.

Cherchons les solutions y qui ne s'annulent pas. On peut alors diviser par y^3 pour obtenir :

$$x\frac{y'}{y^3} + \frac{1}{y^2} - x = 0$$

On pose $z(x) = \frac{1}{y^2(x)}$, et donc $z'(x) = -2\frac{y'(x)}{y^3(x)}$. L'équation différentielle s'exprime alors $\frac{-1}{2}xz' + z - x = 0$, c'est-à-dire :

$$xz' - 2z = -2x.$$

Les solutions sur \mathbb{R} de cette dernière équation sont les

$$z(x) = \begin{cases} \lambda_+ x^2 + 2x & \text{si } x \geq 0 \\ \lambda_- x^2 + 2x & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad \lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R}$$

Comme on a posé $z(x) = \frac{1}{y^2(x)}$, on se restreint à un intervalle I sur lequel $z(x) > 0$: nécessairement $0 \notin I$, donc on considère $z(x) = \lambda x^2 + 2x$, qui est strictement positif sur I_λ où

$$I_\lambda = \begin{cases}]0; +\infty[& \text{si } \lambda = 0 \\]0; -\frac{2}{\lambda}[& \text{si } \lambda < 0 \\]-\infty; -\frac{2}{\lambda}[\text{ ou }]0; +\infty[& \text{si } \lambda > 0 \end{cases}$$

On a $(y(x))^2 = \frac{1}{z(x)}$ pour tout $x \in I_\lambda$ et donc $y(x) = \epsilon(x) \frac{1}{\sqrt{z(x)}}$, où $\epsilon(x) = \pm 1$. Or y est continue sur l'intervalle I_λ et ne s'annule pas par hypothèse : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, y ne peut pas prendre à la fois des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives, donc $\epsilon(x)$ est soit constant égal à 1, soit constant égal à -1 . Ainsi les solutions cherchées sont les :

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda x^2 + 2x}} \text{ ou } y(x) = \frac{-1}{\sqrt{\lambda x^2 + 2x}} \text{ sur } I_\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Noter que la solution nulle est aussi solution.

Exercice 17 (Équation de Riccati) :

- 1] Montrer que si y_0 est une solution particulière de l'équation de Riccati

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x),$$

alors la fonction définie par $u(x) = y(x) - y_0(x)$ vérifie une équation de Bernoulli (avec $n = 2$).

- 2] Résoudre $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ en vérifiant d'abord que $y_0(x) = \frac{1}{x}$ est une solution.

Correction :

- 1] Soit y_0 une solution de $y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$. Posons $u(x) = y(x) - y_0(x)$, donc $y = u + y_0$. L'équation devient :

$$u' + y_0' + a(x)(u + y_0) + b(x)(u^2 + 2uy_0 + y_0^2) = c(x)$$

Comme y_0 est une solution particulière alors

$$y_0' + a(x)y_0 + b(x)y_0^2 = c(x)$$

Et donc l'équation se simplifie en :

$$u' + (a(x) + 2y_0(x)b(x))u + b(x)u^2 = 0$$

qui est une équation du type Bernoulli.

- 2] équation $x^2(y' + y^2) = xy - 1$.

- Après division par x^2 c'est bien une équation de Riccati sur $I =]-\infty; 0[$ ou $I =]0; +\infty[$.
- $y_0 = \frac{1}{x}$ est bien une solution particulière.
- On a $u(x) = y(x) - y_0(x)$ et donc $y = u + \frac{1}{x}$. L'équation $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ devient

$$x^2 \left(u' - \frac{1}{x^2} + u^2 + 2\frac{u}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = x \left(u + \frac{1}{x} \right) - 1$$

qui se simplifie en

$$x^2 \left(u' + u^2 + 2\frac{u}{x} \right) = xu$$

ce qui correspond à l'équation de Bernoulli :

$$u' + \frac{1}{x}u + u^2 = 0.$$

- Si u ne s'annule pas, en divisant par u^2 , cette équation devient $\frac{u'}{u^2} + \frac{1}{x} \frac{1}{u} + 1 = 0$. On pose $z(x) = \frac{1}{u}$, l'équation devient $-z' + \frac{1}{x}z + 1 = 0$. Ses solutions sur I sont les $z(x) = \lambda x + x \ln|x|$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi $u(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{\lambda x + x \ln|x|}$ mais il y a aussi la solution nulle $u(x) = 0$.
- Conclusion. Comme $y = u + \frac{1}{x}$, on obtient alors des solutions de l'équation de départ sur $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$:

$$y(x) = \frac{1}{x} \quad \text{ou} \quad y(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\lambda x + x \ln|x|} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$