Les Nombres Complexes II

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Séance animée de TD

Sommaire I

Exercice 1 :

Calculer les racines carrées $9 + 40\,\mathrm{i}$

Exercice 1 :

Calculer les racines carrées $9+40\,\mathrm{i}$

Correction :

Soit $u=a+\mathrm{i}\,b\in\mathbb{C}$ tel que $u^2=9+40\,\mathrm{i}$:

$$9+40\,\mathrm{i}=u^2$$

Exercice 1 :

Calculer les racines carrées $9+40\,\mathrm{i}$

Correction :

Soit $u = a + \mathrm{i}\,b \in \mathbb{C}$ tel que $u^2 = 9 + 40\,\mathrm{i}$:

$$9+40\,\mathrm{i} = u^2 \iff \begin{cases} 9+40\,\mathrm{i} & = & a^2-b^2+2ab\,\mathrm{i} \\ 41 & = & |u|^2 \end{cases}$$

Exercice 1 :

Calculer les racines carrées $9 + 40\,\mathrm{i}$

Correction :

Soit $u = a + \mathrm{i}\,b \in \mathbb{C}$ tel que $u^2 = 9 + 40\,\mathrm{i}$:

$$9 + 40\,\mathrm{i} = u^2 \iff \begin{cases} 9 + 40\,\mathrm{i} & = \quad a^2 - b^2 + 2ab\,\mathrm{i} \\ 41 & = \quad |u|^2 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 - b^2 & = \quad 9 \\ a^2 + b^2 & = \quad 41 \\ 2ab & = \quad 40. \end{cases}$$

Exercice 1 :

Calculer les racines carrées $9+40\,\mathrm{i}$

Correction :

Soit $u = a + \mathrm{i}\,b \in \mathbb{C}$ tel que $u^2 = 9 + 40\,\mathrm{i}$:

$$9+40\,\mathrm{i} = u^2 \iff \left\{\begin{array}{rcl} 9+40\,\mathrm{i} & = & a^2-b^2+2ab\,\mathrm{i} \\ 41 & = & |u|^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a^2-b^2 & = & 9 \\ a^2+b^2 & = & 41 \\ 2ab & = & 40. \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a^2 & = & 25 \\ b^2 & = & 16 \\ ab & > & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 1 :

Calculer les racines carrées $9+40\,\mathrm{i}$

Correction :

Soit $u = a + \mathrm{i}\, b \in \mathbb{C}$ tel que $u^2 = 9 + 40\,\mathrm{i}$:

$$9+40\,\mathrm{i} = u^2 \iff \left\{\begin{array}{rcl} 9+40\,\mathrm{i} & = & a^2-b^2+2ab\,\mathrm{i} \\ 41 & = & |u|^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a^2-b^2 & = & 9 \\ a^2+b^2 & = & 41 \\ 2ab & = & 40. \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a^2 & = & 25 \\ b^2 & = & 16 \\ ab & > & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{ab>0}{\iff} u_1 = 5+4\,\mathrm{i} \quad \text{ou} \quad u_2 = -5-4\,\mathrm{i}\,.$$

Exercice 1 :

Calculer les racines carrées $9+40\,\mathrm{i}$

Correction :

On cherche d'abord la forme exponentielle de $9+40\,\mathrm{i} = 41\left(\dfrac{9}{41}+\dfrac{40}{41}\,\mathrm{i}\right) = 41\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan\left(\frac{40}{9}\right)}$.

Soit $u = s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$:

$$9+40\,\mathrm{i} = u^2$$

Exercice 1 :

Calculer les racines carrées $9 + 40\,\mathrm{i}$

Correction :

On cherche d'abord la forme exponentielle de $9 + 40\,\mathrm{i} = 41\left(\dfrac{9}{41} + \dfrac{40}{41}\,\mathrm{i}\right) = 41\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan\left(\frac{40}{9}\right)}$.

Soit $u = s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$:

$$9 + 40\,\mathrm{i} = u^2 \iff 41\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan\left(\frac{40}{9}\right)} = s^2\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\varphi}$$

Exercice 1 :

Calculer les racines carrées $9+40\,\mathrm{i}$

Correction :

On cherche d'abord la forme exponentielle de $9+40\,\mathrm{i} = 41\left(\dfrac{9}{41}+\dfrac{40}{41}\,\mathrm{i}\right) = 41\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan\left(\frac{40}{9}\right)}$.

Soit $u = s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$:

$$9+40\,\mathrm{i} = u^2 \iff 41\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan\left(\frac{40}{9}\right)} = s^2\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\varphi} \iff s^2 = 41 \quad \text{et} \quad 2\varphi \equiv \arctan\left(\tfrac{40}{9}\right)\ [2\pi]$$

Exercice 1 :

Calculer les racines carrées $9+40\,\mathrm{i}$

Correction :

On cherche d'abord la forme exponentielle de $9+40\,\mathrm{i} = 41\left(\dfrac{9}{41}+\dfrac{40}{41}\,\mathrm{i}\right) = 41\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan\left(\frac{40}{9}\right)}$.

Soit $u = s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$:

$$\begin{aligned} 9+40\,\mathrm{i} = u^2 &\iff 41\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan\left(\frac{40}{9}\right)} = s^2\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\varphi} \iff s^2 = 41 \quad \text{et} \quad 2\varphi \equiv \arctan\left(\tfrac{40}{9}\right)\ [2\pi] \\ &\underset{s\geqslant 0}{\iff} s = \sqrt{41} \quad \text{et} \quad \varphi \equiv \frac{1}{2}\arctan\left(\tfrac{40}{9}\right)\ [\pi] \end{aligned}$$

Exercice 1 :

Calculer les racines carrées $9+40\,\mathrm{i}$

Correction :

On cherche d'abord la forme exponentielle de $9+40\,\mathrm{i} = 41\left(\dfrac{9}{41}+\dfrac{40}{41}\,\mathrm{i}\right) = 41\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan\left(\frac{40}{9}\right)}$.

Soit $u = s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$:

$$\begin{aligned} 9+40\,\mathrm{i} = u^2 &\iff 41\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan\left(\frac{40}{9}\right)} = s^2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi} \iff s^2 = 41 \quad \text{et} \quad 2\varphi \equiv \arctan\left(\tfrac{40}{9}\right)\ [2\pi] \\ &\underset{s\geqslant 0}{\iff} s = \sqrt{41} \quad \text{et} \quad \varphi \equiv \frac{1}{2}\arctan\left(\tfrac{40}{9}\right)\ [\pi] \\ &\iff u_1 = \sqrt{41}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{40}{9}\right)} \quad \text{ou} \quad u_2 = \sqrt{41}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{40}{9}\right)+\pi\right)}. \end{aligned}$$

Exercice 1 :

Calculer les racines carrées $9+40\,\mathrm{i}$

Correction :

On cherche d'abord la forme exponentielle de $9+40\,\mathrm{i} = 41\left(\dfrac{9}{41}+\dfrac{40}{41}\,\mathrm{i}\right) = 41\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan\left(\frac{40}{9}\right)}$.

Soit $u = s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$:

$$
\begin{aligned}
9+40\,\mathrm{i} = u^2 \iff 41\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan\left(\frac{40}{9}\right)} = s^2\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\varphi} &\iff s^2 = 41 \quad \text{et} \quad 2\varphi \equiv \arctan\left(\tfrac{40}{9}\right)\ [2\pi] \\
&\underset{s\geqslant 0}{\iff} s = \sqrt{41} \quad \text{et} \quad \varphi \equiv \frac{1}{2}\arctan\left(\tfrac{40}{9}\right)\ [\pi] \\
&\iff u_1 = \sqrt{41}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{40}{9}\right)} \quad \text{ou} \quad u_2 = \sqrt{41}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{40}{9}\right)+\pi\right)}.
\end{aligned}
$$

Donc, $\mathcal{S} = \{5+4\,\mathrm{i}\,,\,-5-4\,\mathrm{i}\} = \left\{\sqrt{41}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{40}{9}\right)},\ \sqrt{41}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{40}{9}\right)+\pi\right)}\right\}$.

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

3. $\begin{cases} u+v=2 \\ uv=2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} u+v=3 \\ \dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=\dfrac{9+3\,\mathrm{i}}{10} \end{cases}$

5. $\begin{cases} u+v=1 \\ u^2+v^2=-1+2\,\mathrm{i} \end{cases}$

6. $\begin{cases} u^2v+uv^2=6 \\ u^3+v^3=9 \end{cases}$

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

3. $\begin{cases} u+v=2 \\ uv=2 \end{cases}$

Correction :

3. u et v sont les racines du trinôme z^2-2z+2 de discriminant $\Delta=-4=(2\,\mathrm{i}\,)^2$.

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

3. $\begin{cases} u+v=2 \\ uv=2 \end{cases}$

Correction :

3. u et v sont les racines du trinôme z^2-2z+2 de discriminant $\Delta=-4=(2\,\mathrm{i}\,)^2$.
On trouve donc $u=1+\mathrm{i}$ et $v=\overline{u}=1-\mathrm{i}$.

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

❹ $$\left\{\begin{array}{l} u+v=3 \\ \dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=\dfrac{9+3\,\mathrm{i}}{10} \end{array}\right.$$

Correction :

❹ Tout d'abord il est clair que l'on cherche des valeurs non nulles pour u et v. Ceci assuré, on a :

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

❹ $$\begin{cases} u+v=3 \\ \dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=\dfrac{9+3\,\mathrm{i}}{10} \end{cases}$$

Correction :

❹ Tout d'abord il est clair que l'on cherche des valeurs non nulles pour u et v. Ceci assuré, on a :

$$\begin{cases} u+v=3 \\ \dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=\dfrac{9+3\,\mathrm{i}}{10} \end{cases}$$

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

❹ $$\begin{cases} u+v=3 \\ \dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=\dfrac{9+3\,\mathrm{i}}{10} \end{cases}$$

Correction :

❹ Tout d'abord il est clair que l'on cherche des valeurs non nulles pour u et v. Ceci assuré, on a :

$$\begin{cases} u+v=3 \\ \dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=\dfrac{9+3\,\mathrm{i}}{10} \end{cases} \iff \begin{cases} u+v=3 \\ \dfrac{u+v}{uv}=\dfrac{9+3\,\mathrm{i}}{10} \end{cases}$$

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

4. $$\left\{\begin{array}{l} u+v=3 \\ \dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=\dfrac{9+3\,\mathrm{i}}{10} \end{array}\right.$$

Correction :

4. Tout d'abord il est clair que l'on cherche des valeurs non nulles pour u et v. Ceci assuré, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} u+v=3 \\ \dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=\dfrac{9+3\,\mathrm{i}}{10} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} u+v=3 \\ \dfrac{u+v}{uv}=\dfrac{9+3\,\mathrm{i}}{10} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} u+v=3 \\ uv=\dfrac{10}{3+\mathrm{i}}=3-\mathrm{i} \end{array}\right.$$

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

④ $$\begin{cases} u+v=3 \\ \dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=\dfrac{9+3\,\mathrm{i}}{10} \end{cases}$$

Correction :

④ Tout d'abord il est clair que l'on cherche des valeurs non nulles pour u et v. Ceci assuré, on a :

$$\begin{cases} u+v=3 \\ \dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=\dfrac{9+3\,\mathrm{i}}{10} \end{cases} \iff \begin{cases} u+v=3 \\ \dfrac{u+v}{uv}=\dfrac{9+3\,\mathrm{i}}{10} \end{cases} \iff \begin{cases} u+v=3 \\ uv=\dfrac{10}{3+\mathrm{i}}=3-\mathrm{i} \end{cases}$$

Le raisonnement est ensuite identique :

u et v sont les racines du trinôme $z^2-3z+3-\mathrm{i}$ de discriminant
$\Delta=9-4(3-\mathrm{i})=-3+4\,\mathrm{i}=(1+2\,\mathrm{i})^2$.

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

4. $$\begin{cases} u+v=3 \\ \dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=\dfrac{9+3\,\mathrm{i}}{10} \end{cases}$$

Correction :

4. Tout d'abord il est clair que l'on cherche des valeurs non nulles pour u et v. Ceci assuré, on a :

$$\begin{cases} u+v=3 \\ \dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=\dfrac{9+3\,\mathrm{i}}{10} \end{cases} \iff \begin{cases} u+v=3 \\ \dfrac{u+v}{uv}=\dfrac{9+3\,\mathrm{i}}{10} \end{cases} \iff \begin{cases} u+v=3 \\ uv=\dfrac{10}{3+\mathrm{i}}=3-\mathrm{i} \end{cases}$$

Le raisonnement est ensuite identique :

u et v sont les racines du trinôme $z^2-3z+3-\mathrm{i}$ de discriminant
$\Delta=9-4(3-\mathrm{i})=-3+4\,\mathrm{i}=(1+2\,\mathrm{i})^2$.
On trouve donc $u=2+\mathrm{i}\neq 0$ et $v=1-\mathrm{i}\neq 0$.

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

5. $\begin{cases} u+v=1 \\ u^2+v^2=-1+2\,\mathrm{i} \end{cases}$

Correction :

5. En remarquant que $(u+v)^2 = u^2+v^2+2uv$, on a :

$$\begin{cases} u+v=1 \\ u^2+v^2=-1+2\,\mathrm{i} \end{cases}$$

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

5. $\begin{cases} u+v=1 \\ u^2+v^2=-1+2\,\mathrm{i} \end{cases}$

Correction :

5. En remarquant que $(u+v)^2 = u^2+v^2+2uv$, on a :

$$\begin{cases} u+v=1 \\ u^2+v^2=-1+2\,\mathrm{i} \end{cases} \iff \begin{cases} u+v=1 \\ (u+v)^2-(u^2+v^2)=1^2-(-1+2\,\mathrm{i}\,) \end{cases}$$

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

5. $\begin{cases} u+v=1 \\ u^2+v^2=-1+2\,\mathrm{i} \end{cases}$

Correction :

5. En remarquant que $(u+v)^2 = u^2+v^2+2uv$, on a :

$$\begin{cases} u+v=1 \\ u^2+v^2=-1+2\,\mathrm{i} \end{cases} \iff \begin{cases} u+v=1 \\ (u+v)^2-(u^2+v^2)=1^2-(-1+2\,\mathrm{i}) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} u+v=1 \\ uv=1-\mathrm{i} \end{cases}$$

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

5. $\begin{cases} u+v=1 \\ u^2+v^2=-1+2\,\mathrm{i} \end{cases}$

Correction :

5. En remarquant que $(u+v)^2 = u^2+v^2+2uv$, on a :

$$\begin{cases} u+v=1 \\ u^2+v^2=-1+2\,\mathrm{i} \end{cases} \iff \begin{cases} u+v=1 \\ (u+v)^2-(u^2+v^2)=1^2-(-1+2\,\mathrm{i}\,) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} u+v=1 \\ uv=1-\mathrm{i} \end{cases}$$

u et v sont les racines du trinôme $z^2-z+1-\mathrm{i}$ de discriminant $\Delta = 1-4(1-\mathrm{i}\,) = -3+4\,\mathrm{i} = (1+2\,\mathrm{i}\,)^2$.

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

5. $\begin{cases} u+v=1 \\ u^2+v^2=-1+2\,\mathrm{i} \end{cases}$

Correction :

5. En remarquant que $(u+v)^2 = u^2+v^2+2uv$, on a :

$$\begin{cases} u+v=1 \\ u^2+v^2=-1+2\,\mathrm{i} \end{cases} \iff \begin{cases} u+v=1 \\ (u+v)^2-(u^2+v^2)=1^2-(-1+2\,\mathrm{i}\,) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} u+v=1 \\ uv=1-\mathrm{i} \end{cases}$$

u et v sont les racines du trinôme $z^2-z+1-\mathrm{i}$ de discriminant
$\Delta = 1-4(1-\mathrm{i}\,) = -3+4\,\mathrm{i} = (1+2\,\mathrm{i}\,)^2$.
On trouve donc $u=1+\mathrm{i}$ et $v=-\mathrm{i}$.

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

$$❻ \left\{\begin{array}{l} u^2v + uv^2 = 6 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{array}\right.$$

Correction :

❻ Même exercice, en remarquant que $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3\left(u^2v + uv^2\right)$.

