Primitives et calculs d'intégrales

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Séance animée de TD

Sommaire I

ATTENTION

Il est entendu que toutes les primitives, sauf mention contraire, seront obtenues à une constante réelle additive près.

I. Primitives par « dédérivation »

Exercice 1 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle I possible :

1. $\displaystyle\int^x \frac{\ln^3(2t+4)}{t+2}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int^x (t-2)(t^2-4t+1)^5\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int^x \frac{2t-3}{(t^2-3t+10)^4}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int^x \frac{2}{\sqrt{1-5t}}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int^x \frac{t}{\sqrt{3t^2+2}}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int^x \frac{\cos\left(\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

I. Primitives par « dédérivation »

Exercice 1 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

1. $\displaystyle\int^x \frac{\ln^3(2t+4)}{t+2}\,\mathrm{d}t$

Correction :

1. La primitive n'existe que si $t \longmapsto \dfrac{\ln^3(2t+4)}{t+2}$ est continue donc sur tout intervalle I inclus dans $]-2\,;+\infty[$.

Exercice 1 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

1. $\displaystyle\int^x \frac{\ln^3(2t+4)}{t+2}\,\mathrm{d}t$

Correction :

1. $\displaystyle\int^x \frac{\ln^3(2t+4)}{t+2}\,\mathrm{d}t = \Big[\quad ? \quad\Big]^x$

I. Primitives par « dédérivation »

Exercice 1 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

1. $\displaystyle\int^x \frac{\ln^3(2t+4)}{t+2}\,\mathrm{d}t$

Correction :

1. $\displaystyle\int^x \frac{\ln^3(2t+4)}{t+2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4}\ln^4(2t+4)\right]^x$ *on tente, on vérifie en dérivant...*

I. Primitives par « dédérivation »

Exercice 1 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

1. $\displaystyle\int^x \frac{\ln^3(2t+4)}{t+2}\,\mathrm{d}t$

Correction :

1. $\displaystyle\int^x \frac{\ln^3(2t+4)}{t+2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\ln^4(2x+4)$ *on corrige, on vérifie.*

I. Primitives par « dédérivation »

Exercice 1 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

2. $\displaystyle\int^x (t-2)(t^2-4t+1)^5\,\mathrm{d}t$

Correction :

2. Clairement $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$.

I. Primitives par « dédérivation »

Exercice 1 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

2. $\displaystyle\int^x (t-2)(t^2-4t+1)^5 \,\mathrm{d}t$

Correction :

2. $\displaystyle\int^x (t-2)(t^2-4t+1)^5 \,\mathrm{d}t = \Big[\quad ? \quad \Big]^x$

I. Primitives par « dédérivation »

Exercice 1 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

2. $\displaystyle\int^x (t-2)(t^2-4t+1)^5\,\mathrm{d}t$

Correction :

2. $\displaystyle\int^x (t-2)(t^2-4t+1)^5\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{6}(t^2-4t+1)^6\right]^x$ on tente, on vérifie en dérivant...

I. Primitives par « dédérivation »

Exercice 1 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

❷ $\displaystyle\int^x (t-2)(t^2-4t+1)^5 \,\mathrm{d}t$

Correction :

❷ $\displaystyle\int^x (t-2)(t^2-4t+1)^5 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{12}(x^2-4x+1)^6$ on corrige, on vérifie.

Exercice 1 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

3. $\displaystyle\int^x \frac{2t-3}{(t^2-3t+10)^4}\,\mathrm{d}t$

Correction :

3. Comme $\Delta = 9 - 40 < 0$, le dénominateur ne s'annule jamais donc $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$.

I. Primitives par « dédérivation »

Exercice 1 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

3. $\displaystyle\int^x \frac{2t-3}{(t^2-3t+10)^4}\,\mathrm{d}t$

Correction :

3. $\displaystyle\int^x \frac{2t-3}{(t^2-3t+10)^4}\,\mathrm{d}t = \Big[\quad ? \quad\Big]^x$

I. Primitives par « dédérivation »

Exercice I :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

3. $\displaystyle\int^x \frac{2t-3}{(t^2-3t+10)^4}\,\mathrm{d}t$

Correction :

3. $\displaystyle\int^x \frac{2t-3}{(t^2-3t+10)^4}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{?}{3}\,\frac{1}{(t^2-3t+10)^3}\right]^x$ ...

Exercice 1 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

3. $\displaystyle\int^x \frac{2t-3}{(t^2-3t+10)^4}\,\mathrm{d}t$

Correction :

3. $\displaystyle\int^x \frac{2t-3}{(t^2-3t+10)^4}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3(x^2-3x+10)^3}.$

I. Primitives par « dédérivation »

Exercice I :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

4. $\displaystyle\int^x \frac{2}{\sqrt{1-5t}}\,\mathrm{d}t$

Correction :

4. $\mathrm{I} \subset \left]-\infty\,;\frac{1}{5}\right[$.

I. Primitives par « dédérivation »

Exercice 1 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

4. $\displaystyle\int^x \frac{2}{\sqrt{1-5t}}\,\mathrm{d}t$

Correction :

4. $\displaystyle\int^x \frac{2}{\sqrt{1-5t}}\,\mathrm{d}t = \Big[\dots\ \sqrt{1-5t}\Big]^x \qquad \dots$

I. Primitives par « dédérivation »

Exercice I :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

4. $\displaystyle\int^x \frac{2}{\sqrt{1-5t}}\,\mathrm{d}t$

Correction :

4. $\displaystyle\int^x \frac{2}{\sqrt{1-5t}}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{5}\sqrt{1-5x}.$

Exercice 1 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

5. $\displaystyle\int^x \frac{t}{\sqrt{3t^2+2}}\,\mathrm{d}t$

Correction :

5. $3t^2+2>0$ donc $\mathrm{I}\subset\mathbb{R}$.

