Nombres Complexes

Une seule réponse exacte par question.

1 La valeur de $\text{cotan}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ est

(a) ☐ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) ☐ -1 (c) ☐ $-\sqrt{3}$ (d) ☐ $\sqrt{3}$

2 Sachant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, le réel $\cos\frac{\pi}{12}$ vaut

(a) ☐ $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ (b) ☐ $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$ (c) ☐ $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$ (d) ☐ $\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}$

3 La formule de Moivre affirme que pour tout réel x :

(a) ☐ $(\cos(x)+i\sin(x))^n = \cos(nx)+i\sin(nx)$
(b) ☐ $(\cos(x)+\sin(x))^n = \cos(nx)+\sin(nx)$
(c) ☐ $2\cos(x) = e^{ix}+e^{-ix}$
(d) ☐ $\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$

4 Soit z un nombre complexe non nul tel que $z+\frac{1}{z}$ soit réel. Alors

(a) ☐ z est un réel
(b) ☐ z est un réel ou de module 1
(c) ☐ z est un réel ou imaginaire pur
(d) ☐ z est un réel ou égal à i ou $-i$

5 Soit $(z,u) \in \mathbb{C}^2$ avec $u^2 = z$. Quand peut-on dire que $|u| < |z|$?

(a) ☐ c'est toujours le cas
(b) ☐ lorsque z n'est pas nul
(c) ☐ lorsque $0 < |z| < 1$
(d) ☐ lorsque $|z| > 1$

6 Que dire d'un nombre complexe z dont les deux racines carrées sont conjuguées ?

(a) ☐ c'est toujours le cas
(b) ☐ cela n'est pas possible
(c) ☐ z est un imaginaire pur
(d) ☐ z est un nombre réel négatif

7 Combien y a-t-il de nombres complexes z tels que $|z-i| \leqslant 1$ et $|z-2| \leqslant 1$?

(a) ☐ aucun
(b) ☐ un seul
(c) ☐ deux complexes conjugués
(d) ☐ une infinité

8 Soit $(z,z') \in \mathbb{C}^2$. Si $|z| = 1$ et $|z'| = 2$, alors $|z'-z|$ est

(a) ☐ égal à 1
(b) ☐ compris entre 1 et $\sqrt{5}$
(c) ☐ compris entre 1 et 3
(d) ☐ inférieur à -1

9 Laquelle des équations suivantes admet deux solutions complexes conjuguées ?

(a) ☐ $z^2+3iz+4=0$
(b) ☐ $z^2+3iz-4=0$
(c) ☐ $z^2+3z+4=0$
(d) ☐ $z^2+3z-4=0$

10 Soient a, b deux nombres complexes, et soit z_1 la racine de l'équation du second degré $z^2 - 2az + b = 0$ qui a le plus grand module. Alors

- a ☐ $|z_1| \leqslant |a|$
- b ☐ $|z_1| \leqslant |b|$
- c ☐ $|z_1| \geqslant |a|$
- d ☐ $|z_1| \geqslant |b|$

11 Si x est un nombre réel, $(e^{ix} - e^{-ix})^6$ vaut

- a ☐ $-64\sin^6(x)$
- b ☐ $64\sin^6(x)$
- c ☐ $64\cos^6(x)$
- d ☐ $64\sin(6x)$

12 Le nombre complexe $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ est une racine sixième de

- a ☐ 2
- b ☐ 12
- c ☐ 64
- d ☐ $\frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{18}}$

13 Si x est un réel non nul modulo π, le quotient $\dfrac{e^{2ix}+1}{e^{2ix}-1}$ vaut

- a ☐ $i\tan(x)$
- b ☐ $\text{cotan}\,(x)$
- c ☐ $i\text{cotan}\,(x)$
- d ☐ $-i\text{cotan}\,(x)$

14 Quelle est la valeur de $\cos^2 \dfrac{\pi}{8}$

- a ☐ $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$
- b ☐ $\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$
- c ☐ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- d ☐ $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

15 Si $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$ alors

- a ☐ $x = \dfrac{\pi}{6} \quad [\pi]$
- b ☐ $x = \dfrac{\pi}{6} \quad [2\pi]$ ou $x = -\dfrac{\pi}{6} \quad [2\pi]$
- c ☐ $x = \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$ ou $x = \dfrac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$
- d ☐ $x = \dfrac{\pi}{6} \quad [2\pi]$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$

16 Soit x un réel tel que $\tan \dfrac{x}{2} = \sqrt{2}$. Alors $\cos(x)$ vaut

- a ☐ $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
- b ☐ $-\dfrac{1}{3}$
- c ☐ $\dfrac{1}{3}$
- d ☐ on ne peut pas savoir

17 Si x est un réel dans $]0, 2\pi[$, le nombre complexe $\dfrac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1}$ est égal à

- a ☐ $e^{i\frac{n-1}{2}x}\dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$
- b ☐ $e^{i\frac{n-1}{2}x}\dfrac{\cos\left(\frac{nx}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$
- c ☐ $e^{i\frac{n+1}{2}x}\dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$
- d ☐ $ie^{i\frac{nx}{2}}\dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

18 Soit $z = re^{it}$ un nombre complexe, avec r positif. Le module de e^z est

- a ☐ e^r
- b ☐ $e^{r\cos(t)}$
- c ☐ $e^{r\sin(t)}$
- d ☐ $re^{|t|}$

19 Soit $z = re^{it}$ un nombre complexe, avec r positif. Un argument de e^z est

- a ☐ $\sin(t)$
- b ☐ $r\sin(t)$
- c ☐ rt
- d ☐ $r\cos(t)$

20 La fonction $t \mapsto (e^{it})^2$ est périodique de période

- a) ☐ 1
- b) ☐ $\dfrac{\pi}{2}$
- c) ☐ π
- d) ☐ elle n'est pas périodique

21 Si a et b sont deux réels, on a $e^{ia} + e^{ib} = 0$ pour

- a) ☐ $a = -b \quad [2\pi]$
- b) ☐ $a = -b \quad [\pi]$
- c) ☐ $a = b + \pi \quad [2\pi]$
- d) ☐ aucune valeur de a et b

22 Si a, b sont deux réels, le module de $e^{ia} + e^{ib}$ est

- a) ☐ 2
- b) ☐ $2\left|\cos\dfrac{a+b}{2}\right|$
- c) ☐ $2\left|\cos\dfrac{a-b}{2}\right|$
- d) ☐ $e^{i\frac{a+b}{2}}$

23 Si a, b sont deux réels, un argument de $e^{ia} + e^{ib}$ (lorsque ce nombre est non nul) est égal à

- a) ☐ $\dfrac{a+b}{2} \quad [\pi]$
- b) ☐ $\dfrac{a+b}{2} \quad [2\pi]$
- c) ☐ $\pm\dfrac{a+b}{2} \quad [2\pi]$
- d) ☐ $a + b \quad [2\pi]$

24 Les solutions de l'équation $z^6 = \overline{z}^2$ sont

- a) ☐ les racines quatrièmes de l'unité
- b) ☐ les racines quatrièmes de l'unité et 0
- c) ☐ les racines huitièmes de l'unité
- d) ☐ les racines huitièmes de l'unité et 0