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

❻ $$\left\{\begin{array}{l} u^2v+uv^2=6 \\ u^3+v^3=9 \end{array}\right.$$

Correction :

❻ Même exercice, en remarquant que $(u+v)^3=u^3+v^3+3\left(u^2v+uv^2\right)$.

$$\left\{\begin{array}{l} u^2v+uv^2=6 \\ u^3+v^3=9 \end{array}\right.$$

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

❻ $\left\{ \begin{array}{l} u^2v + uv^2 = 6 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{array} \right.$

Correction :

❻ *Même exercice, en remarquant que* $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3\left(u^2v + uv^2\right)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} u^2v + uv^2 = 6 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} uv(u+v) = 6 \\ (u+v)^3 = 27 \end{array} \right.$$

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

❻ $\begin{cases} u^2v + uv^2 = 6 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases}$

Correction :

❻ Même exercice, en remarquant que $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3\left(u^2v + uv^2\right)$.

$$\begin{cases} u^2v + uv^2 = 6 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} uv(u+v) = 6 \\ (u+v)^3 = 27 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} uv = 2 \\ u+v = 3 \end{cases}$$

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

❻ $\begin{cases} u^2v+uv^2=6 \\ u^3+v^3=9 \end{cases}$

Correction :

❻ *Même exercice, en remarquant que* $(u+v)^3=u^3+v^3+3\left(u^2v+uv^2\right)$.

$$\begin{cases} u^2v+uv^2=6 \\ u^3+v^3=9 \end{cases} \iff \begin{cases} uv(u+v)=6 \\ (u+v)^3=27 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} uv=2 \\ u+v=3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} uv=2\,\mathrm{j}^2 \\ u+v=3\,\mathrm{j} \end{cases}$$

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

❻ $\begin{cases} u^2v + uv^2 = 6 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases}$

Correction :

❻ Même exercice, en remarquant que $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3\left(u^2v + uv^2\right)$.

$$\begin{cases} u^2v + uv^2 = 6 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} uv(u+v) = 6 \\ (u+v)^3 = 27 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} uv = 2 \\ u + v = 3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} uv = 2\,\mathrm{j}^2 \\ u + v = 3\,\mathrm{j} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} uv = 2\,\mathrm{j} \\ u + v = 3\,\mathrm{j}^2 \end{cases}$$

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

❻ $\left\{ \begin{array}{l} u^2v + uv^2 = 6 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{array} \right.$

Correction :

❻ Même exercice, en remarquant que $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3\left(u^2v + uv^2\right)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} u^2v + uv^2 = 6 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} uv(u+v) = 6 \\ (u+v)^3 = 27 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} uv = 2 \\ u+v = 3 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} uv = 2\,\mathrm{j}^2 \\ u+v = 3\,\mathrm{j} \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} uv = 2\,\mathrm{j} \\ u+v = 3\,\mathrm{j}^2 \end{array} \right.$$

u et v sont donc à choisir parmi les racines du trinôme :

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

❻ $\begin{cases} u^2v + uv^2 = 6 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases}$

Correction :

❻ Même exercice, en remarquant que $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3\left(u^2v + uv^2\right)$.

$$\begin{cases} u^2v + uv^2 = 6 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} uv(u+v) = 6 \\ (u+v)^3 = 27 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} uv = 2 \\ u+v = 3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} uv = 2\,\mathrm{j}^2 \\ u+v = 3\,\mathrm{j} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} uv = 2\,\mathrm{j} \\ u+v = 3\,\mathrm{j}^2 \end{cases}$$

u et v sont donc à choisir parmi les racines du trinôme :

- $z^2 - 3z + 2$ i.e. les racines en évidence 1 et 2.

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

❻ $\begin{cases} u^2v + uv^2 = 6 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases}$

Correction :

❻ *Même exercice, en remarquant que* $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3\left(u^2v + uv^2\right)$.

$$\begin{cases} u^2v + uv^2 = 6 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} uv(u+v) = 6 \\ (u+v)^3 = 27 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} uv = 2 \\ u+v = 3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} uv = 2\,\mathrm{j}^2 \\ u+v = 3\,\mathrm{j} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} uv = 2\,\mathrm{j} \\ u+v = 3\,\mathrm{j}^2 \end{cases}$$

u et v sont donc à choisir parmi les racines du trinôme :

- $z^2 - 3z + 2$ *i.e. les racines en évidence* 1 *et* 2.
- $z^2 - 3\,\mathrm{j}\,z + 2\,\mathrm{j}^2$ *de discriminant* $\Delta = 9\,\mathrm{j}^2 - 8\,\mathrm{j}^2 = \mathrm{j}^2$. *Les racines sont donc* $\dfrac{3\,\mathrm{j} + \mathrm{j}}{2} = 2\,\mathrm{j}$ *et* $\dfrac{3\,\mathrm{j} - \mathrm{j}}{2} = \mathrm{j}$.

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

❻ $\begin{cases} u^2v + uv^2 = 6 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases}$

Correction :

❻ Même exercice, en remarquant que $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3\left(u^2v + uv^2\right)$.

$$\begin{cases} u^2v + uv^2 = 6 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} uv(u+v) = 6 \\ (u+v)^3 = 27 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} uv = 2 \\ u+v = 3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} uv = 2\,\mathrm{j}^2 \\ u+v = 3\,\mathrm{j} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} uv = 2\,\mathrm{j} \\ u+v = 3\,\mathrm{j}^2 \end{cases}$$

u et v sont donc à choisir parmi les racines du trinôme :

- $z^2 - 3z + 2$ i.e. les racines en évidence 1 et 2.
- $z^2 - 3\,\mathrm{j}\,z + 2\,\mathrm{j}^2$ de discriminant $\Delta = 9\,\mathrm{j}^2 - 8\,\mathrm{j}^2 = \mathrm{j}^2$. Les racines sont donc $\dfrac{3\,\mathrm{j} + \mathrm{j}}{2} = 2\,\mathrm{j}$ et $\dfrac{3\,\mathrm{j} - \mathrm{j}}{2} = \mathrm{j}$.
- $z^2 - 3\,\mathrm{j}^2 z + 2\,\mathrm{j}$ de discriminant $\Delta = 9\,\mathrm{j} - 8\,\mathrm{j} = \mathrm{j} = \left(\overline{\mathrm{j}}\right)^2$. Les racines sont donc $\dfrac{3\,\mathrm{j}^2 + \overline{\mathrm{j}}}{2} = 2\overline{j}$ et $\dfrac{3\,\mathrm{j} - \overline{\mathrm{j}}}{2} = \overline{\mathrm{j}}$.

Exercice 10 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

3. $z^4 = \dfrac{16\sqrt{2}}{1 - \mathrm{i}}$

Correction :

❸ Comme $\dfrac{16\sqrt{2}}{1-\mathrm{i}} = \left(2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{16}}\right)^4$, on a déjà trouvé une racine primitive de $\dfrac{16\sqrt{2}}{1-\mathrm{i}}$.

Correction :

3. Comme $\dfrac{16\sqrt{2}}{1-\mathrm{i}} = \left(2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{16}}\right)^4$, on a déjà trouvé une racine primitive de $\dfrac{16\sqrt{2}}{1-\mathrm{i}}$.
Il ne reste plus qu'à multiplier par les racines quatrième de l'unité

Correction :

3. Comme $\dfrac{16\sqrt{2}}{1-\mathrm{i}} = \left(2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{16}}\right)^4$, on a déjà trouvé une racine primitive de $\dfrac{16\sqrt{2}}{1-\mathrm{i}}$.
Il ne reste plus qu'à multiplier par les racines quatrième de l'unité i, -1 et $-\mathrm{i}$ différentes de 1 pour avoir toutes les autres :

Correction :

❸ Comme $\dfrac{16\sqrt{2}}{1-\mathrm{i}} = \left(2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{16}}\right)^4$, on a déjà trouvé une racine primitive de $\dfrac{16\sqrt{2}}{1-\mathrm{i}}$.
Il ne reste plus qu'à multiplier par les racines quatrième de l'unité i, -1 et $-\mathrm{i}$ différentes de 1 pour avoir toutes les autres :

$$\mathcal{S} = \left\{2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{16}},\, 2\,\mathrm{i}\;\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{16}},\, -2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{16}},\, -2\,\mathrm{i}\;\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{16}}\right\} \quad .$$

Correction :

❸ Comme $\dfrac{16\sqrt{2}}{1-\mathrm{i}} = \left(2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{16}}\right)^4$, on a déjà trouvé une racine primitive de $\dfrac{16\sqrt{2}}{1-\mathrm{i}}$.
Il ne reste plus qu'à multiplier par les racines quatrième de l'unité i, -1 et $-\mathrm{i}$ différentes de 1 pour avoir toutes les autres :

$$\mathcal{S} = \left\{2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{16}},\ 2\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{16}},\ -2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{16}},\ -2\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{16}}\right\} = \left\{2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{16}},\ 2\,\mathrm{e}^{\frac{9\,\mathrm{i}\,\pi}{16}},\ 2\,\mathrm{e}^{-\frac{15\,\mathrm{i}\,\pi}{16}},\ 2\,\mathrm{e}^{-\frac{9\,\mathrm{i}\,\pi}{16}}\right\}.$$

Correction :

❸ Comme $\dfrac{16\sqrt{2}}{1-\mathrm{i}} = \left(2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{16}}\right)^4$, on a déjà trouvé une racine primitive de $\dfrac{16\sqrt{2}}{1-\mathrm{i}}$.
Il ne reste plus qu'à multiplier par les racines quatrième de l'unité i, -1 et $-\mathrm{i}$ différentes de 1 pour avoir toutes les autres :

$$\mathcal{S} = \left\{2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{16}}, 2\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{16}}, -2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{16}}, -2\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{16}}\right\} = \left\{2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{16}}, 2\,\mathrm{e}^{\frac{9\,\mathrm{i}\,\pi}{16}}, 2\,\mathrm{e}^{-\frac{15\,\mathrm{i}\,\pi}{16}}, 2\,\mathrm{e}^{-\frac{9\,\mathrm{i}\,\pi}{16}}\right\}.$$

Ce sont les sommets d'un carré inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 2.

Exercice 16 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

8. $z^2 - 2z\cos(\theta) + 1 = 0, \theta \in \mathbb{R}.$
9. $e^z = 1 + \mathrm{i}\,.$

Exercice 16 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

8. $z^2 - 2z\cos(\theta) + 1 = 0, \theta \in \mathbb{R}$.

Correction :

8. Ceci commence par calculer $\Delta = 4\cos^2(\theta) - 4 = (2\,\mathrm{i}\,\sin(\theta))^2$

Exercice 16 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

8. $z^2 - 2z\cos(\theta) + 1 = 0, \theta \in \mathbb{R}$.

Correction :

8. Ceci commence par calculer $\Delta = 4\cos^2(\theta) - 4 = (2\,\mathrm{i}\,\sin(\theta))^2$, puis les solutions :
$\alpha = \dfrac{2\cos(\theta) + 2\,\mathrm{i}\,\sin(\theta)}{2}$

Exercice 16 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

8. $z^2 - 2z\cos(\theta) + 1 = 0, \theta \in \mathbb{R}$.

Correction :

8. Ceci commence par calculer $\Delta = 4\cos^2(\theta) - 4 = (2\,\mathrm{i}\,\sin(\theta))^2$, puis les solutions :
$\alpha = \dfrac{2\cos(\theta) + 2\,\mathrm{i}\,\sin(\theta)}{2} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\,\sin(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$

Exercice 16 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

8. $z^2 - 2z\cos(\theta) + 1 = 0, \theta \in \mathbb{R}$.

Correction :

8. Ceci commence par calculer $\Delta = 4\cos^2(\theta) - 4 = (2\,\mathrm{i}\,\sin(\theta))^2$, puis les solutions :
$\alpha = \dfrac{2\cos(\theta) + 2\,\mathrm{i}\,\sin(\theta)}{2} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\,\sin(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ et son conjugué $\overline{\alpha} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}$.

Exercice 16 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

8. $z^2 - 2z\cos(\theta) + 1 = 0, \theta \in \mathbb{R}$.

Correction :

8. Ceci commence par calculer $\Delta = 4\cos^2(\theta) - 4 = (2\,\mathrm{i}\,\sin(\theta))^2$, puis les solutions :
$\alpha = \dfrac{2\cos(\theta) + 2\,\mathrm{i}\,\sin(\theta)}{2} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\,\sin(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ et son conjugué $\overline{\alpha} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}$.
Tout élève de PTSI, doit savoir que $z^2 - 2z\cos(\theta) + 1 = \left(z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)\left(z - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}\right)$

Exercice 16 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

8. $z^2 - 2z\cos(\theta) + 1 = 0, \theta \in \mathbb{R}$.

Correction :

8. Ceci commence par calculer $\Delta = 4\cos^2(\theta) - 4 = (2\,\mathrm{i}\,\sin(\theta))^2$, puis les solutions :
$\alpha = \dfrac{2\cos(\theta) + 2\,\mathrm{i}\,\sin(\theta)}{2} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\,\sin(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ et son conjugué $\overline{\alpha} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}$.
Tout élève de PTSI, doit savoir que
$$\begin{aligned} z^2 - 2z\cos(\theta) + 1 &= \left(z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)\left(z - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}\right) \\ &= z^2 - 2\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right) + \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right|^2. \end{aligned}$$

Exercice 16 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

9. $e^z = 1 + \mathrm{i}\,.$

Correction :

9. Comme dans le cours :

$$\mathrm{e}^z = 1 + \mathrm{i}$$

Exercice 16 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

9. $e^z = 1 + \mathrm{i}$.

Correction :

9. *Comme dans le cours :*

$$\mathrm{e}^z = 1 + \mathrm{i} \iff \mathrm{e}^z = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}$$

Exercice 16 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

9. $e^z = 1 + \mathrm{i}\,.$

Correction :

9. Comme dans le cours :

$$\mathrm{e}^z = 1 + \mathrm{i} \iff \mathrm{e}^z = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}} \iff \mathrm{Re}\,(z) = \frac{1}{2}\ln(2) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,(z) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

Exercice 16 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

9. $e^z = 1 + \mathrm{i}\,.$

Correction :

9. Comme dans le cours :

$$\mathrm{e}^z = 1 + \mathrm{i} \iff \mathrm{e}^z = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}} \iff \mathrm{Re}\,(z) = \frac{1}{2}\ln(2) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,(z) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

$$\iff z \equiv \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{\pi}{4}\ [2\,\mathrm{i}\,\pi]\,.$$

Exercice 17 :

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{U}^3$. Montrer que $|x + y + z| = |xy + xz + yz|$.

Exercice 17 :

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{U}^3$. Montrer que $|x + y + z| = |xy + xz + yz|$.

Correction :

Il suffit de se rappeler que $|u|^2 = u\overline{u}$ et que, pour tout $u \in \mathbb{U}$, $|u| = 1$. Le reste se fait tout seul :

$$|xy + xz + yz|^2$$

Exercice 17 :

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{U}^3$. Montrer que $|x+y+z| = |xy+xz+yz|$.

Correction :

Il suffit de se rappeler que $|u|^2 = u\overline{u}$ et que, pour tout $u \in \mathbb{U}$, $|u| = 1$. Le reste se fait tout seul :

$$|xy+xz+yz|^2 = (xy+xz+yz)\overline{(xy+xz+yz)}$$

Exercice 17 :

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{U}^3$. Montrer que $|x+y+z| = |xy+xz+yz|$.

Correction :

Il suffit de se rappeler que $|u|^2 = u\overline{u}$ et que, pour tout $u \in \mathbb{U}$, $|u| = 1$. Le reste se fait tout seul :

$$|xy+xz+yz|^2 = (xy+xz+yz)\overline{(xy+xz+yz)} = (xy+xz+yz)(\overline{xy}+\overline{xz}+\overline{yz})$$

Exercice 17 :

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{U}^3$. Montrer que $|x + y + z| = |xy + xz + yz|$.

Correction :

Il suffit de se rappeler que $|u|^2 = u\overline{u}$ et que, pour tout $u \in \mathbb{U}$, $|u| = 1$. Le reste se fait tout seul :

$$\begin{aligned} |xy + xz + yz|^2 &= (xy + xz + yz)\overline{(xy + xz + yz)} = (xy + xz + yz)(\overline{xy} + \overline{xz} + \overline{yz}) \\ &= |xy|^2 + |xz|^2 + |yz|^2 + |y|\, x\overline{z} + |x|\, y\overline{z} + |y|\, z\overline{y} + |z|\, x\overline{y} + |y|\, z\overline{x} + |z|\, y\overline{x} \end{aligned}$$

Exercice 17 :

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{U}^3$. Montrer que $|x + y + z| = |xy + xz + yz|$.

Correction :

Il suffit de se rappeler que $|u|^2 = u\overline{u}$ et que, pour tout $u \in \mathbb{U}$, $|u| = 1$. Le reste se fait tout seul :

$$\begin{aligned}
|xy + xz + yz|^2 &= (xy + xz + yz)\overline{(xy + xz + yz)} = (xy + xz + yz)(\overline{xy} + \overline{xz} + \overline{yz}) \\
&= |xy|^2 + |xz|^2 + |yz|^2 + |y|\, x\overline{z} + |x|\, y\overline{z} + |y|\, z\overline{y} + |z|\, x\overline{y} + |y|\, z\overline{x} + |z|\, y\overline{x} \\
&= 3 + x\overline{z} + y\overline{z} + z\overline{y} + x\overline{y} + z\overline{x} + y\overline{x}
\end{aligned}$$

Exercice 17 :

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{U}^3$. Montrer que $|x + y + z| = |xy + xz + yz|$.

Correction :

Il suffit de se rappeler que $|u|^2 = u\overline{u}$ et que, pour tout $u \in \mathbb{U}$, $|u| = 1$. Le reste se fait tout seul :

$$\begin{aligned}
|xy + xz + yz|^2 &= (xy + xz + yz)\overline{(xy + xz + yz)} = (xy + xz + yz)(\overline{xy} + \overline{xz} + \overline{yz}) \\
&= |xy|^2 + |xz|^2 + |yz|^2 + |y|\, x\overline{z} + |x|\, y\overline{z} + |y|\, z\overline{y} + |z|\, x\overline{y} + |y|\, z\overline{x} + |z|\, y\overline{x} \\
&= 3 + x\overline{z} + y\overline{z} + z\overline{y} + x\overline{y} + z\overline{x} + y\overline{x} \\
&= 3 + 2\mathrm{Re}\,(xy + xz + xy)
\end{aligned}$$

Exercice 17 :

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{U}^3$. Montrer que $|x+y+z| = |xy+xz+yz|$.

Correction :

De même,

$$|x+y+z|^2 = (x+y+z)\overline{(x+y+z)}$$

Exercice 17 :

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{U}^3$. Montrer que $|x + y + z| = |xy + xz + yz|$.