Exercice I :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

5. $\displaystyle\int^x \frac{t}{\sqrt{3t^2+2}}\,\mathrm{d}t$

Correction :

5. $\displaystyle\int^x \frac{t}{\sqrt{3t^2+2}}\,\mathrm{d}t = \Big[\ldots\sqrt{3t^2+2}\Big]^x \qquad \ldots$

Exercice 1 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

5. $\displaystyle\int^x \frac{t}{\sqrt{3t^2+2}}\,\mathrm{d}t$

Correction :

5. $\displaystyle\int^x \frac{t}{\sqrt{3t^2+2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\sqrt{3x^2+2}.$

I. Primitives par « dédérivation »

Exercice 1 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

6. $\displaystyle\int^x \frac{\cos\left(\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

Correction :

6. $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}_+^*$.

I. Primitives par « dédérivation »

Exercice 1 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

6. $$\int^x \frac{\cos\left(\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

Correction :

6. $$\int^x \frac{\cos\left(\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \left[\ldots\ \sin\left(\sqrt{t}\right)\right]^x \qquad \ldots$$

Exercice 1 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

6. $\displaystyle\int^x \frac{\cos\left(\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

Correction :

6. $\displaystyle\int^x \frac{\cos\left(\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\sin\left(\sqrt{x}\right).$

Exercice 2 (Fonctions trigonométriques) :

Déterminer les primitives suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $\displaystyle\int^x \cos^4(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int^x \mathrm{ch}^3(t)\,\mathrm{d}t$

I. Primitives par « dédérivation »

Exercice 2 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

1. $\displaystyle\int^x \cos^4(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t$

Correction :

1. Il est clair que I sera un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

I. Primitives par « dédérivation »

Exercice 2 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

1. $\displaystyle\int^x \cos^4(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t$

Correction :

1. On linéarise intelligemment :

$$\begin{aligned}
\cos^4(t)\sin^2(t) &= \frac{1}{4}\sin^2(2t)\cos^2(t) = \frac{1}{4}\,\frac{1-\cos(4t)}{2}\,\frac{1+\cos(2t)}{2}\\
&= \frac{1}{16}\left(1+\cos(2t)-\cos(4t)-\cos(4t)\cos(2t)\right)\\
&= \frac{1}{16}\left(1+\cos(2t)-\cos(4t)-\frac{1}{2}\cos(6t)-\frac{1}{2}\cos(2t)\right)\\
&= \frac{1}{16}\left(1+\frac{1}{2}\cos(2t)-\cos(4t)-\frac{1}{2}\cos(6t)\right).
\end{aligned}$$

I. Primitives par « dédérivation »

Exercice 2 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

1. $\displaystyle\int^x \cos^4(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t$

Correction :

1. D'où, $$\int^x \cos^4(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{16}\int^x \left(1+\frac{1}{2}\cos(2t)-\cos(4t)-\frac{1}{2}\cos(6t)\right)\mathrm{d}t$$ $$= \frac{1}{16}\left(x+\frac{1}{4}\sin(2x)-\frac{1}{4}\sin(4x)-\frac{1}{12}\sin(6x)\right).$$

Exercice 2 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

2. $\displaystyle\int^x \operatorname{ch}^3(t)\,\mathrm{d}t$

Correction :

2. Il est clair que I sera un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

Exercice 2 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

2. $\displaystyle\int^x \operatorname{ch}^3(t)\,\mathrm{d}t$

Correction :

2. On linéarise intelligement :

$$\begin{aligned}\int^x \operatorname{ch}^3(t)\,\mathrm{d}t &= \int^x \operatorname{ch}(t)(1+\operatorname{sh}^2(t))\,\mathrm{d}t\\ &= \int^x \operatorname{ch}(t)\,\mathrm{d}t + \int^x \operatorname{ch}(t)\operatorname{sh}^2(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \operatorname{sh}(x) + \frac{1}{3}\operatorname{sh}^3(x).\end{aligned}$$

I. Primitives par « dédérivation »

Exercice 3 (Fonctions complexes) :

Déterminer les primitives suivantes et préciser l'intervalle maximal d'intégration le cas échéant :

❶ $\displaystyle\int^x \frac{1}{(1+\mathrm{i}+t)^2}\,\mathrm{d}t$

❷ $\displaystyle\int^x \frac{1}{1+\mathrm{i}+t}\,\mathrm{d}t$

❸ $\displaystyle\int^x \mathrm{ch}\,(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$

I. Primitives par « dédérivation »

Exercice 3 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

1. $\displaystyle\int^x \frac{1}{(1+\mathrm{i}+t)^2}\,\mathrm{d}t$

Correction :

1. Comme $1+\mathrm{i} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, le dénominateur n'est pas prêt de s'annuler donc I sera un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

I. Primitives par « dédérivation »

Exercice 3 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

1. $\displaystyle\int^{x} \frac{1}{(1+\mathrm{i}+t)^2}\,\mathrm{d}t$

Correction :

1. $$\int^{x} \frac{\mathrm{d}t}{(1+\mathrm{i}+t)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{1+i+x}.$$

Exercice 3 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

2. $$\int^x \frac{1}{1+\mathrm{i}+t}\,\mathrm{d}t$$

Correction :

2. Comme $1+\mathrm{i} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, le dénominateur n'est pas prêt de s'annuler donc I sera un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

Exercice 3 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

❷ $$\int^x \frac{1}{1+\mathrm{i}+t}\,\mathrm{d}t$$

Correction :

❷

$$\begin{aligned}
\int^x \frac{\mathrm{d}t}{1+\mathrm{i}+t} &= \int \frac{(1+t)-\mathrm{i}}{\left|1+t+\mathrm{i}\right|^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int^x \frac{1+t}{(1+t)^2+1}\,\mathrm{d}t - \mathrm{i}\int^x \frac{1}{(1+t)^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| - \mathrm{i}\arctan(1+x).
\end{aligned}$$