Correction :

De même,

$$\begin{aligned} |x + y + z|^2 &= (x + y + z)\overline{(x + y + z)} \\ &= |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + x\overline{y} + x\overline{z} + y\overline{x} + y\overline{z} + z\overline{x} + z\overline{y} \end{aligned}$$

Exercice 17 :

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{U}^3$. Montrer que $|x+y+z| = |xy+xz+yz|$.

Correction :

De même,

$$\begin{aligned}
|x+y+z|^2 &= (x+y+z)\overline{(x+y+z)} \\
&= |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + x\overline{y} + x\overline{z} + y\overline{x} + y\overline{z} + z\overline{x} + z\overline{y} \\
&= 3 + x\overline{z} + y\overline{z} + z\overline{y} + x\overline{y} + z\overline{x} + y\overline{x}
\end{aligned}$$

Exercice 17 :

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{U}^3$. Montrer que $|x + y + z| = |xy + xz + yz|$.

Correction :

De même,

$$\begin{aligned}
|x + y + z|^2 &= (x + y + z)\overline{(x + y + z)} \\
&= |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + x\overline{y} + x\overline{z} + y\overline{x} + y\overline{z} + z\overline{x} + z\overline{y} \\
&= 3 + x\overline{z} + y\overline{z} + z\overline{y} + x\overline{y} + z\overline{x} + y\overline{x} \\
&= 3 + 2\mathrm{Re}\,(xy + xz + xy)
\end{aligned}$$

Exercice 17 :

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{U}^3$. Montrer que $|x + y + z| = |xy + xz + yz|$.

Correction :

Donc,

$$|xy + xz + yz|^2 = 3 + 2\mathrm{Re}\left(xy + xz + xy\right).$$

Exercice 17 :

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{U}^3$. Montrer que $|x+y+z| = |xy+xz+yz|$.

Correction :

Donc,

$$|xy+xz+yz|^2 = 3 + 2\mathrm{Re}\left(xy+xz+xy\right).$$

Et

$$|x+y+z|^2 = 3 + 2\mathrm{Re}\left(xy+xz+xy\right).$$

Exercice 17 :

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{U}^3$. Montrer que $|x+y+z| = |xy+xz+yz|$.

Correction :

Donc,

$$|xy+xz+yz|^2 = 3 + 2\mathrm{Re}\left(xy+xz+xy\right).$$

Et

$$|x+y+z|^2 = 3 + 2\mathrm{Re}\left(xy+xz+xy\right).$$

Égalité entre deux nombres positifs donc entre leur racine :

$$\forall\,(x, y, z) \in \mathbb{U}^3,\ |x+y+z| = |xy+xz+yz|.$$

Exercice 19 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes :

1. $|z| = 3$
2. $|z - 3| = 2$
3. $|z - 2| = 4$
4. $|z + i| \leqslant 5$
5. $|z - 2| = |z - 4\,\mathrm{i}\,|$
6. $|2z - \,\mathrm{i}\,| = 1$
7. $\left|\dfrac{z+1}{z+2}\right| = 1$
8. $\dfrac{|3z - 2|}{|z + 3\,\mathrm{i}\,|} = 3$
9. $z + \overline{z} = z\overline{z}$

Exercice 19 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes :

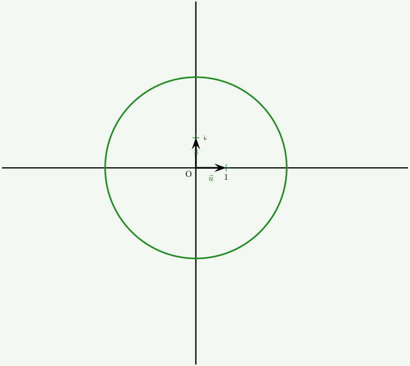
1. $|z| = 3$

Exercice 19 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes :

1. $|z| = 3$

Correction :



Exercice 19 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes :

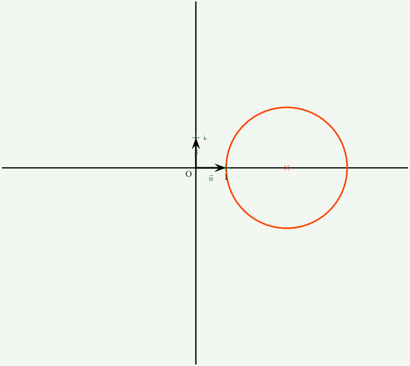
1. $|z| = 3$
2. $|z - 3| = 2$

Exercice 19 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes :

1. $|z| = 3$
2. $|z - 3| = 2$

Correction :



Exercice 19 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes :

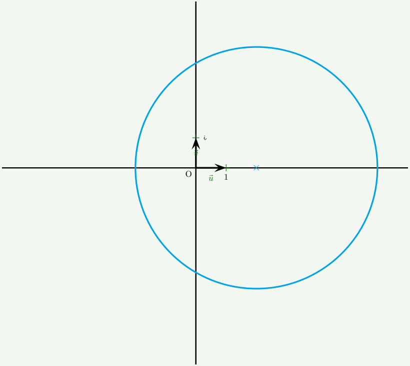
1. $|z| = 3$
2. $|z - 3| = 2$
3. $|z - 2| = 4$

Exercice 19 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes :

1. $|z| = 3$
2. $|z-3| = 2$
3. $|z-2| = 4$

Correction :



Exercice 19 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes :

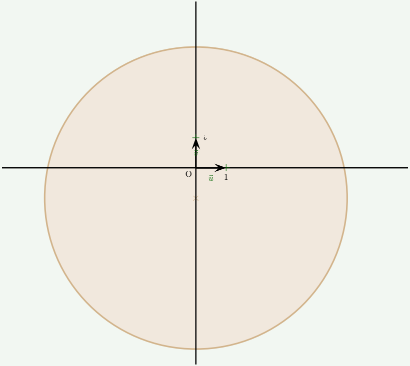
1. $|z| = 3$
2. $|z-3| = 2$
3. $|z-2| = 4$
4. $|z+i| \leqslant 5$

Exercice 19 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes :

1. $|z| = 3$
2. $|z-3| = 2$
3. $|z-2| = 4$
4. $|z+i| \leqslant 5$

Correction :



Exercice 19 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes :

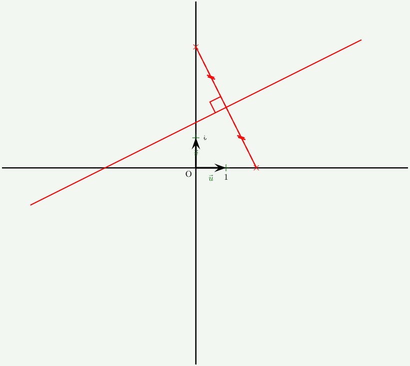
1. $|z| = 3$
2. $|z-3| = 2$
3. $|z-2| = 4$
4. $|z+i| \leqslant 5$
5. $|z-2| = |z-4\,\mathrm{i}\,|$

Exercice 19 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes :

1. $|z| = 3$
2. $|z-3| = 2$
3. $|z-2| = 4$
4. $|z+i| \leqslant 5$
5. $|z-2| = |z-4\,\mathrm{i}\,|$

Correction :



Exercice 19 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes :

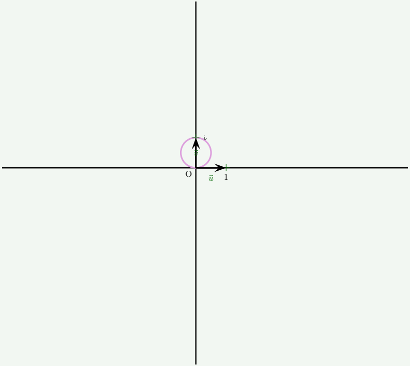
1. $|z| = 3$
2. $|z-3| = 2$
3. $|z-2| = 4$
4. $|z+i| \leqslant 5$
5. $|z-2| = |z-4\,\mathrm{i}\,|$
6. $|2z-\,\mathrm{i}\,| = 1$

Exercice 19 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes :

1. $|z| = 3$
2. $|z-3| = 2$
3. $|z-2| = 4$
4. $|z+i| \leqslant 5$
5. $|z-2| = |z-4\,\mathrm{i}\,|$
6. $|2z-\,\mathrm{i}\,| = 1$

Correction :



Exercice 19 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes :

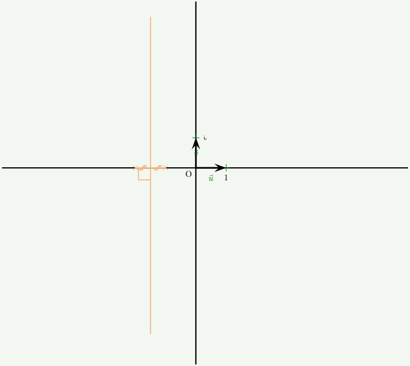
1. $|z| = 3$
2. $|z-3| = 2$
3. $|z-2| = 4$
4. $|z+i| \leqslant 5$
5. $|z-2| = |z-4\,\mathrm{i}\,|$
6. $|2z-\,\mathrm{i}\,| = 1$
7. $\left|\dfrac{z+1}{z+2}\right| = 1$

Exercice 19 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes :

1. $|z| = 3$
2. $|z-3| = 2$
3. $|z-2| = 4$
4. $|z+i| \leqslant 5$
5. $|z-2| = |z-4\,\mathrm{i}\,|$
6. $|2z-\mathrm{i}\,| = 1$
7. $\left|\dfrac{z+1}{z+2}\right| = 1$

Correction :



Exercice 19 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes :

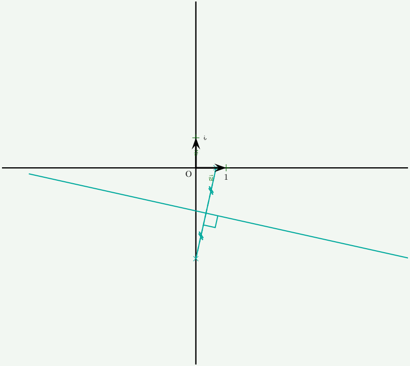
1. $|z| = 3$
2. $|z-3| = 2$
3. $|z-2| = 4$
4. $|z+i| \leqslant 5$
5. $|z-2| = |z-4\,\mathrm{i}\,|$
6. $|2z-\,\mathrm{i}\,| = 1$
7. $\left|\dfrac{z+1}{z+2}\right| = 1$
8. $\dfrac{|3z-2|}{|z+3\,\mathrm{i}\,|} = 3$

Exercice 19 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes :

1. $|z| = 3$
2. $|z-3| = 2$
3. $|z-2| = 4$
4. $|z+i| \leqslant 5$
5. $|z-2| = |z-4\,\mathrm{i}\,|$
6. $|2z-\,\mathrm{i}\,| = 1$
7. $\left|\dfrac{z+1}{z+2}\right| = 1$
8. $\dfrac{|3z-2|}{|z+3\,\mathrm{i}\,|} = 3$

Correction :



Exercice 19 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes :

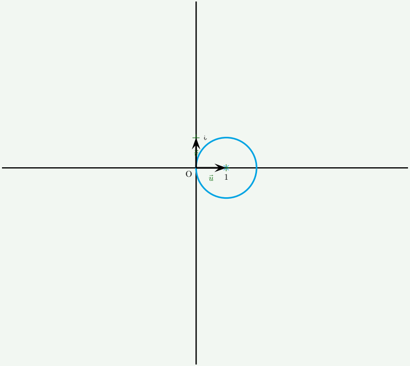
1. $|z| = 3$
2. $|z-3| = 2$
3. $|z-2| = 4$
4. $|z+i| \leqslant 5$
5. $|z-2| = |z-4\,\mathrm{i}\,|$
6. $|2z-\,\mathrm{i}\,| = 1$
7. $\left|\dfrac{z+1}{z+2}\right| = 1$
8. $\dfrac{|3z-2|}{|z+3\,\mathrm{i}\,|} = 3$
9. $z+\overline{z} = z\overline{z}$

Exercice 19 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes :

1. $|z| = 3$
2. $|z - 3| = 2$
3. $|z - 2| = 4$
4. $|z + i| \leqslant 5$
5. $|z - 2| = |z - 4\,\mathrm{i}\,|$
6. $|2z - \mathrm{i}\,| = 1$
7. $\left|\dfrac{z+1}{z+2}\right| = 1$
8. $\dfrac{|3z - 2|}{|z + 3\,\mathrm{i}\,|} = 3$
9. $z + \overline{z} = z\overline{z}$

Correction :



Exercice 20 :

Montrer que les points du plan dont l'affixe vérifie $|z-3| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}|z-5|$ forment un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 20 :

Montrer que les points du plan dont l'affixe vérifie $|z-3| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}|z-5|$ forment un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Correction :

Pas trop le choix de développer :

Exercice 20 :

Montrer que les points du plan dont l'affixe vérifie $|z-3| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}|z-5|$ forment un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Correction :

Pas trop le choix de développer :

$$|z-3| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z-5|$$

Exercice 20 :

Montrer que les points du plan dont l'affixe vérifie $|z-3| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z-5|$ forment un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Correction :

Pas trop le choix de développer :

$$|z-3| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z-5| \iff (z-3)\overline{(z-3)} = \frac{1}{2}(z-5)\overline{(z-5)}$$

Exercice 20 :

Montrer que les points du plan dont l'affixe vérifie $|z-3| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}|z-5|$ forment un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Correction :

Pas trop le choix de développer :

$$\begin{aligned} |z-3| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z-5| &\iff (z-3)\overline{(z-3)} = \frac{1}{2}(z-5)\overline{(z-5)} \\ &\iff 2z\overline{z} - 6\overline{z} - 6z + 18 = z\overline{z} - 5\overline{z} - 5z + 25 \end{aligned}$$

Exercice 20 :

Montrer que les points du plan dont l'affixe vérifie $|z-3| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}|z-5|$ forment un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Correction :

Pas trop le choix de développer :

$$\begin{aligned}
|z-3| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z-5| &\iff (z-3)\overline{(z-3)} = \frac{1}{2}(z-5)\overline{(z-5)} \\
&\iff 2z\overline{z} - 6\overline{z} - 6z + 18 = z\overline{z} - 5\overline{z} - 5z + 25 \\
&\iff z\overline{z} - \overline{z} - z = 7
\end{aligned}$$

Exercice 20 :

Montrer que les points du plan dont l'affixe vérifie $|z-3| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z-5|$ forment un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Correction :

Pas trop le choix de développer :

$$\begin{aligned}
|z-3| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z-5| &\iff (z-3)\overline{(z-3)} = \frac{1}{2}(z-5)\overline{(z-5)} \\
&\iff 2z\overline{z} - 6\overline{z} - 6z + 18 = z\overline{z} - 5\overline{z} - 5z + 25 \\
&\iff z\overline{z} - \overline{z} - z = 7 \\
&\iff (z-1)(\overline{z}-1) - 1 = 7
\end{aligned}$$

Exercice 20 :

Montrer que les points du plan dont l'affixe vérifie $|z-3| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}|z-5|$ forment un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Correction :

Pas trop le choix de développer :

$$\begin{aligned}
|z-3| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z-5| &\iff (z-3)\overline{(z-3)} = \frac{1}{2}(z-5)\overline{(z-5)} \\
&\iff 2z\overline{z} - 6\overline{z} - 6z + 18 = z\overline{z} - 5\overline{z} - 5z + 25 \\
&\iff z\overline{z} - \overline{z} - z = 7 \\
&\iff (z-1)(\overline{z}-1) - 1 = 7 \\
&\iff |z-1| = 2\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 20 :

Montrer que les points du plan dont l'affixe vérifie $|z-3| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}|z-5|$ forment un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Correction :

Pas trop le choix de développer :

$$\begin{aligned}
|z-3| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z-5| &\iff (z-3)\overline{(z-3)} = \frac{1}{2}(z-5)\overline{(z-5)}\\
&\iff 2z\overline{z} - 6\overline{z} - 6z + 18 = z\overline{z} - 5\overline{z} - 5z + 25\\
&\iff z\overline{z} - \overline{z} - z = 7\\
&\iff (z-1)(\overline{z}-1) - 1 = 7\\
&\iff |z-1| = 2\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

L'ensemble cherché est donc le cercle de centre $\Omega(1)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

Exercice 22 :

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point d'affixe $\dfrac{2}{1 + \mathrm{i}\,t}$ appartient au cercle de centre 1 et de rayon 1.

Exercice 22 :

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point d'affixe $\dfrac{2}{1+\mathrm{i}\,t}$ appartient au cercle de centre 1 et de rayon 1.

Correction :

Déjà, comme $t \in \mathbb{R}$, les points d'affixe $\dfrac{2}{1+\mathrm{i}\,t}$ sont correctement définis pour tout t.

Exercice 22 :

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point d'affixe $\dfrac{2}{1+\mathrm{i}\,t}$ appartient au cercle de centre 1 et de rayon 1.

Correction :

Déjà, comme $t \in \mathbb{R}$, les points d'affixe $\dfrac{2}{1+\mathrm{i}\,t}$ sont correctement définis pour tout t. Il suffit de calculer :

$$\left|\frac{2}{1+\mathrm{i}\,t} - 1\right|$$

Exercice 22 :

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point d'affixe $\dfrac{2}{1+\mathrm{i}\,t}$ appartient au cercle de centre 1 et de rayon 1.

Correction :

Déjà, comme $t \in \mathbb{R}$, les points d'affixe $\dfrac{2}{1+\mathrm{i}\,t}$ sont correctement définis pour tout t. Il suffit de calculer :

$$\left|\frac{2}{1+\mathrm{i}\,t}-1\right| = \left|\frac{1-\mathrm{i}\,t}{1+\mathrm{i}\,t}\right|$$

Exercice 22 :

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point d'affixe $\dfrac{2}{1+\mathrm{i}\,t}$ appartient au cercle de centre 1 et de rayon 1.

Correction :

Déjà, comme $t \in \mathbb{R}$, les points d'affixe $\dfrac{2}{1+\mathrm{i}\,t}$ sont correctement définis pour tout t. Il suffit de calculer :

$$\left|\frac{2}{1+\mathrm{i}\,t}-1\right| = \left|\frac{1-\mathrm{i}\,t}{1+\mathrm{i}\,t}\right| = \frac{|1-\mathrm{i}\,t|}{\overline{|1-\mathrm{i}\,t|}}$$

Exercice 22 :

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point d'affixe $\dfrac{2}{1+\mathrm{i}\,t}$ appartient au cercle de centre 1 et de rayon 1.

Correction :

Déjà, comme $t \in \mathbb{R}$, les points d'affixe $\dfrac{2}{1+\mathrm{i}\,t}$ sont correctement définis pour tout t. Il suffit de calculer :

$$\left|\frac{2}{1+\mathrm{i}\,t} - 1\right| = \left|\frac{1-\mathrm{i}\,t}{1+\mathrm{i}\,t}\right| = \frac{|1-\mathrm{i}\,t|}{\left|\overline{1-\mathrm{i}\,t}\right|} = 1.$$

Exercice 22 :

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point d'affixe $\dfrac{2}{1+\mathrm{i}\,t}$ appartient au cercle de centre 1 et de rayon 1.

Correction :

Déjà, comme $t \in \mathbb{R}$, les points d'affixe $\dfrac{2}{1+\mathrm{i}\,t}$ sont correctement définis pour tout t. Il suffit de calculer :

$$\left|\frac{2}{1+\mathrm{i}\,t}-1\right| = \left|\frac{1-\mathrm{i}\,t}{1+\mathrm{i}\,t}\right| = \frac{|1-\mathrm{i}\,t|}{|\overline{1-\mathrm{i}\,t}|} = 1.$$

Donc, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, les points d'affixe $\dfrac{2}{1+\mathrm{i}\,t}$ appartiennent au cercle de centre 1 et de rayon 1.

Exercice 23 :

1. Traduire géométriquement la condition

$$(z-i)\overline{(z-i)} = 9$$

2. Développer et simplifier autant que possible l'expression $(z-i)\overline{(z-i)}$.
3. Représenter dans le plan complexe l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie

$$|z|^2 - 2\mathrm{Im}\,(z) = 8.$$

Exercice 23 :

❶ Traduire géométriquement la condition

$$(z-i)\overline{(z-i)}=9$$

Correction :

❶ $(z-i)\overline{(z-i)}=9$

Exercice 23 :

1. Traduire géométriquement la condition

$$(z-i)\overline{(z-i)} = 9$$

Correction :

1. $(z-i)\overline{(z-i)} = 9 \iff |z-i| = 3.$

Exercice 23 :

1. Traduire géométriquement la condition

$$(z-i)\overline{(z-i)} = 9$$

Correction :

1. $(z-i)\overline{(z-i)} = 9 \iff |z-i| = 3.$
   C'est le cercle de centre $\Omega(\mathrm{i})$ et de rayon 3.

Exercice 23 :

1. Traduire géométriquement la condition

$$(z-i)\overline{(z-i)} = 9$$

2. Développer et simplifier autant que possible l'expression $(z-i)\overline{(z-i)}$.

Correction :

1. $(z-i)\overline{(z-i)} = 9 \iff |z-i| = 3.$
   C'est le cercle de centre $\Omega(\mathrm{i})$ et de rayon 3.

2. $(z-i)\overline{(z-i)}$

Exercice 23 :

1. Traduire géométriquement la condition

$$(z-i)\overline{(z-i)} = 9$$

2. Développer et simplifier autant que possible l'expression $(z-i)\overline{(z-i)}$.

Correction :

1. $(z-i)\overline{(z-i)} = 9 \iff |z-i| = 3.$
   C'est le cercle de centre $\Omega(\mathrm{i})$ *et de rayon* 3.

2. $(z-i)\overline{(z-i)} = |z|^2 - \overline{\mathrm{i}}\,z - \mathrm{i}\,\overline{z} - 1$

Exercice 23 :

1. Traduire géométriquement la condition

$$(z-i)\overline{(z-i)} = 9$$

2. Développer et simplifier autant que possible l'expression $(z-i)\overline{(z-i)}$.

Correction :

1. $(z-i)\overline{(z-i)} = 9 \iff |z-i| = 3.$
   C'est le cercle de centre $\Omega(\mathrm{i})$ et de rayon 3.

2. $(z-i)\overline{(z-i)} = |z|^2 - \overline{\mathrm{i}}\,z - \mathrm{i}\,\overline{z} - 1 = |z|^2 + \mathrm{i}\,(z-\overline{z}) - 1$

Exercice 23 :

1. Traduire géométriquement la condition

$$(z-i)\overline{(z-i)} = 9$$

2. Développer et simplifier autant que possible l'expression $(z-i)\overline{(z-i)}$.

Correction :

1. $(z-i)\overline{(z-i)} = 9 \iff |z-i| = 3.$
   C'est le cercle de centre $\Omega(\mathrm{i})$ et de rayon 3.

2. $(z-i)\overline{(z-i)} = |z|^2 - \overline{\mathrm{i}}\,z - \mathrm{i}\,\overline{z} - 1 = |z|^2 + \mathrm{i}\,(z - \overline{z}) - 1 = |z|^2 - 2\mathrm{Im}\,(z) - 1.$

Exercice 23 :

1. Traduire géométriquement la condition

$$(z-i)\overline{(z-i)} = 9$$

2. Développer et simplifier autant que possible l'expression $(z-i)\overline{(z-i)}$.
3. Représenter dans le plan complexe l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie

$$|z|^2 - 2\mathrm{Im}\,(z) = 8.$$

Correction :

1. $(z-i)\overline{(z-i)} = 9 \iff |z-i| = 3$.
   C'est le cercle de centre $\Omega(\,\mathrm{i}\,)$ et de rayon 3.
2. $(z-i)\overline{(z-i)} = |z|^2 - \overline{\mathrm{i}}\,z - \mathrm{i}\,\overline{z} - 1 = |z|^2 + \mathrm{i}\,(z-\overline{z}) - 1 = |z|^2 - 2\mathrm{Im}\,(z) - 1.$
3. D'après les questions précédentes,
   $|z|^2 - 2\mathrm{Im}\,(z) = 8$

Exercice 23 :

1. Traduire géométriquement la condition

$$(z-i)\overline{(z-i)}=9$$

2. Développer et simplifier autant que possible l'expression $(z-i)\overline{(z-i)}$.
3. Représenter dans le plan complexe l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie

$$|z|^2-2\mathrm{Im}\,(z)=8.$$

Correction :

1. $(z-i)\overline{(z-i)}=9 \iff |z-i|=3.$
   C'est le cercle de centre $\Omega(\mathrm{i})$ et de rayon 3.
2. $(z-i)\overline{(z-i)}=|z|^2-\overline{\mathrm{i}}\,z-\mathrm{i}\,\overline{z}-1=|z|^2+\mathrm{i}\,(z-\overline{z})-1=|z|^2-2\mathrm{Im}\,(z)-1.$
3. D'après les questions précédentes,
   $|z|^2-2\mathrm{Im}\,(z)=8 \iff |z|^2-2\mathrm{Im}\,(z)-1=9$

Exercice 23 :

1. Traduire géométriquement la condition

$$(z-i)\overline{(z-i)} = 9$$

2. Développer et simplifier autant que possible l'expression $(z-i)\overline{(z-i)}$.
3. Représenter dans le plan complexe l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie

$$|z|^2 - 2\mathrm{Im}\,(z) = 8.$$

Correction :

1. $(z-i)\overline{(z-i)} = 9 \iff |z-i| = 3.$
   C'est le cercle de centre $\Omega(\mathrm{i})$ et de rayon 3.
2. $(z-i)\overline{(z-i)} = |z|^2 - \overline{\mathrm{i}}\,z - \mathrm{i}\,\overline{z} - 1 = |z|^2 + \mathrm{i}\,(z-\overline{z}) - 1 = |z|^2 - 2\mathrm{Im}\,(z) - 1.$
3. D'après les questions précédentes,
   $|z|^2 - 2\mathrm{Im}\,(z) = 8 \iff |z|^2 - 2\mathrm{Im}\,(z) - 1 = 9 \iff |z-i| = 3.$

Exercice 23 :

1. Traduire géométriquement la condition

$$(z-i)\overline{(z-i)} = 9$$

2. Développer et simplifier autant que possible l'expression $(z-i)\overline{(z-i)}$.
3. Représenter dans le plan complexe l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie

$$|z|^2 - 2\mathrm{Im}\,(z) = 8.$$

Correction :

1. $(z-i)\overline{(z-i)} = 9 \iff |z-i| = 3.$
   C'est le cercle de centre $\Omega(\mathrm{i})$ et de rayon 3.
2. $(z-i)\overline{(z-i)} = |z|^2 - \overline{\mathrm{i}}\,z - \mathrm{i}\,\overline{z} - 1 = |z|^2 + \mathrm{i}\,(z-\overline{z}) - 1 = |z|^2 - 2\mathrm{Im}\,(z) - 1.$
3. D'après les questions précédentes,
   $|z|^2 - 2\mathrm{Im}\,(z) = 8 \iff |z|^2 - 2\mathrm{Im}\,(z) - 1 = 9 \iff |z-i| = 3.$
   L'ensemble cherché est donc le cercle de centre $\Omega(\mathrm{i})$ et de rayon 3.

Exercice 24 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes. Sauf mention contraire, on résoudra ces équations modulo 2π et modulo π.

1. $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}$
2. $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4}\ \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$
3. $\arg(z^2) = 0$
4. $\arg(z-1) = \dfrac{\pi}{2}$
5. $\arg(z-1-2\,\mathrm{i}\,) = \dfrac{\pi}{3}$
6. $\arg(z-3\,\mathrm{i}\,+1) = \dfrac{3\pi}{2}$
7. $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.
8. $\arg\left((z-1-2\,\mathrm{i}\,)^2\right) = \dfrac{\pi}{3}$
9. $\arg(z-3\,\mathrm{i}\,+1) = \arg(z-\mathrm{i}\,)$

Exercice 24 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes. Sauf mention contraire, on résoudra ces équations modulo 2π et modulo π.

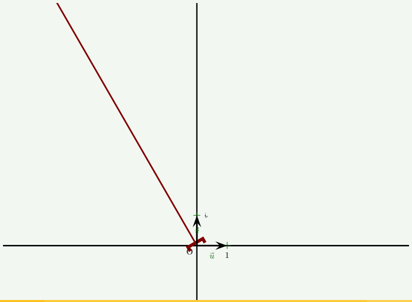
1. $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}$

Exercice 24 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes. Sauf mention contraire, on résoudra ces équations modulo 2π et modulo π.

1. $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}$

Correction :



Exercice 24 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes. Sauf mention contraire, on résoudra ces équations modulo 2π et modulo π.

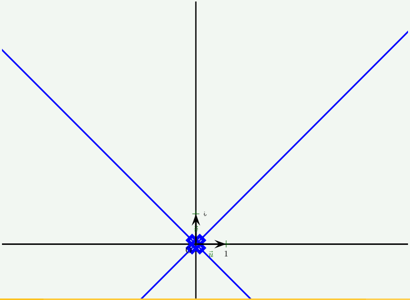
1. $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}$
2. $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4} \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$

Exercice 24 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes. Sauf mention contraire, on résoudra ces équations modulo 2π et modulo π.

1. $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}$
2. $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4}\ \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$

Correction :



Exercice 24 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes. Sauf mention contraire, on résoudra ces équations modulo 2π et modulo π.

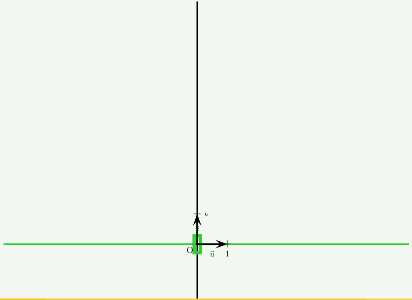
1. $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}$
2. $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4} \ \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$
3. $\arg(z^2) = 0$

Exercice 24 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes. Sauf mention contraire, on résoudra ces équations modulo 2π et modulo π.

1. $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}$
2. $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4} \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$
3. $\arg(z^2) = 0$

Correction :



Exercice 24 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes. Sauf mention contraire, on résoudra ces équations modulo 2π et modulo π.

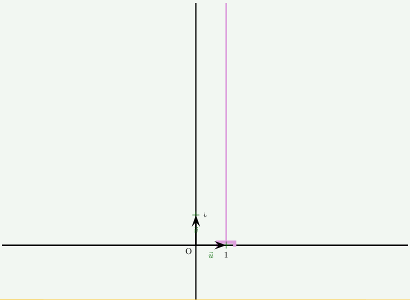
1. $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}$
2. $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4} \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$
3. $\arg(z^2) = 0$
4. $\arg(z-1) = \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 24 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes. Sauf mention contraire, on résoudra ces équations modulo 2π et modulo π.

1. $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}$
2. $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4} \ \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$
3. $\arg(z^2) = 0$
4. $\arg(z-1) = \dfrac{\pi}{2}$

Correction :



Exercice 24 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes. Sauf mention contraire, on résoudra ces équations modulo 2π et modulo π.

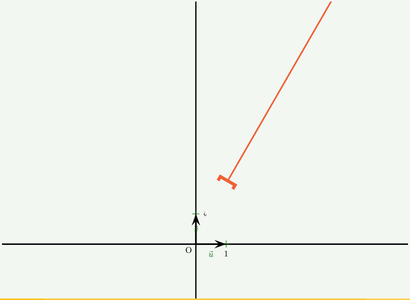
1. $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}$
2. $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4} \ \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$
3. $\arg(z^2) = 0$
4. $\arg(z-1) = \dfrac{\pi}{2}$
5. $\arg(z-1-2\,\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{3}$

Exercice 24 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes. Sauf mention contraire, on résoudra ces équations modulo 2π et modulo π.

1. $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}$
2. $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4} \ \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$
3. $\arg(z^2) = 0$
4. $\arg(z-1) = \dfrac{\pi}{2}$
5. $\arg(z-1-2\,\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{3}$

Correction :



Exercice 24 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes. Sauf mention contraire, on résoudra ces équations modulo 2π et modulo π.

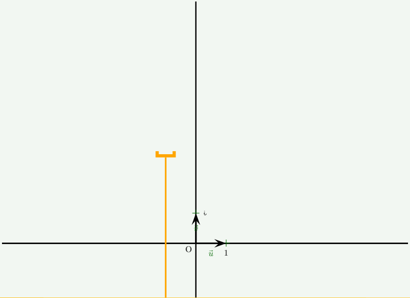
1. $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}$
2. $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4} \ \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$
3. $\arg(z^2) = 0$
4. $\arg(z-1) = \dfrac{\pi}{2}$
5. $\arg(z-1-2\,\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{3}$
6. $\arg(z-3\,\mathrm{i}+1) = \dfrac{3\pi}{2}$

Exercice 24 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes. Sauf mention contraire, on résoudra ces équations modulo 2π et modulo π.

1. $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}$
2. $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4}\ \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$
3. $\arg(z^2) = 0$
4. $\arg(z-1) = \dfrac{\pi}{2}$
5. $\arg(z - 1 - 2\,\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{3}$
6. $\arg(z - 3\,\mathrm{i} + 1) = \dfrac{3\pi}{2}$

Correction :



Exercice 24 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes. Sauf mention contraire, on résoudra ces équations modulo 2π et modulo π.

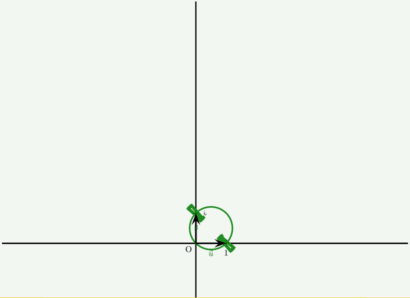
1. $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}$
2. $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4} \ \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$
3. $\arg(z^2) = 0$
4. $\arg(z-1) = \dfrac{\pi}{2}$
5. $\arg(z-1-2\,\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{3}$
6. $\arg(z-3\,\mathrm{i}+1) = \dfrac{3\pi}{2}$
7. $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \ [\pi]$.

Exercice 24 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes. Sauf mention contraire, on résoudra ces équations modulo 2π et modulo π.

1. $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}$
2. $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4} \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$
3. $\arg(z^2) = 0$
4. $\arg(z-1) = \dfrac{\pi}{2}$
5. $\arg(z - 1 - 2\,\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{3}$
6. $\arg(z - 3\,\mathrm{i} + 1) = \dfrac{3\pi}{2}$
7. $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ $[\pi]$.

Correction :



Exercice 24 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes. Sauf mention contraire, on résoudra ces équations modulo 2π et modulo π.