I. Primitives par « dédérivation »

Exercice 4 (Fonctions complexes) :

Déterminer les primitives suivantes et préciser l'intervalle maximal d'intégration le cas échéant :

3. $\displaystyle\int^x \mathrm{ch}\,(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$

Correction :

3. Il est clair que I sera un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

I. Primitives par « dédérivation »

Correction :

❸
$$\begin{aligned}\int^x \operatorname{ch}(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t &= \int^x \left(\frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\right)\operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int^x \operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} + \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\int^x \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} + \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\frac{1}{1+\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} - \frac{1}{1-\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} - \mathrm{e}^{-x+\mathrm{i}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\mathrm{e}^x\sin\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right) - \mathrm{e}^{-x}\sin\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\mathrm{e}^x\sin\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right) - \mathrm{e}^{-x}\cos\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x)\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x)\left(\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\operatorname{sh}(x)\sin(x) - \operatorname{ch}(x)\cos(x)\right).\end{aligned}$$

II. Primitives par « IPP »

II. Primitives par « IPP »

Exercice 4 :

Déterminer les primitives suivantes et préciser l'intervalle maximal d'intégration le cas échéant :

1. $\displaystyle\int^x \big(\ln(t)\big)^2 \,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int^x (t-1)^2 \sin(t)\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int^x \mathrm{ch}\,(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 4 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

1. $\displaystyle\int^x \big(\ln(t)\big)^2 \,\mathrm{d}t$

Correction :

1. $x \in \mathrm{I}$ où I est un intervalle inclus dans $]0\,;+\infty[$.
   Les fonctions $x \longmapsto t$ et $t \longmapsto \ln^2(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle I inclus dans $]0\,;+\infty[$. Une IPP s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\int^x \big(\ln(t)\big)^2 \,\mathrm{d}t &= \Big[t\big(\ln(t)\big)^2\Big]^x - 2\int^x \ln(t)\,\mathrm{d}t \\ &= x\big(\ln(x)\big)^2 - 2x\ln(x) + 2x.\end{aligned}$$

II. Primitives par « IPP »

Exercice 4 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

❷ $$\int^{x} (t-1)^2 \sin(t)\,\mathrm{d}t$$

Correction :

❷ $x \in \mathrm{I}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Les fonctions $x \longmapsto (t-1)^2$ et $t \longmapsto -\cos(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle I de $\mathbb{R}$.
Une IPP s'écrit alors :

$$\int^{x} (t-1)^2 \sin(t)\,\mathrm{d}t = \Big[-(t-1)^2\cos(t)\Big]^{x} + 2\int^{x} (t-1)\cos(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 4 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

2. $$\int^x (t-1)^2 \sin(t)\,\mathrm{d}t$$

Correction :

2. Les fonctions $x \longmapsto t-1$ et $t \longmapsto \sin(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle I de $\mathbb{R}$. Une IPP s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\int^x (t-1)^2 \sin(t)\,\mathrm{d}t &= \Big[-(t-1)^2\cos(t)\Big]^x + 2\int^x (t-1)\cos(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -(x-1)^2\cos(x) + 2\Big[(t-1)\sin(t)\Big]^x - 2\int^x \sin(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -(x-1)^2\cos(x) + 2(x-1)\sin(x) + 2\cos(x).\end{aligned}$$

Exercice 4 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

❸ $\displaystyle\int^x \operatorname{ch}(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$

Correction :

❸ $x \in \mathrm{I}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Les fonctions $x \longmapsto \operatorname{ch}(t)$ et $t \longmapsto -\cos(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle I de $\mathbb{R}$.
Une IPP s'écrit alors :

$$\mathrm{I} = \int^x \operatorname{ch}(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t = \Big[-\operatorname{ch}(t)\cos(t)\Big]^x + \int^x \operatorname{sh}(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 4 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

❸ $\displaystyle\int^x \mathrm{ch}\,(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$

Correction :

❸ Les fonctions $x \longmapsto \mathrm{sh}\,(t)$ et $t \longmapsto \sin(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle I de $\mathbb{R}$.
Une IPP s'écrit alors :

$$\mathrm{I} = -\mathrm{ch}\,(x)\cos(x) + \Big[\mathrm{sh}\,(t)\sin(t)\Big]^x - \int^x \mathrm{ch}\,(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 4 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

❸ $\displaystyle\int^{x} \operatorname{ch}(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$

Correction :

❸ Les fonctions $x \longmapsto \operatorname{sh}(t)$ et $t \longmapsto \sin(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle I de $\mathbb{R}$.

Une IPP s'écrit alors :

$$\mathrm{I} = -\operatorname{ch}(x)\cos(x) + \operatorname{sh}(x)\sin(x) - \mathrm{I}$$

Exercice 4 :

Déterminer les primitives suivantes sur le plus grand intervalle possible :

❸ $\displaystyle\int^x \mathrm{ch}\,(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$

Correction :

❸ Les fonctions $x \longmapsto \mathrm{sh}\,(t)$ et $t \longmapsto \sin(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle I de $\mathbb{R}$. Une IPP s'écrit alors :

$$\mathrm{I} = -\mathrm{ch}\,(x)\cos(x) + \mathrm{sh}\,(x)\sin(x) - \mathrm{I}$$
$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}\mathrm{sh}\,(x)\sin(x) - \frac{1}{2}\mathrm{ch}\,(x)\cos(x).$$

II. Primitives par « IPP »

Exercice 5 :

Soit $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
2. Calculer I_n.
3. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}$.