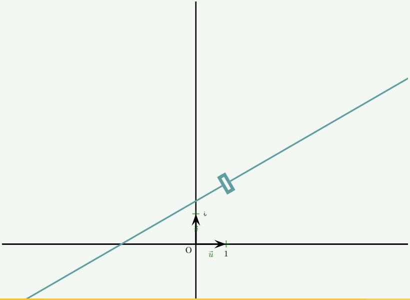
1. $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}$
2. $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4}\ \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$
3. $\arg(z^2) = 0$
4. $\arg(z-1) = \dfrac{\pi}{2}$
5. $\arg(z-1-2\,\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{3}$
6. $\arg(z-3\,\mathrm{i}+1) = \dfrac{3\pi}{2}$
7. $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.
8. $\arg\left((z-1-2\,\mathrm{i})^2\right) = \dfrac{\pi}{3}$

Exercice 24 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes. Sauf mention contraire, on résoudra ces équations modulo 2π et modulo π.

1. $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}$
2. $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4}\ \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$
3. $\arg(z^2) = 0$
4. $\arg(z-1) = \dfrac{\pi}{2}$
5. $\arg(z - 1 - 2\,\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{3}$
6. $\arg(z - 3\,\mathrm{i} + 1) = \dfrac{3\pi}{2}$
7. $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.
8. $\arg\left((z-1-2\,\mathrm{i})^2\right) = \dfrac{\pi}{3}$

Correction :



Exercice 24 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes. Sauf mention contraire, on résoudra ces équations modulo 2π et modulo π.

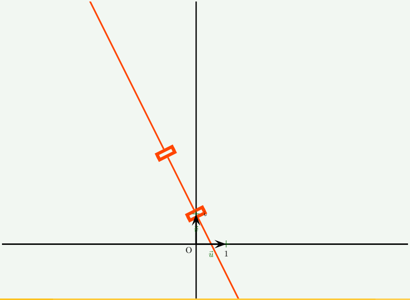
1. $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}$
2. $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4} \ \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$
3. $\arg(z^2) = 0$
4. $\arg(z-1) = \dfrac{\pi}{2}$
5. $\arg(z-1-2\,\mathrm{i}\,) = \dfrac{\pi}{3}$
6. $\arg(z-3\,\mathrm{i}\,+1) = \dfrac{3\pi}{2}$
7. $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \ [\pi]$.
8. $\arg\left((z-1-2\,\mathrm{i}\,)^2\right) = \dfrac{\pi}{3}$
9. $\arg(z-3\,\mathrm{i}\,+1) = \arg(z-\,\mathrm{i}\,)$

Exercice 24 :

Dans le plan complexe, représenter les points M d'affixe z satisfaisant les conditions suivantes. Sauf mention contraire, on résoudra ces équations modulo 2π et modulo π.

1. $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}$
2. $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4}\ \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$
3. $\arg(z^2) = 0$
4. $\arg(z-1) = \dfrac{\pi}{2}$
5. $\arg(z-1-2\,\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{3}$
6. $\arg(z-3\,\mathrm{i}+1) = \dfrac{3\pi}{2}$
7. $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.
8. $\arg\left((z-1-2\,\mathrm{i})^2\right) = \dfrac{\pi}{3}$
9. $\arg(z-3\,\mathrm{i}+1) = \arg(z-\mathrm{i})$

Correction :



Exercice 25 :

Dans chacun des cas suivants, vérifier si le triangle ABC est rectangle en B ;

1. $A(3+2\,i)$, $B(0)$ et $C\left(-1+\dfrac{3}{2}\,i\right)$;
2. $A(2-\,i)$, $B(1-4\,i)$ et $C(-2-3\,i)$;
3. $A(-4)$, $B(-2+3\,i)$ et $C(4-\,i)$.

Dans les cas où il est rectangle vérifier s'il est isocèle.

Exercice 25 :

Dans chacun des cas suivants, vérifier si le triangle ABC est rectangle en B ;

1. $\mathrm{A}(3+2\,\mathrm{i})$, $\mathrm{B}(0)$ et $\mathrm{C}\left(-1+\dfrac{3}{2}\,\mathrm{i}\right)$;
2. $\mathrm{A}(2-\mathrm{i})$, $\mathrm{B}(1-4\,\mathrm{i})$ et $\mathrm{C}(-2-3\,\mathrm{i})$;
3. $\mathrm{A}(-4)$, $\mathrm{B}(-2+3\,\mathrm{i})$ et $\mathrm{C}(4-\mathrm{i})$.

Dans les cas où il est rectangle vérifier s'il est isocèle.

Correction :

1. $\dfrac{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{B}}}=\dfrac{-1+\dfrac{3}{2}\,\mathrm{i}}{3+2\,\mathrm{i}}=\dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}$ donc $\left(\overrightarrow{\mathrm{BA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)=\arg\left(\dfrac{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{B}}}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ et le triangle ABC est rectangle en B non isocèle.

Exercice 25 :

Dans chacun des cas suivants, vérifier si le triangle ABC est rectangle en B ;

1. $A(3+2\,i)$, $B(0)$ et $C\left(-1+\dfrac{3}{2}\,i\right)$;
2. $A(2-\,i)$, $B(1-4\,i)$ et $C(-2-3\,i)$;
3. $A(-4)$, $B(-2+3\,i)$ et $C(4-\,i)$.

Dans les cas où il est rectangle vérifier s'il est isocèle.

Correction :

1. $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \dfrac{-1+\dfrac{3}{2}\,i}{3+2\,i} = \dfrac{1}{2}\,i$ donc $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ et le triangle ABC est rectangle en B non isocèle.
2. $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \dfrac{-3+i}{1+3\,i} = i$ donc $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ et le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

Exercice 25 :

Dans chacun des cas suivants, vérifier si le triangle ABC est rectangle en B ;

1. $A(3+2\,i)$, $B(0)$ et $C\left(-1+\dfrac{3}{2}\,i\right)$;
2. $A(2-i)$, $B(1-4\,i)$ et $C(-2-3\,i)$;
3. $A(-4)$, $B(-2+3\,i)$ et $C(4-i)$.

Dans les cas où il est rectangle vérifier s'il est isocèle.

Correction :

1. $\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\dfrac{-1+\dfrac{3}{2}\,i}{3+2\,i}=\dfrac{1}{2}\,i$ donc $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)=\arg\left(\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ et le triangle ABC est rectangle en B non isocèle.
2. $\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\dfrac{-3+i}{1+3\,i}=i$ donc $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)=\arg\left(\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ et le triangle ABC est rectangle isocèle en B.
3. $\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\dfrac{6-4\,i}{2+3\,i}=-2\,i$ donc $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)=\arg\left(\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ et le triangle ABC est rectangle en B non isocèle.

Exercice 9 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}z$ soient alignés.

Exercice 9 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}\,z$ soient alignés.

Correction :

Les points d'affixes i, z, $\mathrm{i}\,z$ sont alignés si, et seulement si $z = 0$ (deux points) ou exclusif $\dfrac{\mathrm{i}\,z - \mathrm{i}}{\mathrm{i}\,z - z} = \dfrac{1}{2}(1 - \mathrm{i})\dfrac{z-1}{z} \in \mathbb{R}$.

Exercice 9 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}\,z$ soient alignés.

Correction :

Les points d'affixes i, z, $\mathrm{i}\,z$ sont alignés si, et seulement si $z = 0$ (deux points) ou exclusif $\dfrac{\mathrm{i}\,z - \mathrm{i}}{\mathrm{i}\,z - z} = \dfrac{1}{2}(1-\mathrm{i})\dfrac{z-1}{z} \in \mathbb{R}$.

Or,

$$\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})\frac{z-1}{z} \in \mathbb{R} \iff \frac{1}{2}(1-\mathrm{i})\frac{z-1}{z} = \frac{1}{2}(1+\mathrm{i})\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}} \tag{1}$$

Exercice 9 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}\,z$ soient alignés.

Correction :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})\frac{z-1}{z}\in\mathbb{R} &\iff \frac{1}{2}(1-\mathrm{i})\frac{z-1}{z}=\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}}\\ &\iff \frac{z-1}{z}=\mathrm{i}\ \frac{\overline{z}-1}{\overline{z}} \iff \overline{z}(z-1)=\mathrm{i}\,z(\overline{z}-1)\end{aligned} \tag{1}$$

Exercice 9 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}\,z$ soient alignés.

Correction :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})\frac{z-1}{z}\in\mathbb{R} &\iff \frac{1}{2}(1-\mathrm{i})\frac{z-1}{z}=\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}}\\
&\iff \frac{z-1}{z}=\mathrm{i}\,\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}} \iff \overline{z}(z-1)=\mathrm{i}\,z(\overline{z}-1)\\
&\iff (1-\mathrm{i})z\overline{z}-\overline{z}+\mathrm{i}\,z=0 \qquad (1)\\
& \qquad (2)
\end{aligned}$$

Exercice 9 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}\,z$ soient alignés.

Correction :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})\frac{z-1}{z} \in \mathbb{R} &\iff \frac{1}{2}(1-\mathrm{i})\frac{z-1}{z} = \frac{1}{2}(1+\mathrm{i})\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}} \\
&\iff \frac{z-1}{z} = \mathrm{i}\ \frac{\overline{z}-1}{\overline{z}} \iff \overline{z}(z-1) = \mathrm{i}\,z(\overline{z}-1) \\
&\iff (1-\mathrm{i})z\overline{z} - \overline{z} + \mathrm{i}\,z = 0 && (1) \\
&\iff \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} z\overline{z} - \overline{z} + \mathrm{i}\,z = 0
\end{aligned}$$

$$(2)$$

Exercice 9 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}\,z$ soient alignés.

Correction :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})\frac{z-1}{z} \in \mathbb{R} \iff \frac{z-1}{z} = \mathrm{i}\,\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}} &\iff \overline{z}(z-1) = \mathrm{i}\,z(\overline{z}-1) \\
&\iff (1-\mathrm{i})z\overline{z} - \overline{z} + \mathrm{i}\,z = 0 \qquad (1) \\
&\iff \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}} z\overline{z} - \overline{z} + \mathrm{i}\,z = 0 \\
&\iff z\overline{z} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\,\overline{z} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}-\pi\right)} z = 0 \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Exercice 9 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}z$ soient alignés.

Correction :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})\frac{z-1}{z}\in\mathbb{R} &\iff (1-\mathrm{i})z\overline{z}-\overline{z}+\mathrm{i}z=0 && (1)\\
&\iff \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}z\overline{z}-\overline{z}+\mathrm{i}z=0\\
&\iff z\overline{z}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\,\overline{z}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}-\pi\right)}z=0\\
&\iff z\overline{z}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\,\overline{z}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}z=0\\
& && (2)
\end{aligned}$$

Exercice 9 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}\,z$ soient alignés.

Correction :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})\frac{z-1}{z}\in\mathbb{R} &\iff \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}z\overline{z}-\overline{z}+\mathrm{i}\,z=0\\
&\iff z\overline{z}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\,\overline{z}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}-\pi\right)}z=0\\
&\iff z\overline{z}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\,\overline{z}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}z=0\\
&\iff z\overline{z}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\,\overline{z}-\overline{\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}}\,z=0
\end{aligned}\tag{1}$$

Exercice 9 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}\,z$ soient alignés.

Correction :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})\frac{z-1}{z} \in \mathbb{R} &\iff z\overline{z} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\,\overline{z} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}-\pi\right)} z = 0 \\
&\iff z\overline{z} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\,\overline{z} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}} z = 0 \\
&\iff z\overline{z} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\,\overline{z} - \overline{\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}}\, z = 0 \\
&\iff \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\right)\overline{\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\right)} - \frac{1}{2} = 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Exercice 9 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}\,z$ soient alignés.

Correction :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})\frac{z-1}{z}\in\mathbb{R} &\iff z\bar{z}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\,\bar{z}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\,z=0\\
&\iff z\bar{z}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\,\bar{z}-\overline{\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}\,z=0\\
&\iff \left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)\overline{\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)}-\frac{1}{2}=0\\
&\iff \left|z-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}\iff\left|z-\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 9 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}\,z$ soient alignés.

Correction :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})\frac{z-1}{z}\in\mathbb{R} &\iff z\overline{z}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\,\overline{z}-\overline{\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}}\,z=0\\ &\iff \left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\right)\overline{\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\right)}-\frac{1}{2}=0\\ &\iff \left|z-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}\iff\left|z-\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

On vérifie que $\left|0-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 9 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}z$ soient alignés.

Correction :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})\frac{z-1}{z}\in\mathbb{R} &\iff \left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\right)\overline{\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\right)}-\frac{1}{2}=0\\ &\iff \left|z-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \left|z-\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

On vérifie que $\left|0-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc l'ensemble cherché est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 9 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}\,z$ soient alignés.

Correction :

Remarque : Pour ceux effrayés par les calculs complexes, on pouvait aussi poser $z = x + \mathrm{i}\,y$ dès la ligne (**??**) et obtenir :

$$
\begin{aligned}
(1-\mathrm{i})z\overline{z} - \overline{z} + \mathrm{i}\,z = 0 &\iff \frac{1}{2}(1-\mathrm{i})\frac{z-1}{z} = \frac{1}{2}(1+\mathrm{i})\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}} \\
&\iff \frac{z-1}{z} = \mathrm{i}\,\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}} \iff \overline{z}(z-1) = \mathrm{i}\,z(\overline{z}-1) \\
&\iff (1-\mathrm{i})z\overline{z} - \overline{z} + \mathrm{i}\,z = 0
\end{aligned}
$$

Exercice 9 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}z$ soient alignés.

Correction :

Remarque : *Pour ceux effrayés par les calculs complexes, on pouvait aussi poser $z = x + \mathrm{i}\,y$ dès la ligne (**??**) et obtenir :*

$$\begin{aligned}(1-\mathrm{i})z\overline{z} - \overline{z} + \mathrm{i}\,z = 0 &\iff (1-\mathrm{i})z\overline{z} - \overline{z} + \mathrm{i}\,z = 0 \\ &\iff (1-\mathrm{i})(x^2+y^2) - x + \mathrm{i}\,y + \mathrm{i}\,x - y = 0\end{aligned}$$

Exercice 9 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}\,z$ soient alignés.

Correction :

Remarque : *Pour ceux effrayés par les calculs complexes, on pouvait aussi poser $z = x + \mathrm{i}\,y$ dès la ligne (**??**) et obtenir :*

$$\begin{aligned}(1-\mathrm{i})z\overline{z} - \overline{z} + \mathrm{i}\,z = 0 &\iff (1-\mathrm{i})z\overline{z} - \overline{z} + \mathrm{i}\,z = 0\\ &\iff (1-\mathrm{i})(x^2+y^2) - x + \mathrm{i}\,y + \mathrm{i}\,x - y = 0\\ &\iff (1-\mathrm{i})(x^2+y^2) - (1-\mathrm{i})x - (1-\mathrm{i})y = 0\end{aligned}$$

Exercice 9 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}\,z$ soient alignés.

Correction :

Remarque : *Pour ceux effrayés par les calculs complexes, on pouvait aussi poser* $z = x + \mathrm{i}\,y$ *dès la ligne* (**??**) *et obtenir :*

$$\begin{aligned}
(1-\mathrm{i})z\overline{z} - \overline{z} + \mathrm{i}\,z = 0 &\iff (1-\mathrm{i})z\overline{z} - \overline{z} + \mathrm{i}\,z = 0 \\
&\iff (1-\mathrm{i})(x^2+y^2) - x + \mathrm{i}\,y + \mathrm{i}\,x - y = 0 \\
&\iff (1-\mathrm{i})(x^2+y^2) - (1-\mathrm{i})x - (1-\mathrm{i})y = 0 \\
&\iff x^2 + y^2 - x - y = 0
\end{aligned}$$

Exercice 9 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}\,z$ soient alignés.

Correction :

Remarque : *Pour ceux effrayés par les calculs complexes, on pouvait aussi poser $z = x + \mathrm{i}\,y$ dès la ligne (**??**) et obtenir :*

$$\begin{aligned}
(1-\mathrm{i})z\bar{z} - \bar{z} + \mathrm{i}\,z = 0 &\iff (1-\mathrm{i})(x^2+y^2) - x + \mathrm{i}\,y + \mathrm{i}\,x - y = 0 \\
&\iff (1-\mathrm{i})(x^2+y^2) - (1-\mathrm{i})x - (1-\mathrm{i})y = 0 \\
&\iff x^2+y^2-x-y=0 \\
&\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 9 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}z$ soient alignés.