Correction :

Soit $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

1. Les fonctions $t \longmapsto t$ et $t \longmapsto (1-t^2)^{n+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;1]$. Une IPP s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{n+1} &= \int_0^1 (1-t^2)^{n+1}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\Big[t(1-t^2)^{n+1}\Big]_0^1}_{=0} + 2(n+1)\int_0^1 t^2(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t \\
&= -2(n+1)\int_0^1 (1-t^2-1)(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t \\
&= -2(n+1)\mathrm{I}_{n+1} + 2(n+1)\mathrm{I}_n \\
(2n+3)\mathrm{I}_{n+1} &= (2n+2)\mathrm{I}_n \\
\mathrm{I}_{n+1} &= \frac{2n+2}{2n+3}\,\mathrm{I}_n.
\end{aligned}$$

Correction :

Soit $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n dt.$

❷ Par récurrence, montrons que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{I}_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{2k}{2k+1}\right).$

Pour $n=1$, $\mathrm{I}_1 = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)\,\mathrm{d}t = \left[t - \frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{1}\left(\frac{2k}{2k+1}\right) = \frac{2}{3}$ et la propriété est vraie.

Supposons qu'il existe un entier non nul n telle que la propriété soit vraie. D'après la relation de récurrence, précédente, on a :

$$\mathrm{I}_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}\,\mathrm{I}_n = \frac{2n+2}{2n+3}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{2k+1}\right) = \prod_{k=1}^{n+1}\left(\frac{2k}{2k+1}\right).$$

La propriété est donc héréditaire.

Initialisée pour $n=1$, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{I}_n = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{2k+1}\right).$$

Correction :

Soit $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n dt.$

❸ Il suffit de développer via le binôme de Newton et d'utiliser la linéarité de l'intégrale :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-t^2)^k \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^1 t^{2k} \,\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Finalement,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{2k}{2k+1}\right).$$

II. Primitives par « IPP »

Correction :

C'est peut-être un peu tôt mais :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{2k+1}\right)=\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)^2}{(2n+1)!}=\frac{4^n\left(\prod_{k=1}^{n}k\right)^2}{(2n+1)!}=\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Cette formule est encore vraie pour $n=0$.

En conclusion,

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

III. Primitives par changement de variables

III. Primitives par changement de variables

Exercice 6 :

Déterminer les primitives suivantes et préciser l'intervalle maximal d'intégration le cas échéant :

1. $\displaystyle\int^x \sqrt{e^t - 1}\,dt$

   $u^2 = e^t - 1$

2. $\displaystyle\int^x \frac{1}{t}\,\frac{1}{\sqrt{t(t-1)}}\,dt$

   $u = \dfrac{1}{t}$

3. $\displaystyle\int^x \frac{t^3}{(1+t^2)^3}\,dt$

   $t = \tan(u)$

III. Primitives par changement de variables

Correction :

1. $\displaystyle\int^x \sqrt{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$: La primitive n'est définie que pour $\mathrm{e}^t \geqslant 1 \iff t \in]0\,;+\infty]$.
On considère donc $x \in \mathrm{I}$ où I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}_+$.
Le changement de variable $u(t) = \sqrt{\mathrm{e}^t - 1} \iff u^2 = \mathrm{e}^t - 1$ est strictement croissant et de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}_+$ et on a $2u\,\mathrm{d}u = (u^2+1)\,\mathrm{d}t \iff \mathrm{d}t = \dfrac{2u\,\mathrm{d}u}{u^2+1}$ puis,

$$\begin{aligned}\int^x \sqrt{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \int^u \frac{2u^2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u &= 2\int^u \frac{u^2+1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u - 2\int^u \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\ &= 2u - 2\arctan(u) \\ &= 2\sqrt{\mathrm{e}^t - 1} - 2\arctan\left(\sqrt{\mathrm{e}^t - 1}\right).\end{aligned}$$

III. Primitives par changement de variables

Correction :

❷ $\displaystyle\int^x \frac{1}{t}\,\frac{1}{\sqrt{t(t-1)}}\,\mathrm{d}t$: La primitive n'est définie que pour $t(t-1)>0 \iff t \in \,]-\infty\,;0[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.
On considère donc $x \in \mathrm{I}$ où I est un intervalle disjoint de $[0\,;1]$.
Le changement de variable $u(t)=\dfrac{1}{t}$ est strictement décroissant et de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout tel intervalle I et on a $\mathrm{d}u=-u^2\,\mathrm{d}t \iff \mathrm{d}t=-\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2}$ puis,

$$\begin{aligned}\int^x \frac{1}{t}\,\frac{1}{\sqrt{t(t-1)}}\,\mathrm{d}t &= \int^u \frac{-1}{\sqrt{1-u}}\,\mathrm{d}u = 2\sqrt{1-u}\\ &= 2\sqrt{1-\frac{1}{x}} = 2\sqrt{\frac{x-1}{x}}.\end{aligned}$$

III. Primitives par changement de variables

Correction :

3. $\displaystyle\int^x \frac{t^3}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t$: Comme $1+t^2 \neq 0$, la primitive est définie sur tout intervalle de $\mathbb{R}$.
Le changement de variable $u(t) = \arctan(t) \iff t = \tan(u)$ est strictement croissant et de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout tel intervalle de $\mathbb{R}$ et on a $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \iff \mathrm{d}t = (1+\tan^2(u))\,\mathrm{d}u$ puis,

$$\begin{aligned}
\int^x \frac{t^3}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t &= \int^u \frac{\tan^3(u)}{(1+\tan^2(u))^2}\,\mathrm{d}u = \int^u \cos^4(u)\tan^3(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \int^u \cos(u)\sin^3(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\sin^4(u) \\
&= \frac{1}{4}\sin^4\left(\arctan(x)\right).
\end{aligned}$$

Or, $\cos^2(u) = \dfrac{1}{1+\tan^2(u)} \iff \cos^2(\arctan(x)) = \dfrac{1}{1+x^2}$ puis
$\sin^2(\arctan(x)) = 1 - \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{x^2}{1+x^2}$.
Donc $\displaystyle\int^x \frac{t^3}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t = \frac{x^4}{4(1+x^2)^2}$.

III. Primitives par changement de variables

Exercice 7 :

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{x^2 - 8x - 1}{(x+3)(x-1)^2}$;

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Monter qu'il existe trois réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que
   $$\forall\, x \in \mathrm{D}, \quad f(x) = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$
3. En déduire $\displaystyle\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_2^3 f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-1}^0 f(t)\,\mathrm{d}t$.
4. Peut-on calculer $\displaystyle\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$? Pourquoi ?

Correction :

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 8x - 1}{(x+3)(x-1)^2}$;

1. L'ensemble de définition D de f est $\boxed{\mathrm{D} =]-\infty, -3[\cup]-3, 1[\cup]1, +\infty[}$.

Correction :

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 8x - 1}{(x+3)(x-1)^2}$;

1. L'ensemble de définition D de f est $\boxed{\mathrm{D} =]-\infty, -3[\, \cup\,]-3, 1[\, \cup\,]1, +\infty[}$.
2. Monter qu'il existe trois réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

   $$\forall\, x \in \mathrm{D}, \quad f(x) = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

Correction :

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 8x - 1}{(x+3)(x-1)^2}$;

1. L'ensemble de définition D de f est $\boxed{\mathrm{D} =]-\infty, -3[\, \cup\,]-3, 1[\, \cup\,]1, +\infty[}$.
2. Monter qu'il existe trois réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall\, x \in \mathrm{D}, \quad f(x) = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

$$a = \left[(x+3)f(x)\right]_{x=-3} = 2$$

Correction :

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 8x - 1}{(x+3)(x-1)^2}$;

1. L'ensemble de définition D de f est $\boxed{\mathrm{D} =]-\infty, -3[\cup]-3, 1[\cup]1, +\infty[}$.
2. Monter qu'il existe trois réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall\, x \in \mathrm{D}, \quad f(x) = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

$$a = \left[(x+3)f(x)\right]_{x=-3} = 2 \qquad\qquad c = \left[(x-1)^2 f(x)\right]_{x=1} = -2$$

III. Primitives par changement de variables

Correction :

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 8x - 1}{(x+3)(x-1)^2}$;

1. L'ensemble de définition D de f est $\boxed{\mathrm{D} =]-\infty, -3[\cup]-3, 1[\cup]1, +\infty[}$.
2. Monter qu'il existe trois réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

   $$\forall\, x \in \mathrm{D}, \quad f(x) = \frac{2}{x+3} + \frac{b}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2}$$

   $$a = [(x+3)f(x)]_{x=-3} = 2 \qquad\qquad c = [(x-1)^2 f(x)]_{x=1} = -2$$

   $$2 + b = \lim_{x \to +\infty} x f(x) = 1 \text{ donc } b = -1.$$

Correction :

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2-8x-1}{(x+3)(x-1)^2}$;

1. L'ensemble de définition D de f est $\boxed{\mathrm{D} =]-\infty,-3[\,\cup\,]-3,1[\,\cup\,]1,+\infty[}$.
2. Monter qu'il existe trois réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall\, x \in \mathrm{D}, \quad f(x) = \frac{2}{x+3} + \frac{b}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2}$$

$$a = [(x+3)f(x)]_{x=-3} = 2 \qquad\qquad c = [(x-1)^2 f(x)]_{x=1} = -2$$

$$2 + b = \lim_{x\to+\infty} x f(x) = 1 \text{ donc } b = -1.$$

$$\boxed{\forall\, x \in \mathrm{D}, \quad f(x) = \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2}}$$

III. Primitives par changement de variables

Correction :

❸ En déduire $\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t = 2\ln|x+3| - \ln|x-1| + \frac{2}{x-1}.$$

avec $x \in \mathrm{I}$ où I est un intervalle (totalement) inclus dans D.

III. Primitives par changement de variables

Correction :

3. En déduire $\displaystyle\int_2^3 f(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}\int_2^3 f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[2\ln(x+3)-\ln(x-1)+\frac{2}{x-1}\right]_2^3 \\ &= (2\ln 6-\ln 2+1)-(2\ln 5-\ln 1+2) \\ &= \ln\left(\frac{18}{25}\right)-1.\end{aligned}$$

III. Primitives par changement de variables

Correction :

❸ *En déduire* $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[2\ln(x+3) - \ln(1-x) + \frac{2}{x-1}\right]_{-1}^{0}\\ &= (2\ln 3 - \ln 1 - 2) - (2\ln 2 - \ln 2 - 1)\\ &= \ln\left(\frac{9}{2}\right) - 1.\end{aligned}$$

Correction :

4. Peut-on calculer $\displaystyle\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$? Pourquoi ?

   La fonction $f : t \longmapsto f(t)$ n'est pas continue sur l'intervalle $[0\,;2]$ donc l'intégrale, dite de Riemann, $\displaystyle\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ n'est pas définie.

Correction :

4. Peut-on calculer $\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$? Pourquoi ?

La fonction $f : t \longmapsto f(t)$ n'est pas continue sur l'intervalle $[0\,;2]$ donc l'intégrale, dite de Riemann, $\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ n'est pas définie.

Vous attendrez l'année prochaine pour savoir comment gérer ce genre de problème.

IV. Primitives par « DES »

Exercice 8 :

Déterminer les primitives suivantes et préciser l'intervalle maximal d'intégration le cas échéant :

1. $\displaystyle\int^x \frac{1}{t^3-5t^2+6t}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int^x \frac{t-2}{t^2-2t+2}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int^x \frac{1}{-t^2+4t-5}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int^x \frac{2t+1}{t^3-1}\,\mathrm{d}t$

IV. Primitives par « DES »

Correction :

Tout va dépendre de la factorisation, ou pas, du dénominateur.