Correction :

Remarque : Pour ceux effrayés par les calculs complexes, on pouvait aussi poser $z = x + \mathrm{i}y$ dès la ligne (**??**) et obtenir :

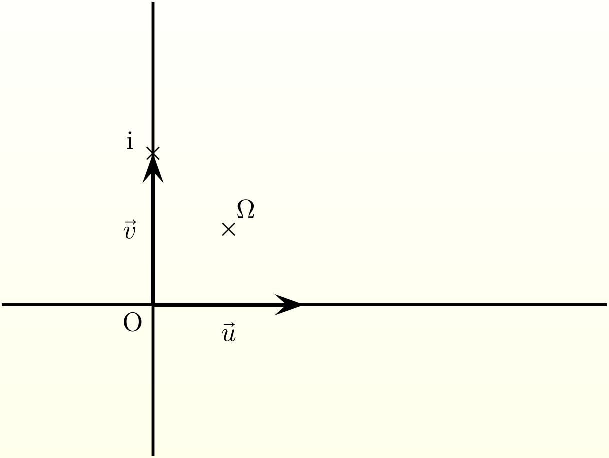
$$\begin{aligned}(1-\mathrm{i})z\overline{z} - \overline{z} + \mathrm{i}z = 0 &\iff (1-\mathrm{i})(x^2+y^2) - (1-\mathrm{i})x - (1-\mathrm{i})y = 0\\ &\iff x^2+y^2-x-y=0\\ &\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

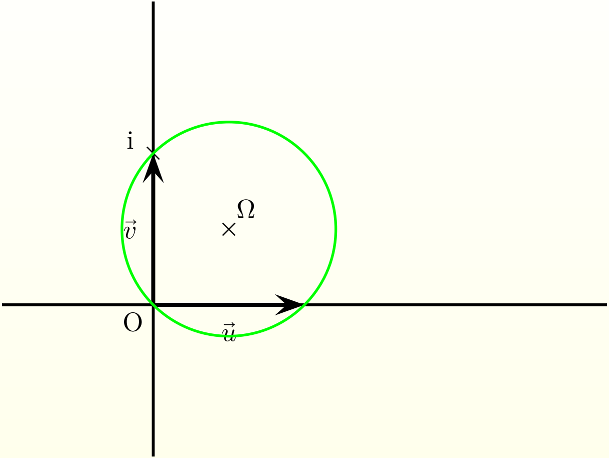
On retrouve le même cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

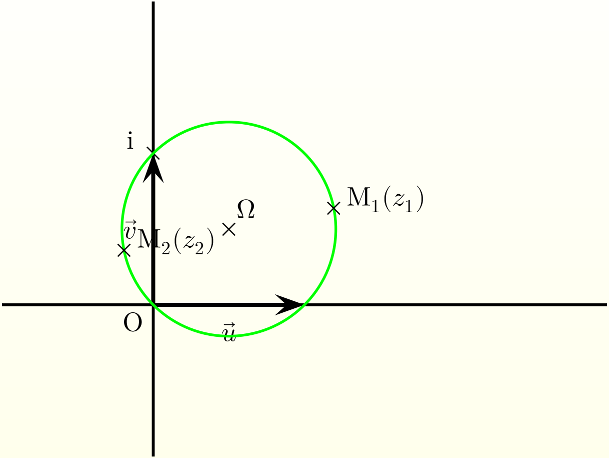
Exercice 9 :

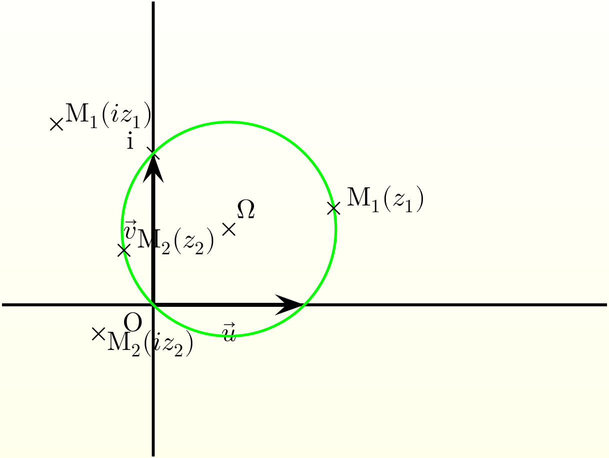
Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}z$ soient alignés.

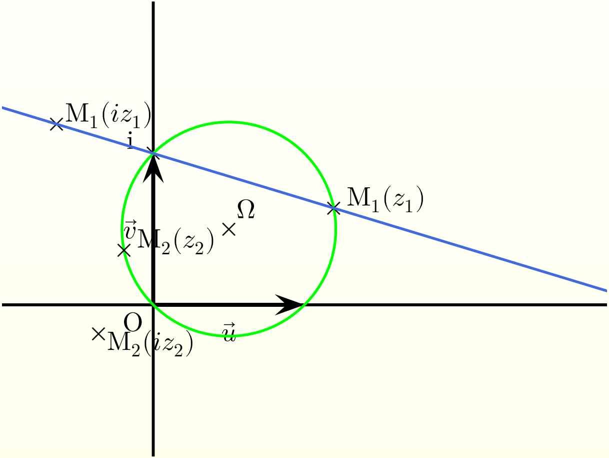
Correction :


i
Ω
$\vec{v}$
O
$\vec{u}$

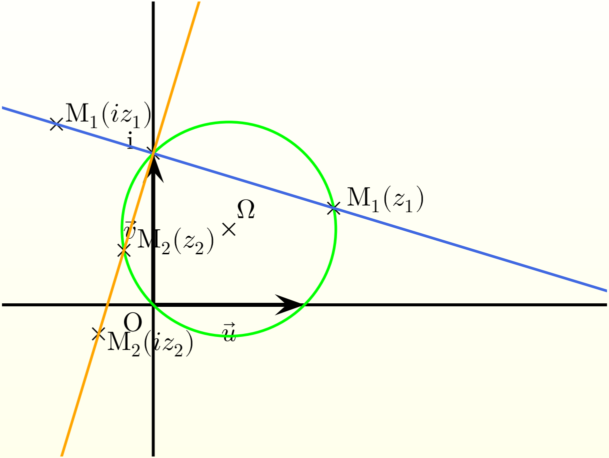

i
Ω
$\vec{v}$
O
$\vec{u}$


i
Ω
$M_1(z_1)$
$\vec{v}$
$M_2(z_2)$
O
$\vec{u}$


$M_1(iz_1)$
i
$M_1(z_1)$
Ω
$\vec{v}$
$M_2(z_2)$
O
$M_2(iz_2)$
$\vec{u}$



$M_1(iz_1)$
i
$M_1(z_1)$
Ω
$\vec{v}$
$M_2(z_2)$
O
$M_2(iz_2)$
$\vec{u}$



$M_1(iz_1)$
i
$M_1(z_1)$
Ω
$\vec{v}$
$M_2(z_2)$
O
$M_2(iz_2)$
$\vec{u}$

Exercice 10 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}z$ forment un triangle équilatéral.

Correction :

Le triangle formé par les points d'affixes i, z, $\mathrm{i}z$ est équilatéral si, et seulement si

Exercice 10 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}\,z$ forment un triangle équilatéral.

Correction :

Le triangle formé par les points d'affixes i, z, $\mathrm{i}\,z$ est équilatéral si, et seulement si

$$|z - \mathrm{i}| = |\mathrm{i}\,z - z| = |\mathrm{i}\,z - \mathrm{i}|.$$

Exercice 10 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}z$ forment un triangle équilatéral.

Correction :

On,

$$|z-\mathrm{i}| = |\mathrm{i}z - z| = |\mathrm{i}z - \mathrm{i}|$$

Exercice 10 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}\,z$ forment un triangle équilatéral.

Correction :

$$|z-\mathrm{i}| = |\mathrm{i}\,z - z| = |\mathrm{i}\,z-\mathrm{i}| \iff |z-\mathrm{i}| = |\mathrm{i}-1|\,|z| = |z-1|$$

Exercice 10 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}z$ forment un triangle équilatéral.

Correction :

$$\begin{aligned} |z-\mathrm{i}| = |\mathrm{i}z - z| = |\mathrm{i}z - \mathrm{i}| &\iff |z-\mathrm{i}| = |\mathrm{i}-1|\,|z| = |z-1| \\ &\iff |z-\mathrm{i}| = \sqrt{2}\,|z| = |z-1| \end{aligned}$$

Exercice 10 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}z$ forment un triangle équilatéral.

Correction :

$$\begin{aligned}
|z-\mathrm{i}| = |\mathrm{i}z - z| = |\mathrm{i}z - \mathrm{i}| &\iff |z-\mathrm{i}| = |\mathrm{i}-1|\,|z| = |z-1| \\
&\iff |z-\mathrm{i}| = \sqrt{2}\,|z| = |z-1| \\
&\iff \begin{cases} |z-\mathrm{i}| = |z-1| \\ \sqrt{2}\,|z| = |z-1| \end{cases}
\end{aligned}$$

Exercice 10 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}\,z$ forment un triangle équilatéral.

Correction :

$$\begin{aligned}
|z-\mathrm{i}\,| = |\,\mathrm{i}\,z - z| = |\,\mathrm{i}\,z - \mathrm{i}\,| &\iff |z-\mathrm{i}\,| = |\,\mathrm{i}-1|\,|z| = |z-1| \\
&\iff |z-\mathrm{i}\,| = \sqrt{2}\,|z| = |z-1| \\
&\iff \begin{cases} |z-\mathrm{i}\,| = |z-1| \\ \sqrt{2}\,|z| = |z-1| \end{cases}
\end{aligned}$$

D'un point de vue géométrique, en posant $\mathrm{A}(1)$ et $\mathrm{B}(\mathrm{i}\,)$, on a :

$$\iff \begin{cases} \mathrm{M}(z) \text{ appartient à la médiatrice de } [\mathrm{AB}] \\ 2z\overline{z} = (z-1)\overline{(z-1)} \end{cases}$$

Exercice 10 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}\,z$ forment un triangle équilatéral.

Correction :

$$
\begin{aligned}
|z-\mathrm{i}\,| = |\,\mathrm{i}\,z - z| = |\,\mathrm{i}\,z-\mathrm{i}\,| &\iff |z-\mathrm{i}\,| = \sqrt{2}\,|z| = |z-1| \\
&\iff \begin{cases} |z-\mathrm{i}\,| = |z-1| \\ \sqrt{2}\,|z| = |z-1| \end{cases}
\end{aligned}
$$

D'un point de vue géométrique, en posant $\mathrm{A}(1)$ et $\mathrm{B}(\mathrm{i}\,)$, on a :

$$
\begin{aligned}
&\iff \begin{cases} \mathrm{M}(z) \text{ appartient à la médiatrice de } [\mathrm{AB}] \\ 2z\overline{z} = (z-1)\overline{(z-1)} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \mathrm{M}(z) \text{ appartient à la médiatrice de } [\mathrm{AB}] \\ z\overline{z} + z + \overline{z} - 1 = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Exercice 10 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}z$ forment un triangle équilatéral.

Correction :

$$|z-\mathrm{i}| = |\mathrm{i}z - z| = |\mathrm{i}z - \mathrm{i}| \iff \begin{cases} |z-\mathrm{i}| = |z-1| \\ \sqrt{2}\,|z| = |z-1| \end{cases}$$

D'un point de vue géométrique, en posant $A(1)$ et $B(\mathrm{i})$, on a :

$$\iff \begin{cases} \mathrm{M}(z) \text{ appartient à la médiatrice de } [AB] \\ 2z\overline{z} = (z-1)\overline{(z-1)} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mathrm{M}(z) \text{ appartient à la médiatrice de } [AB] \\ z\overline{z} + z + \overline{z} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mathrm{M}(z) \text{ appartient à la médiatrice de } [AB] \\ (z+1)\overline{(z+1)} - 2 = 0 \end{cases}$$

Exercice 10 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et iz forment un triangle équilatéral.

Correction :

$$|z-i| = |iz - z| = |iz - i|$$

D'un point de vue géométrique, en posant $A(1)$ et $B(i)$, on a :

$$\iff \begin{cases} M(z) \text{ appartient à la médiatrice de } [AB] \\ 2z\overline{z} = (z-1)\overline{(z-1)} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} M(z) \text{ appartient à la médiatrice de } [AB] \\ z\overline{z} + z + \overline{z} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} M(z) \text{ appartient à la médiatrice de } [AB] \\ (z+1)\overline{(z+1)} - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} M(z) \text{ appartient à la médiatrice de } [AB] \\ |z+1| = \sqrt{2} \end{cases}$$

Exercice 10 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}z$ forment un triangle équilatéral.

Correction :

$$
\begin{aligned}
|z-\mathrm{i}| = |\mathrm{i}z - z| = |\mathrm{i}z-\mathrm{i}| &\iff \begin{cases} \mathrm{M}(z) \text{ appartient à la médiatrice de } [\mathrm{AB}] \\ z\overline{z} + z + \overline{z} - 1 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \mathrm{M}(z) \text{ appartient à la médiatrice de } [\mathrm{AB}] \\ (z+1)\overline{(z+1)} - 2 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \mathrm{M}(z) \text{ appartient à la médiatrice de } [\mathrm{AB}] \\ |z+1| = \sqrt{2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \mathrm{M}(z) \text{ appartient à la médiatrice de } [\mathrm{AB}] \\ \mathrm{M}(z) \text{ appartient au cercle de centre } \mathrm{C}(-1) \text{ et de rayon } \sqrt{2} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Exercice 10 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}z$ forment un triangle équilatéral.

Correction :

$$|z-\mathrm{i}| = |\mathrm{i}z - z| = |\mathrm{i}z-\mathrm{i}| \iff \begin{cases} \mathrm{M}(z) \text{ appartient à la médiatrice de } [\mathrm{AB}] \\ (z+1)\overline{(z+1)} - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mathrm{M}(z) \text{ appartient à la médiatrice de } [\mathrm{AB}] \\ |z+1| = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mathrm{M}(z) \text{ appartient à la médiatrice de } [\mathrm{AB}] \\ \mathrm{M}(z) \text{ appartient au cercle de centre } \mathrm{C}(-1) \text{ et de rayon } \sqrt{2} \end{cases}$$

$\iff$ Les points $\mathrm{M}(z)$ sont les deux points d'intersection de la média

de $[\mathrm{AB}]$ et du cercle de centre $\mathrm{C}(-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$

Exercice 10 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}\,z$ forment un triangle équilatéral.

Correction :

D'un point de vue algébrique, en revenant à

$$|z-\mathrm{i}| = |\mathrm{i}\,z - z| = |\mathrm{i}\,z - \mathrm{i}| \iff \begin{cases} |z-\mathrm{i}| = |z-1| \\ \sqrt{2}\,|z| = |z-1| \end{cases}$$

Exercice 10 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}\,z$ forment un triangle équilatéral.

Correction :

D'un point de vue algébrique, en revenant à

$$|z-\mathrm{i}| = |\mathrm{i}\,z - z| = |\mathrm{i}\,z-\mathrm{i}| \iff \begin{cases} |z-\mathrm{i}| = |z-1| \\ \sqrt{2}\,|z| = |z-1| \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (z-\mathrm{i})\overline{(z-\mathrm{i})} = (z-1)\overline{(z-1)} \\ 2z\overline{z} = (z-1)\overline{(z-1)} \end{cases}$$

Exercice 10 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}z$ forment un triangle équilatéral.

Correction :

D'un point de vue algébrique, en revenant à

$$|z-\mathrm{i}| = |\mathrm{i}z - z| = |\mathrm{i}z-\mathrm{i}| \iff \begin{cases} |z-\mathrm{i}| = |z-1| \\ \sqrt{2}\,|z| = |z-1| \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (z-\mathrm{i})\overline{(z-\mathrm{i})} = (z-1)\overline{(z-1)} \\ 2z\overline{z} = (z-1)\overline{(z-1)} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (1+\mathrm{i})z + (1-\mathrm{i})\overline{z} = 0 \\ z\overline{z} + z + \overline{z} - 1 = 0 \end{cases}$$

Exercice 10 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}\,z$ forment un triangle équilatéral.

Correction :

D'un point de vue algébrique, en revenant à

$$|z-\mathrm{i}| = |\mathrm{i}\,z - z| = |\mathrm{i}\,z - \mathrm{i}| \iff \begin{cases} |z-\mathrm{i}| = |z-1| \\ \sqrt{2}\,|z| = |z-1| \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (z-\mathrm{i})\overline{(z-\mathrm{i})} = (z-1)\overline{(z-1)} \\ 2z\overline{z} = (z-1)\overline{(z-1)} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (1+\mathrm{i})z + (1-\mathrm{i})\overline{z} = 0 \\ z\overline{z} + z + \overline{z} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z - \mathrm{i}\,\overline{z} = 0 \\ z\overline{z} + z + \overline{z} - 1 = 0 \end{cases}$$

Exercice 10 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}\,z$ forment un triangle équilatéral.

Correction :

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (z-\mathrm{i})\overline{(z-\mathrm{i})} = (z-1)\overline{(z-1)} \\ 2z\overline{z} = (z-1)\overline{(z-1)} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (1+\mathrm{i})z + (1-\mathrm{i})\overline{z} = 0 \\ z\overline{z} + z + \overline{z} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} z - \mathrm{i}\,\overline{z} = 0 \\ z\overline{z} + z + \overline{z} - 1 = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} \overline{z} = -\mathrm{i}\,z \\ \mathrm{i}\,z^2 + \mathrm{i}\,z - z - 1 = 0 \end{cases}$$

Exercice 10 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}z$ forment un triangle équilatéral.

Correction :

$$\iff \begin{cases} (1+\mathrm{i})z+(1-\mathrm{i})\overline{z}=0 \\ z\overline{z}+z+\overline{z}-1=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z-\mathrm{i}\,\overline{z}=0 \\ z\overline{z}+z+\overline{z}-1=0 \end{cases} \quad \iff \begin{cases} \overline{z}=-\mathrm{i}\,z \\ \mathrm{i}\,z^2+\mathrm{i}\,z-z-1=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \overline{z}=-\mathrm{i}\,z \\ z^2+(1+\mathrm{i})z-\mathrm{i}=0 \end{cases}$$

Exercice 10 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}\,z$ forment un triangle équilatéral.

Correction :

$$\iff \begin{cases} z - \mathrm{i}\,\overline{z} = 0 \\ z\overline{z} + z + \overline{z} - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \overline{z} = -\mathrm{i}\,z \\ \mathrm{i}\,z^2 + \mathrm{i}\,z - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \overline{z} = -\mathrm{i}\,z \\ z^2 + (1+\mathrm{i})z - \mathrm{i} = 0 \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à trouver les racines de $z^2 + (1+\mathrm{i})z - \mathrm{i}$

Exercice 10 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}z$ forment un triangle équilatéral.

Correction :

Il ne reste plus qu'à trouver les racines de $z^2+(1+\mathrm{i})z-\mathrm{i}$ de discriminant $\Delta = 6\,\mathrm{i} = \left(\sqrt{3}(1+\mathrm{i})\right)^2$.