Correction :

1. $\displaystyle\int^x \frac{1}{t^3-5t^2+6t}\,\mathrm{d}t$: $t^3-5t^2+6t = t(t-2)(t-3)$. On travaille donc sur tout intervalle (totalement) inclus dans $]-\infty\,;0[\cup]0\,;2[\cup]2\,;3[\cup]3\,;+\infty[$.

ATTENTION

Je rappelle que chacune des primitives dépendra de l'intervalle sur lequel on se trouve.

IV. Primitives par « DES »

Correction :

1. $\displaystyle\int^x \frac{1}{t^3-5t^2+6t}\,\mathrm{d}t$: Tout d'abord la décomposition en éléments simples :

$$f(t)=\frac{1}{t^3-5t^2+6t}=\frac{1}{t(t-2)(t-3)}=\frac{a}{t}+\frac{b}{t-2}+\frac{c}{t-3}.$$

On a :

IV. Primitives par « DES »

Correction :

1. $\displaystyle\int^x \frac{1}{t^3-5t^2+6t}\,\mathrm{d}t$: Tout d'abord la décomposition en éléments simples :

$$f(t)=\frac{1}{t^3-5t^2+6t}=\frac{1}{t(t-2)(t-3)}=\frac{a}{t}+\frac{b}{t-2}+\frac{c}{t-3}.$$

On a :

- $a=\Big[t\times f(t)\Big]_{t=0}=\dfrac{1}{(0-2)(0-3)}=\dfrac{1}{6}.$

Correction :

1. $\displaystyle\int^x \frac{1}{t^3-5t^2+6t}\,\mathrm{d}t$: Tout d'abord la décomposition en éléments simples :

$$f(t)=\frac{1}{t^3-5t^2+6t}=\frac{1}{t(t-2)(t-3)}=\frac{a}{t}+\frac{b}{t-2}+\frac{c}{t-3}.$$

On a :

- $a=\Big[t\times f(t)\Big]_{t=0}=\dfrac{1}{(0-2)(0-3)}=\dfrac{1}{6}.$
- $b=\Big[(t-2)\times f(t)\Big]_{t=2}=\dfrac{1}{2(2-3)}=-\dfrac{1}{2}.$

Correction :

1. $\displaystyle\int^x \frac{1}{t^3-5t^2+6t}\,\mathrm{d}t$: Tout d'abord la décomposition en éléments simples :

$$f(t)=\frac{1}{t^3-5t^2+6t}=\frac{1}{t(t-2)(t-3)}=\frac{a}{t}+\frac{b}{t-2}+\frac{c}{t-3}.$$

On a :

- $a=\Big[t\times f(t)\Big]_{t=0}=\dfrac{1}{(0-2)(0-3)}=\dfrac{1}{6}.$
- $b=\Big[(t-2)\times f(t)\Big]_{t=2}=\dfrac{1}{2(2-3)}=-\dfrac{1}{2}.$
- $c=\Big[(t-3)\times f(t)\Big]_{t=3}=\dfrac{1}{3(3-2)}=\dfrac{1}{3}.$

IV. Primitives par « DES »

Correction :

1. $\displaystyle\int^x \frac{1}{t^3-5t^2+6t}\,\mathrm{d}t$: Tout d'abord la décomposition en éléments simples :

$$f(t)=\frac{1}{t^3-5t^2+6t}=\frac{1}{t(t-2)(t-3)}=\frac{a}{t}+\frac{b}{t-2}+\frac{c}{t-3}.$$

On a :

- $a=\Big[t\times f(t)\Big]_{t=0}=\dfrac{1}{(0-2)(0-3)}=\dfrac{1}{6}.$
- $b=\Big[(t-2)\times f(t)\Big]_{t=2}=\dfrac{1}{2(2-3)}=-\dfrac{1}{2}.$
- $c=\Big[(t-3)\times f(t)\Big]_{t=3}=\dfrac{1}{3(3-2)}=\dfrac{1}{3}.$

Donc $\displaystyle\frac{1}{t^3-5t^2+6t}=\frac{1}{6t}-\frac{1}{2(t-2)}+\frac{1}{3(t-3)}.$

IV. Primitives par « DES »

Correction :

1. $$\int^x \frac{1}{t^3-5t^2+6t}\,\mathrm{d}t = \int^x \frac{1}{6t} - \frac{1}{2(t-2)} + \frac{1}{3(t-3)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x-2| + \frac{1}{3}\ln|x-3|\,.$$

Correction :

1. $$\int^x \frac{1}{t^3-5t^2+6t}\,\mathrm{d}t = \int^x \frac{1}{6t} - \frac{1}{2(t-2)} + \frac{1}{3(t-3)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x-2| + \frac{1}{3}\ln|x-3|\,.$$

ATTENTION

Par exemple,

- Sur $]-\infty\,;0[$, $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^3-5t^2+6t} = \frac{1}{6}\ln(-x) - \frac{1}{2}\ln(2-x) + \frac{1}{3}\ln(3-x)$,
- sur $]2\,;3[$, $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^3-5t^2+6t} = \frac{1}{6}\ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x-2) + \frac{1}{3}\ln(3-x)$,
- Sur $]3\,;\infty[$, $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^3-5t^2+6t} = \frac{1}{6}\ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x-2) + \frac{1}{3}\ln(x-3)$,

...

IV. Primitives par « DES »

Correction :

2. $\displaystyle\int^x \frac{t-2}{t^2-2t+2}\,\mathrm{d}t$: $\Delta = 4-8<0$ donc pas de factorisation du dénominateur. En échange, la primitive sera définie sur tout intervalle de $\mathbb{R}$.