Exercice 10 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}z$ forment un triangle équilatéral.

Correction :

Il ne reste plus qu'à trouver les racines de $z^2 + (1 + \mathrm{i})z - \mathrm{i}$ de discriminant $\Delta = 6\,\mathrm{i} = \left(\sqrt{3}(1 + \mathrm{i})\right)^2$.

On trouve $z_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{3} - \mathrm{i}\,(1 + \sqrt{3})}{2} = -\dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 + \mathrm{i})$ et $z_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{3} - \mathrm{i}\,(1 - \sqrt{3})}{2} = -\dfrac{1 - \sqrt{3}}{2}(1 + \mathrm{i})$.

Exercice 10 :

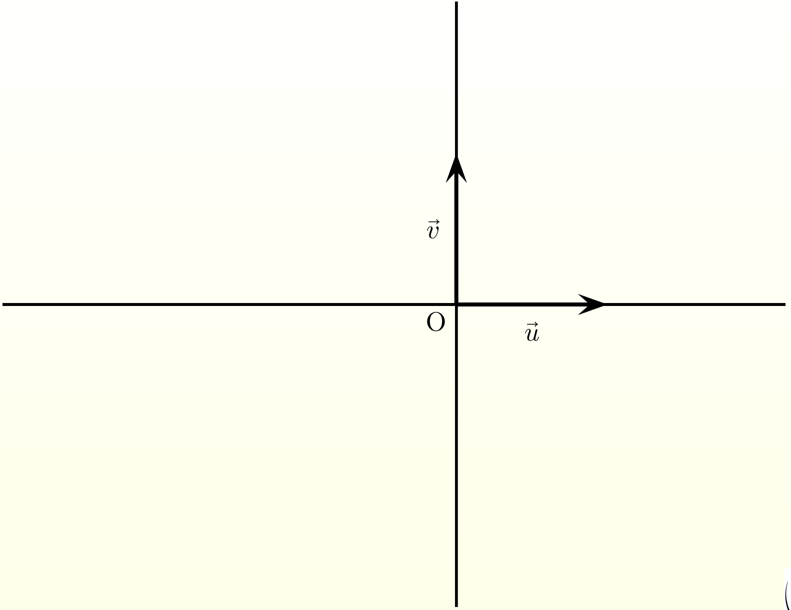
Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}z$ forment un triangle équilatéral.

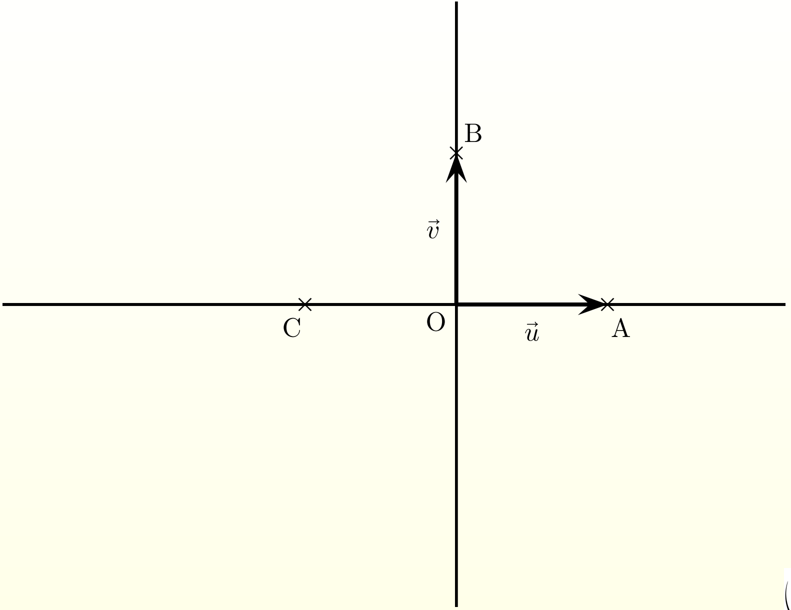
Correction :

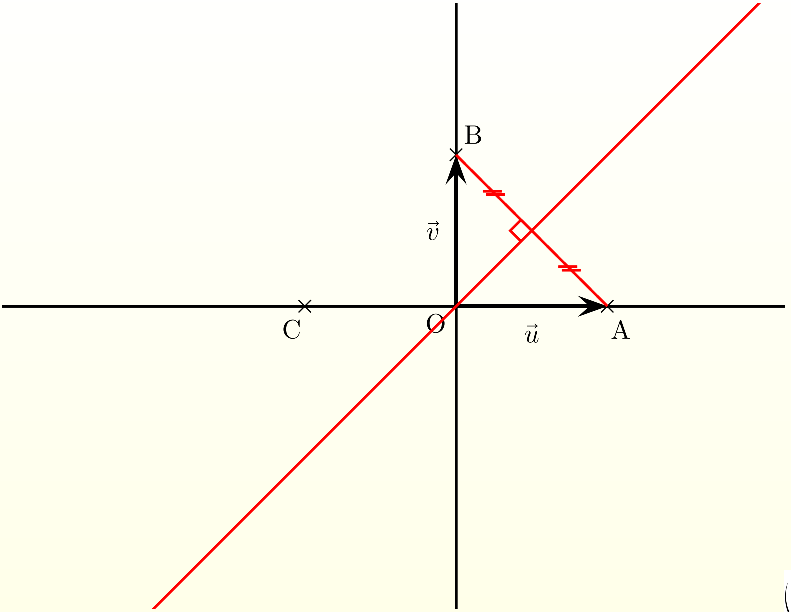
Il ne reste plus qu'à trouver les racines de $z^2+(1+\mathrm{i})z-\mathrm{i}$ de discriminant $\Delta = 6\,\mathrm{i} = \left(\sqrt{3}(1+\mathrm{i})\right)^2$.

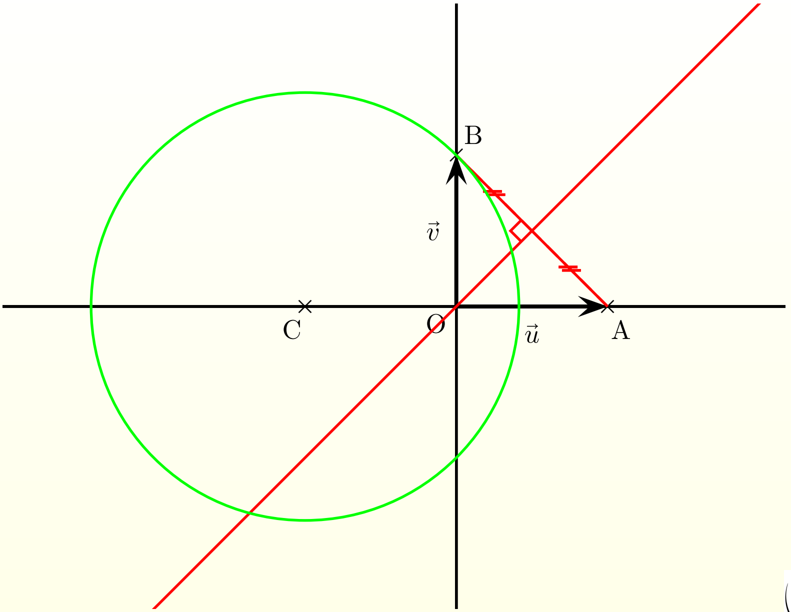
On trouve $z_1 = \dfrac{-1-\sqrt{3}-\mathrm{i}\,(1+\sqrt{3})}{2} = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1+\mathrm{i})$ et
$z_2 = \dfrac{-1+\sqrt{3}-\mathrm{i}\,(1-\sqrt{3})}{2} = -\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}(1+\mathrm{i})$.

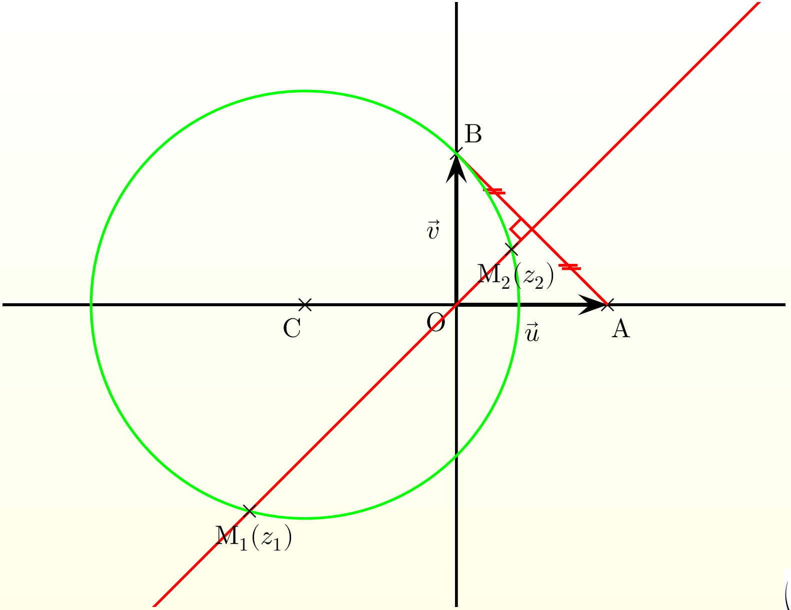
Les points cherchés sont donc $\mathrm{M}_1\,(z_1)$ et $\mathrm{M}_2\,(z_2)$.

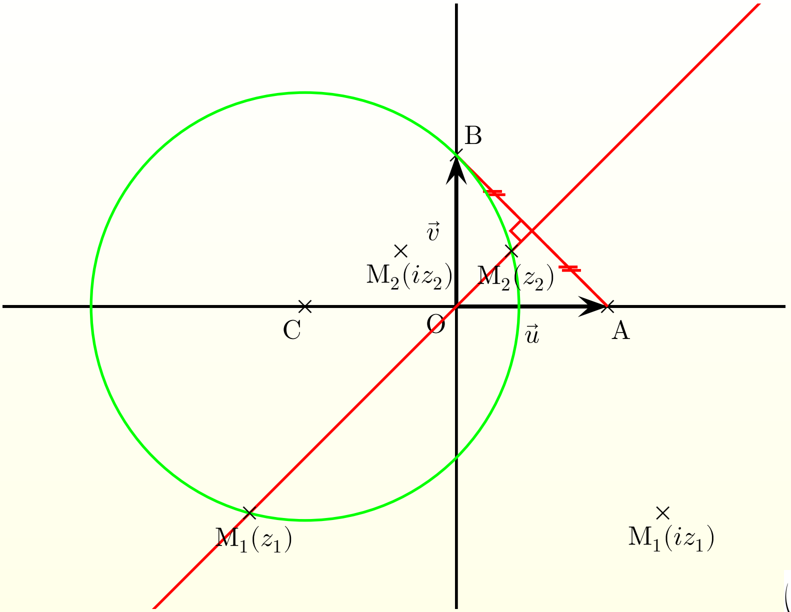

$\vec{v}$
O
$\vec{u}$

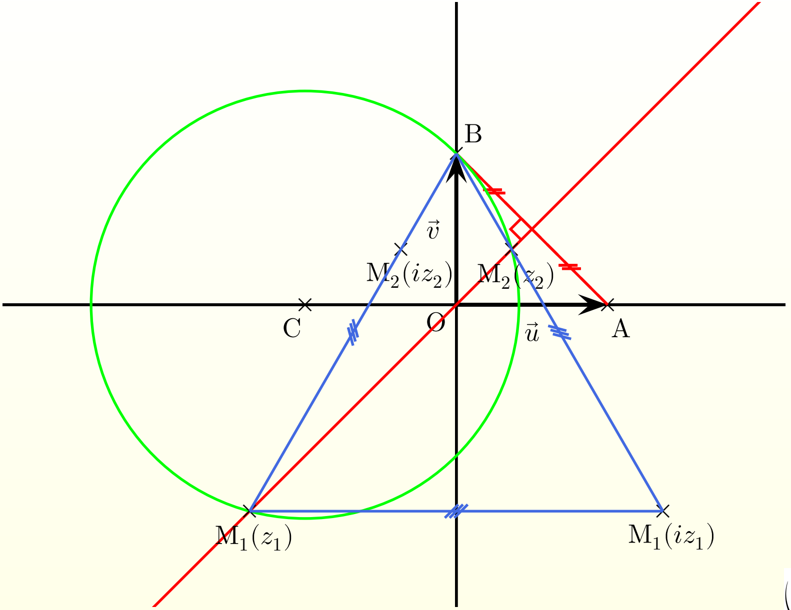

B
$\vec{v}$
C
O
$\vec{u}$
A

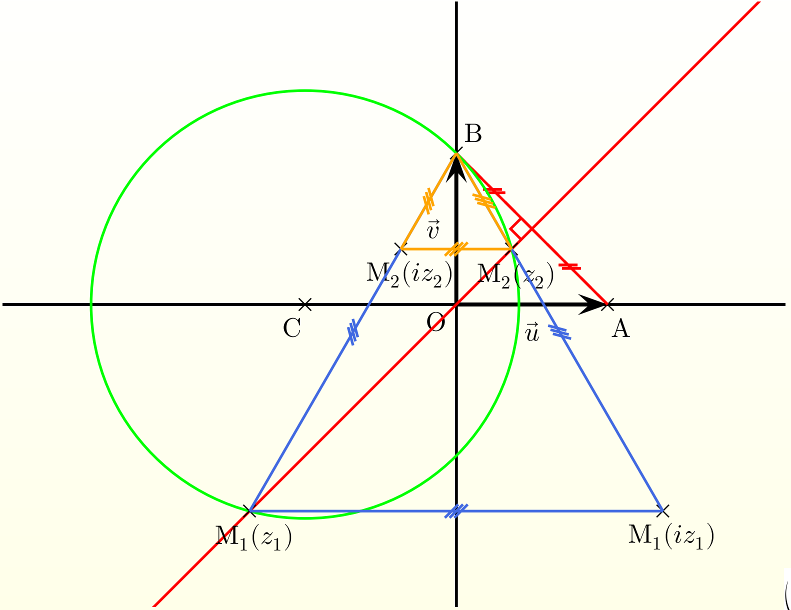

B
$\vec{v}$
C
O
$\vec{u}$
A


B
$\vec{v}$
C
O
$\vec{u}$
A


B
$\vec{v}$
$M_2(z_2)$
C
O
$\vec{u}$
A
$M_1(z_1)$


B
$\vec{v}$
$M_2(iz_2)$
$M_2(z_2)$
C
O
$\vec{u}$
A
$M_1(z_1)$
$M_1(iz_1)$


B
$\vec{v}$
$\mathrm{M}_2(iz_2)$
$\mathrm{M}_2(z_2)$
C
O
$\vec{u}$
A
$\mathrm{M}_1(z_1)$
$\mathrm{M}_1(iz_1)$


B
$\vec{v}$
$M_2(iz_2)$
$M_2(z_2)$
C
O
$\vec{u}$
A
$M_1(z_1)$
$M_1(iz_1)$

Exercice 29 :

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations géométriques données par l'écriture complexe suivante :

1. $z \longmapsto \mathrm{i}\,\overline{z}$

Exercice 29 :

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations géométriques données par l'écriture complexe suivante :

1. $z \longmapsto \mathrm{i}\,\overline{z}$

Exercice 29 :

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations géométriques données par l'écriture complexe suivante :

1. $z \longmapsto \mathrm{i}\,\overline{z}$
2. $z \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{i}} z$

Exercice 29 :

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations géométriques données par l'écriture complexe suivante :

1. $z \longmapsto \mathrm{i}\,\overline{z}$
2. $z \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{i}}\,z$

Correction :

On écrit $\dfrac{1}{i}z = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}\,z$, et on remarque que l'on a affaire à une rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 29 :

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations géométriques données par l'écriture complexe suivante :

1. $z \longmapsto \mathrm{i}\,\overline{z}$
2. $z \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{i}} z$
3. $z \longmapsto z + (2 + \mathrm{i}\,)$

Exercice 29 :

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations géométriques données par l'écriture complexe suivante :

1. $z \longmapsto \mathrm{i}\,\overline{z}$
2. $z \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{i}}z$
3. $z \longmapsto z + (2 + \mathrm{i})$

Correction :

On a ici l'écriture d'une translation de vecteur $(2, 1)$.

Exercice 29 :

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations géométriques données par l'écriture complexe suivante :

1. $z \longmapsto \mathrm{i}\,\overline{z}$
2. $z \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{i}}z$
3. $z \longmapsto z + (2 + \mathrm{i}\,)$
4. $z \longmapsto (1 + \mathrm{i}\,\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - \mathrm{i}\,)$

Exercice 29 :

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations géométriques données par l'écriture complexe suivante :

1. $z \longmapsto \mathrm{i}\,\overline{z}$
2. $z \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{i}} z$
3. $z \longmapsto z + (2 + \mathrm{i}\,)$
4. $z \longmapsto (1 + \mathrm{i}\,\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - \mathrm{i}\,)$

Correction :

L'application de la forme $z \longmapsto az + b$ est une similitude directe. Cherchons son centre qui est le point invariant, c'est-à-dire le point vérifiant $z = (1 + \mathrm{i}\,\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - \mathrm{i}\,)$.

On trouve $z = 1 + i$, le centre de la similitude est donc le point $\mathrm{A}(1, 1)$.

On a de plus $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}$.

Le rapport de la similitude est donc égal à 2, et l'angle à $\dfrac{\pi}{3}$.

Exercice 29 :

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations géométriques données par l'écriture complexe suivante :

1. $z \longmapsto \mathrm{i}\,\overline{z}$
2. $z \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{i}} z$
3. $z \longmapsto z + (2 + \mathrm{i}\,)$
4. $z \longmapsto (1 + \mathrm{i}\,\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - \mathrm{i}\,)$
5. $z \longmapsto z + 3 - \mathrm{i}$

Exercice 29 :

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations géométriques données par l'écriture complexe suivante :

1. $z \longmapsto \mathrm{i}\,\overline{z}$
2. $z \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{i}} z$
3. $z \longmapsto z + (2 + \mathrm{i}\,)$
4. $z \longmapsto (1 + \mathrm{i}\,\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - \mathrm{i}\,)$
5. $z \longmapsto z + 3 - \mathrm{i}$

Correction :

C'est la translation de vecteur $\vec{u}(3, -1)$.

Exercice 29 :

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations géométriques données par l'écriture complexe suivante :

1. $z \longmapsto \mathrm{i}\,\overline{z}$
2. $z \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{i}}z$
3. $z \longmapsto z + (2 + \mathrm{i}\,)$
4. $z \longmapsto (1 + \mathrm{i}\,\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - \mathrm{i}\,)$
5. $z \longmapsto z + 3 - \mathrm{i}$
6. $z \longmapsto (1 + \mathrm{i}\,\tan\alpha)z - \mathrm{i}\,\tan\alpha$, $\alpha \in \left[0\,; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 29 :

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations géométriques données par l'écriture complexe suivante :

1. $z \longmapsto \mathrm{i}\,\overline{z}$
2. $z \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{i}} z$
3. $z \longmapsto z + (2 + \mathrm{i}\,)$
4. $z \longmapsto (1 + \mathrm{i}\,\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - \mathrm{i}\,)$
5. $z \longmapsto z + 3 - \mathrm{i}$
6. $z \longmapsto (1 + \mathrm{i}\,\tan\alpha)z - \mathrm{i}\,\tan\alpha$, $\alpha \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Correction :

Si $\alpha = 0$, la transformation est simplement l'identité. Sinon, on a affaire à une similitude directe. Son point invariant est le nombre complexe z solution de l'équation

$$z = (1 + \mathrm{i}\,\tan\alpha)z - \mathrm{i}\,\tan\alpha \iff z = 1.$$

Le centre de la similitude est donc le point $\mathrm{A}(1, 0)$.

De plus, on a $1 + \mathrm{i}\,\tan\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} \times (\cos\alpha + \mathrm{i}\,\sin\alpha) = \dfrac{1}{\cos\alpha} e^{\mathrm{i}\,\alpha}$.

Ainsi, la similitude est de rapport $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ et d'angle α.

Exercice 29 :

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations géométriques données par l'écriture complexe suivante :

1. $z \longmapsto \mathrm{i}\,\overline{z}$
2. $z \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{i}} z$
3. $z \longmapsto z + (2 + \mathrm{i}\,)$
4. $z \longmapsto (1 + \mathrm{i}\,\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - \mathrm{i}\,)$
5. $z \longmapsto z + 3 - \mathrm{i}$
6. $z \longmapsto (1 + \mathrm{i}\,\tan\alpha)z - \mathrm{i}\,\tan\alpha$, $\alpha \in \left[0\,; \dfrac{\pi}{2}\right[$.
7. $z \longmapsto 2z + 3$

Exercice 29 :

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations géométriques données par l'écriture complexe suivante :

1. $z \longmapsto \mathrm{i}\,\overline{z}$
2. $z \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{i}} z$
3. $z \longmapsto z + (2 + \mathrm{i}\,)$
4. $z \longmapsto (1 + \mathrm{i}\,\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - \mathrm{i}\,)$
5. $z \longmapsto z + 3 - \mathrm{i}$
6. $z \longmapsto (1 + \mathrm{i}\,\tan\alpha)z - \mathrm{i}\,\tan\alpha$, $\alpha \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.
7. $z \longmapsto 2z + 3$

Correction :

$\omega = 2\omega + 3 \iff \omega = -3$. C'est l'homothétie de rapport 2 et de centre $\Omega(-3, 0)$.

Exercice 29 :

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations géométriques données par l'écriture complexe suivante :

1. $z \longmapsto \mathrm{i}\,\overline{z}$
2. $z \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{i}} z$
3. $z \longmapsto z + (2 + \mathrm{i}\,)$
4. $z \longmapsto (1 + \mathrm{i}\,\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - \mathrm{i}\,)$
5. $z \longmapsto z + 3 - \mathrm{i}$
6. $z \longmapsto (1 + \mathrm{i}\,\tan\alpha)z - \mathrm{i}\,\tan\alpha$, $\alpha \in \left[0\,; \dfrac{\pi}{2}\right[$.
7. $z \longmapsto 2z + 3$
8. $z \longmapsto \mathrm{i}\,z + 1$

Exercice 29 :

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations géométriques données par l'écriture complexe suivante :

1. $z \longmapsto \mathrm{i}\,\overline{z}$
2. $z \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{i}}z$
3. $z \longmapsto z + (2 + \mathrm{i}\,)$
4. $z \longmapsto (1 + \mathrm{i}\,\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - \mathrm{i}\,)$
5. $z \longmapsto z + 3 - \mathrm{i}$
6. $z \longmapsto (1 + \mathrm{i}\,\tan\alpha)z - \mathrm{i}\,\tan\alpha$, $\alpha \in \left[0\,; \dfrac{\pi}{2}\right[$.
7. $z \longmapsto 2z + 3$
8. $z \longmapsto \mathrm{i}\,z + 1$

Correction :

$\omega = \mathrm{i}\,\omega + 1 \iff \omega = \dfrac{1}{2}(1 + \mathrm{i}\,)$.

Comme $i = e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}$, c'est la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et de centre $\Omega\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Exercice 29 :

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations géométriques données par l'écriture complexe suivante :

1. $z \longmapsto \mathrm{i}\,\overline{z}$
2. $z \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{i}} z$
3. $z \longmapsto z + (2 + \mathrm{i}\,)$
4. $z \longmapsto (1 + \mathrm{i}\,\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - \mathrm{i}\,)$
5. $z \longmapsto z + 3 - \mathrm{i}$
6. $z \longmapsto (1 + \mathrm{i}\,\tan\alpha)z - \mathrm{i}\,\tan\alpha$, $\alpha \in \left[0\,; \dfrac{\pi}{2}\right[$.
7. $z \longmapsto 2z + 3$
8. $z \longmapsto \mathrm{i}\,z + 1$
9. $z \longmapsto (1 - \mathrm{i}\,)z + 2 + \mathrm{i}$

Exercice 29 :

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations géométriques données par l'écriture complexe suivante :

1. $z \longmapsto \mathrm{i}\,\overline{z}$
2. $z \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{i}}z$
3. $z \longmapsto z + (2 + \mathrm{i}\,)$
4. $z \longmapsto (1 + \mathrm{i}\,\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - \mathrm{i}\,)$
5. $z \longmapsto z + 3 - \mathrm{i}$
6. $z \longmapsto (1 + \mathrm{i}\,\tan\alpha)z - \mathrm{i}\,\tan\alpha$, $\alpha \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.
7. $z \longmapsto 2z + 3$
8. $z \longmapsto \mathrm{i}\,z + 1$
9. $z \longmapsto (1 - \mathrm{i}\,)z + 2 + \mathrm{i}$

Correction :

$\omega = (1 - \mathrm{i}\,)\omega + 2 + \mathrm{i} \iff \omega = 1 - 2\,\mathrm{i}$.

Comme $1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}$, c'est la similitude de centre $\Omega(1, -2)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 28 :

Soit ABC un triangle du plan affine euclidien. On construit à l'extérieur de ce triangle les trois triangles équilatéraux de base [AB], [AC] et [BC].

Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

Exercice 28 :

Soit ABC un triangle du plan affine euclidien. On construit à l'extérieur de ce triangle les trois triangles équilatéraux de base [AB], [AC] et [BC].

Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

Correction :

En supposant que ABC est direct, on calcule les affixes des nouveaux sommets en utilisant l'exercice précédent puis les affixes des centre de gravité (moyenne des trois sommets), puis, soit on réapplique le même exercice soit on montre que chaque sommet du nouveau triangle est obtenu par rotation d'un sommet par une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ de centre le troisième sommet.

Exercice 28 :

Soit ABC un triangle du plan affine euclidien. On construit à l'extérieur de ce triangle les trois triangles équilatéraux de base [AB], [AC] et [BC].

Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

Correction :

Soient $\mathrm{A}'(a')$, $\mathrm{B}'(b')$ et $\mathrm{C}'(c')$ les sommets des triangles équilatéraux respectivement opposés à $\mathrm{A}(a)$, $\mathrm{B}(b)$ et $\mathrm{C}(c)$.

Exercice 28 :

Soit ABC un triangle du plan affine euclidien. On construit à l'extérieur de ce triangle les trois triangles équilatéraux de base [AB], [AC] et [BC].

Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

Correction :

Soient $\mathrm{A}'(a')$, $\mathrm{B}'(b')$ et $\mathrm{C}'(c')$ les sommets des triangles équilatéraux respectivement opposés à $\mathrm{A}(a)$, $\mathrm{B}(b)$ et $\mathrm{C}(c)$.

- A' est l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Ce qui s'écrit :

$$a' - c = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}(b - c).$$

Exercice 28 :

Soit ABC un triangle du plan affine euclidien. On construit à l'extérieur de ce triangle les trois triangles équilatéraux de base [AB], [AC] et [BC].

Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

Correction :

Soient $A'(a')$, $B'(b')$ et $C'(c')$ les sommets des triangles équilatéraux respectivement opposés à $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$.

- A' est l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Ce qui s'écrit :

$$a' - c = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - c).$$

- De même pour B', image de C par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Ce qui s'écrit :

$$b' - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - a).$$

Exercice 28 :

Soit ABC un triangle du plan affine euclidien. On construit à l'extérieur de ce triangle les trois triangles équilatéraux de base [AB], [AC] et [BC].

Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

Correction :

Soient $A'(a')$, $B'(b')$ et $C'(c')$ les sommets des triangles équilatéraux respectivement opposés à $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$.

- A' est l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Ce qui s'écrit :

$$a' - c = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}(b - c).$$

- De même pour B', image de C par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Ce qui s'écrit :

$$b' - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}(c - a).$$

- Et C', image de A par la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Ce qui s'écrit :

$$c' - b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}(a - b).$$

Exercice 28 :

Soit ABC un triangle du plan affine euclidien. On construit à l'extérieur de ce triangle les trois triangles équilatéraux de base [AB], [AC] et [BC].

Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

Correction :

Soient $G_{A'}$ $(g_{A'})$, $G_{B'}$ $(g_{B'})$ et $G_{C'}$ $(g_{C'})$ les centre de gravité respectifs des triangles $A'BC$, $AB'C$ et ABC'. On a :

Exercice 28 :

Soit ABC un triangle du plan affine euclidien. On construit à l'extérieur de ce triangle les trois triangles équilatéraux de base [AB], [AC] et [BC].

Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

Correction :

Soient $\mathrm{G}_{\mathrm{A}'}\,(g_{\mathrm{A}'})$, $\mathrm{G}_{\mathrm{B}'}\,(g_{\mathrm{B}'})$ et $\mathrm{G}_{\mathrm{C}'}\,(g_{\mathrm{C}'})$ les centre de gravité respectifs des triangles $\mathrm{A}'\mathrm{BC}$, $\mathrm{AB}'\mathrm{C}$ et ABC'. On a :

$$g_{\mathrm{A}'} = \frac{1}{3}\left(c + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}(b - c) + b + c\right)$$

Exercice 28 :

Soit ABC un triangle du plan affine euclidien. On construit à l'extérieur de ce triangle les trois triangles équilatéraux de base [AB], [AC] et [BC].

Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

Correction :

Soient $\mathrm{G}_{\mathrm{A}'}\,(g_{\mathrm{A}'})$, $\mathrm{G}_{\mathrm{B}'}\,(g_{\mathrm{B}'})$ et $\mathrm{G}_{\mathrm{C}'}\,(g_{\mathrm{C}'})$ les centre de gravité respectifs des triangles $\mathrm{A}'\mathrm{BC}$, $\mathrm{AB}'\mathrm{C}$ et ABC'. On a :

$$\begin{aligned} g_{\mathrm{A}'} &= \frac{1}{3}\left(c + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}(b-c) + b + c\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}\right)b + \left(2 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}\right)c\right) \end{aligned}$$

Exercice 28 :

Soit ABC un triangle du plan affine euclidien. On construit à l'extérieur de ce triangle les trois triangles équilatéraux de base [AB], [AC] et [BC].

Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

Correction :

Soient $G_{A'}\,(g_{A'})$, $G_{B'}\,(g_{B'})$ et $G_{C'}\,(g_{C'})$ les centre de gravité respectifs des triangles $A'BC$, $AB'C$ et ABC'. On a :

$$\begin{aligned} g_{A'} &= \frac{1}{3}\left(c + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(b-c) + b + c\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)b + \left(2 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)c\right) \end{aligned}$$

Exercice 28 :

Soit ABC un triangle du plan affine euclidien. On construit à l'extérieur de ce triangle les trois triangles équilatéraux de base [AB], [AC] et [BC].

Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

Correction :

Soient $\mathrm{G}_{\mathrm{A}'}\left(g_{\mathrm{A}'}\right)$, $\mathrm{G}_{\mathrm{B}'}\left(g_{\mathrm{B}'}\right)$ et $\mathrm{G}_{\mathrm{C}'}\left(g_{\mathrm{C}'}\right)$ les centre de gravité respectifs des triangles $\mathrm{A'BC}$, $\mathrm{AB'C}$ et $\mathrm{ABC'}$. On a :

$$g_{\mathrm{A}'} = \frac{1}{3}\left(\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)b + \left(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)c\right)$$
$$g_{\mathrm{B}'} = \frac{1}{3}\left(\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)c + \left(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)a\right)$$
$$g_{\mathrm{C}'} = \frac{1}{3}\left(\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)a + \left(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)b\right).$$

Exercice 28 :

Soit ABC un triangle du plan affine euclidien. On construit à l'extérieur de ce triangle les trois triangles équilatéraux de base [AB], [AC] et [BC].

Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

Correction :

$$g_{A'} = \frac{1}{3}\left(\left(1 + e^{i\frac{\pi}{3}}\right) b + \left(1 + e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) c\right)$$
$$g_{B'} = \frac{1}{3}\left(\left(1 + e^{i\frac{\pi}{3}}\right) c + \left(1 + e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) a\right)$$
$$g_{C'} = \frac{1}{3}\left(\left(1 + e^{i\frac{\pi}{3}}\right) a + \left(1 + e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) b\right).$$

En utilisant l'exercice précédent, on peut vérifier que

$$g_{A'}\, j^2 + g_{B'}\, j + g_{C'} = 0 \quad \text{ou} \quad g_{A'}\, \overline{j}^2 + g_{B'}\, \overline{j} + g_{C'} = 0.$$

Exercice 28 :

Soit ABC un triangle du plan affine euclidien. On construit à l'extérieur de ce triangle les trois triangles équilatéraux de base [AB], [AC] et [BC].

Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

Correction :

$$\begin{aligned} g_{\mathrm{A}'} &= \frac{1}{3}\left(\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}\right)b+\left(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}\right)c\right) \\ g_{\mathrm{B}'} &= \frac{1}{3}\left(\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}\right)c+\left(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}\right)a\right) \\ g_{\mathrm{C}'} &= \frac{1}{3}\left(\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}\right)a+\left(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}\right)b\right). \end{aligned}$$

En utilisant, l'exercice précédent, on peut vérifier que

$$g_{\mathrm{A}'}\,\mathrm{j}^2+g_{\mathrm{B}'}\,\mathrm{j}+g_{\mathrm{C}'}=0 \quad \text{ou} \quad g_{\mathrm{A}'}\,\overline{\mathrm{j}}^2+g_{\mathrm{B}'}\,\overline{\mathrm{j}}+g_{\mathrm{C}'}=0.$$

ou, par exemple, que $\mathrm{G}_{\mathrm{C}'}$ est l'image de $\mathrm{G}_{\mathrm{B}'}$ par la rotation de centre $\mathrm{G}_{\mathrm{A}'}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ en vérifiant que :

$$g_{\mathrm{C}'}-g_{\mathrm{B}'}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}\left(g_{\mathrm{A}'}-g_{\mathrm{B}'}\right).$$

Exercice 28 :

Soit ABC un triangle du plan affine euclidien. On construit à l'extérieur de ce triangle les trois triangles équilatéraux de base [AB], [AC] et [BC].

Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

Correction :

$$g_{A'} = \frac{1}{3}\left(\left(1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)b + \left(1+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)c\right)$$
$$g_{B'} = \frac{1}{3}\left(\left(1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)c + \left(1+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)a\right)$$
$$g_{C'} = \frac{1}{3}\left(\left(1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)a + \left(1+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)b\right).$$

En utilisant l'exercice précédent, on peut vérifier que

$$g_{A'}\,j^2 + g_{B'}\,j + g_{C'} = 0 \quad \text{ou} \quad g_{A'}\,\overline{j}^2 + g_{B'}\,\overline{j} + g_{C'} = 0.$$

ou, par exemple, que $G_{C'}$ est l'image de $G_{B'}$ par la rotation de centre $G_{A'}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$ en vérifiant que :

$$g_{C'} - g_{B'} = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(g_{A'} - g_{B'}\right).$$

C'est le cas...