Correction :

❷ $\displaystyle\int^x \frac{t-2}{t^2-2t+2}\,\mathrm{d}t$: $\Delta = 4-8<0$ donc pas de factorisation du dénominateur. En échange, la primitive sera définie sur tout intervalle de $\mathbb{R}$.
On s'occupe d'abord du simple :

$$\begin{aligned}\int^x \frac{t-2}{t^2-2t+2}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int^x \frac{2t-2}{t^2-2t+2}\,\mathrm{d}t - \int^x \frac{1}{t^2-2t+2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\ln\underbrace{\left(x^2-2x+2\right)}_{>0} - \int^x \frac{1}{t^2-2t+2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Correction :

2. $\displaystyle\int^x \frac{t-2}{t^2-2t+2}\,\mathrm{d}t$: $\Delta = 4-8<0$ donc pas de factorisation du dénominateur. En échange, la primitive sera définie sur tout intervalle de $\mathbb{R}$.
On s'occupe d'abord du simple :

$$\begin{aligned}\int^x \frac{t-2}{t^2-2t+2}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int^x \frac{2t-2}{t^2-2t+2}\,\mathrm{d}t - \int^x \frac{1}{t^2-2t+2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\ln\underbrace{\left(x^2-2x+2\right)}_{>0} - \int^x \frac{1}{t^2-2t+2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Maintenant, le deuxième terme :

IV. Primitives par « DES »

Correction :

❷ $\displaystyle\int^x \frac{1}{t^2-2t+2}\,\mathrm{d}t$: On passe par la forme canonique :

$$\int^x \frac{1}{t^2-2t+2}\,\mathrm{d}t = \int^x \frac{1}{(t-1)^2+1}\,\mathrm{d}t = \arctan(x-1).$$

IV. Primitives par « DES »

Correction :

2. Finalement,

$$\int^x \frac{t-2}{t^2-2t+2}\,\mathrm{d}t = \ln\left(\sqrt{x^2-2x+2}\right) + \arctan(1-x).$$

Correction :

❸ $\displaystyle\int^x \frac{1}{-t^2+4t-5}\,\mathrm{d}t$: $\Delta = 16 - 20 < 0$ donc même chose que la précédente.

Correction :

3. $\displaystyle\int^x \frac{1}{-t^2+4t-5}\,\mathrm{d}t$: $\Delta = 16-20<0$ donc même chose que la précédente.

$$\int^x \frac{1}{-t^2+4t-5}\,\mathrm{d}t = \int^x \frac{1}{-1-(t-2)^2}\,\mathrm{d}t = \arctan(2-x).$$

IV. Primitives par « DES »

Correction :

❹ $\displaystyle\int^x \frac{2t+1}{t^3-1}\,\mathrm{d}t$: On commence par factoriser le dénominateur sur $\mathbb{R}$:

Correction :

4. $\displaystyle\int^x \frac{2t+1}{t^3-1}\,\mathrm{d}t$: On commence par factoriser le dénominateur sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{2t+1}{t^3-1} = \frac{2t+1}{(t-1)(t^2+t+1)}.$$

Correction :

4. $\displaystyle\int^x \frac{2t+1}{t^3-1}\,\mathrm{d}t$: On commence par factoriser le dénominateur sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{2t+1}{t^3-1} = \frac{2t+1}{(t-1)(t^2+t+1)}.$$

Comme $t^2+t+1>0$, on travaille donc sur tout intervalle I inclus dans $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.

IV. Primitives par « DES »

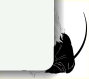
Correction :

❹ $\displaystyle\int^x \frac{2t+1}{t^3-1}\,\mathrm{d}t$: On commence par factoriser le dénominateur sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{2t+1}{t^3-1} = \frac{2t+1}{(t-1)(t^2+t+1)}.$$

Comme $t^2+t+1>0$, on travaille donc sur tout intervalle I inclus dans $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.
La décomposition en éléments simples s'écrit :

$$f(t) = \frac{2t+1}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{a}{t-1} + \frac{bt+c}{t^2+t+1}.$$



IV. Primitives par « DES »

Correction :

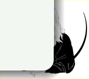
❹ $\displaystyle\int^x \frac{2t+1}{t^3-1}\,\mathrm{d}t$: On commence par factoriser le dénominateur sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{2t+1}{t^3-1} = \frac{2t+1}{(t-1)(t^2+t+1)}.$$

Comme $t^2+t+1>0$, on travaille donc sur tout intervalle I inclus dans $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.
La décomposition en éléments simples s'écrit :

$$f(t) = \frac{2t+1}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{a}{t-1} + \frac{bt+c}{t^2+t+1}.$$

$$a = \Big[(t-1)f(t)\Big]_{t=1} = 1.$$



IV. Primitives par « DES »

Correction :

4. $\displaystyle\int^x \frac{2t+1}{t^3-1}\,\mathrm{d}t$: On commence par factoriser le dénominateur sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{2t+1}{t^3-1} = \frac{2t+1}{(t-1)(t^2+t+1)}.$$

Comme $t^2+t+1>0$, on travaille donc sur tout intervalle I inclus dans $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.
La décomposition en éléments simples s'écrit :

$$f(t) = \frac{2t+1}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{a}{t-1} + \frac{bt+c}{t^2+t+1}.$$

$$a = \Big[(t-1)f(t)\Big]_{t=1} = 1.$$

$$-a+c = \Big[f(t)\Big]_{t=0} = -1 \iff c = 0.$$

Correction :

❹ $\displaystyle\int^x \frac{2t+1}{t^3-1}\,\mathrm{d}t$: On commence par factoriser le dénominateur sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{2t+1}{t^3-1} = \frac{2t+1}{(t-1)(t^2+t+1)}.$$

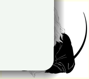
Comme $t^2+t+1>0$, on travaille donc sur tout intervalle I inclus dans $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.
La décomposition en éléments simples s'écrit :

$$f(t) = \frac{2t+1}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{a}{t-1} + \frac{bt+c}{t^2+t+1}.$$

$$a = \Big[(t-1)f(t)\Big]_{t=1} = 1.$$

$$-a+c = \Big[f(t)\Big]_{t=0} = -1 \iff c=0.$$

$$a+b = \lim_{t\to+\infty} tf(t) = 0 \iff b=-1.$$



IV. Primitives par « DES »

Correction :

4. $\displaystyle\int^x \frac{2t+1}{t^3-1}\,\mathrm{d}t$: On commence par factoriser le dénominateur sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{2t+1}{t^3-1} = \frac{2t+1}{(t-1)(t^2+t+1)}.$$

Donc, $\displaystyle\frac{2t+1}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{1}{t-1} - \frac{t}{t^2+t+1}.$

IV. Primitives par « DES »

Correction :

4. $$\int^x \frac{2t+1}{t^3-1}\,\mathrm{d}t = \int^x \frac{1}{t-1} - \frac{t}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t$$
$$= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\int^x \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int^x \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t$$
$$= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln\underbrace{\left(x^2+x+1\right)}_{>0} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

V. Primitives de fractions irrationnelles

V. Primitives de fractions irrationnelles

Exercice 9 :

Déterminer les primitives suivantes et préciser l'intervalle maximal d'intégration le cas échéant :

1. $\displaystyle\int^x \frac{t-1}{\sqrt{t^2-2t+2}}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int^x \frac{t-2}{\sqrt{t^2-2t+2}}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int^x \frac{1}{\sqrt{-t^2+4t-5}}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int^x \frac{1}{\sqrt{t^2-5t+6}}\,\mathrm{d}t$

V. Primitives de fractions irrationnelles

Correction :

Tout va dépendre de la forme canonique du dénominateur.

1. $\displaystyle\int^x \frac{t-1}{\sqrt{t^2-2t+2}}\,\mathrm{d}t$: $\Delta = 4-8<0$ donc $x \in \mathrm{I} \subset \mathbb{R}$.

V. Primitives de fractions irrationnelles

Correction :

Tout va dépendre de la forme canonique du dénominateur.

1. $\displaystyle\int^x \frac{t-1}{\sqrt{t^2-2t+2}}\,\mathrm{d}t$: $\Delta = 4-8<0$ donc $x \in \mathrm{I} \subset \mathbb{R}$.

$$\int^x \frac{t-1}{\sqrt{t^2-2t+2}}\,\mathrm{d}t = \int^x \frac{2t-2}{2\sqrt{t^2-2t+2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{x^2-2x+2}.$$

V. Primitives de fractions irrationnelles

Correction :

2. $\displaystyle\int^{x} \frac{t-2}{\sqrt{t^2-2t+2}}\,\mathrm{d}t$: $\Delta = 4-8<0$ donc $x \in \mathrm{I} \subset \mathbb{R}$.

V. Primitives de fractions irrationnelles

Correction :

2. $\displaystyle\int^x \frac{t-2}{\sqrt{t^2-2t+2}}\,\mathrm{d}t$: $\Delta = 4-8<0$ donc $x \in \mathrm{I} \subset \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\int^x \frac{t-2}{\sqrt{t^2-2t+2}}\,\mathrm{d}t &= \int^x \frac{2t-2}{2\sqrt{t^2-2t+2}}\,\mathrm{d}t - \int^x \frac{1}{\sqrt{t^2-2t+2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{x^2-2x+2} - \int^x \frac{1}{\sqrt{(t-1)^2+1}}\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{x^2-2x+2} - \ln \underbrace{\left(x-1+\sqrt{(x-1)^2+1}\right)}_{>0}. \\
&\left(= \sqrt{x^2-2x+2} + \operatorname{argsh}(1-x)\right)
\end{aligned}$$

V. Primitives de fractions irrationnelles

Correction :

❸ $\displaystyle\int^x \frac{1}{\sqrt{-t^2+4t-5}}\,\mathrm{d}t$: $\Delta = 16 - 20 < 0$ donc $\mathrm{I} = \varnothing$.

Correction :

3. $\displaystyle\int^x \frac{1}{\sqrt{-t^2+4t-5}}\,\mathrm{d}t$: $\Delta = 16-20<0$ donc $\mathrm{I}=\varnothing$.

Oups !

Correction :

3. $\displaystyle\int^x \frac{1}{\sqrt{-t^2+4t+5}}\,\mathrm{d}t$: $\Delta = 16+20 = 6^2 > 0$ donc $x \in \mathrm{I} \subset \left]-1\,;5\right[$.

$$\begin{aligned}\int^x \frac{1}{\sqrt{-t^2+4t+5}}\,\mathrm{d}t &= \int^x \frac{1}{\sqrt{3^2-(t-2)^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \arcsin \underbrace{\left(\frac{x-2}{3}\right)}_{\in]-1;1[}.\end{aligned}$$

V. Primitives de fractions irrationnelles

Correction :

4. $\displaystyle\int^x \frac{1}{\sqrt{t^2-5t+6}}\,\mathrm{d}t$: $\Delta = 25-24>0$ donc $x \in \mathrm{I} \subset \left]-\infty\,;2\right[\cup \left]3\,;+\infty\right[$

V. Primitives de fractions irrationnelles

Correction :

4. $\displaystyle\int^x \frac{1}{\sqrt{t^2-5t+6}}\,\mathrm{d}t$: $\Delta = 25-24>0$ donc $x \in \mathrm{I} \subset \left]-\infty\,;2\right[\cup \left]3\,;+\infty\right[$

$$\begin{aligned}\int^x \frac{1}{\sqrt{t^2-5t+6}}\,\mathrm{d}t &= \int^x \frac{1}{\sqrt{\left(t-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}\,\mathrm{d}t \\ &= \ln \underbrace{\left(|2x-5|+\sqrt{(2x-5)^2-1}\right)}_{>0}.\end{aligned}$$

$$\left(=\operatorname{argch} \underbrace{|2x-5|}_{>1}\right)$$