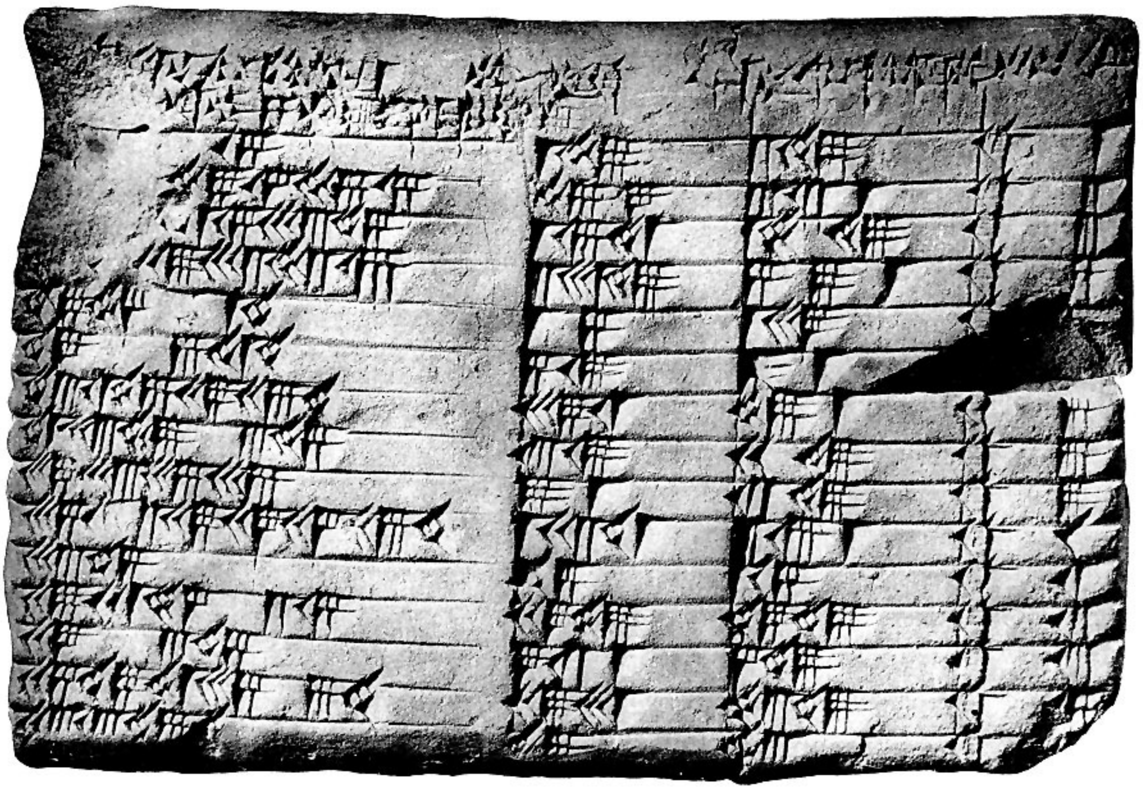
PTSI Lycée Jules Garnier
2024

Devoir de vacances

— pratique et entraînement —



Plimpton 322, tablette d'argile babylonienne (1 800 av. JC)

Cette tablette, vieille de près de 4 000 ans, donne une liste de triplets pythagoriciens, c'est-à-dire de triplets (a, b, c) de nombres entiers vérifiant $a^2 + b^2 = c^2$.

Présentation et mode d'emploi

Qu'est-ce que ce cahier ?

Ce cahier est un cahier de calcul, basé sur les notions déjà abordées pour vous aider à vous améliorer en calcul.

À quoi sert-il ?

En mathématiques, la technique et le calcul sont fondamentaux.

Sans technique, il est impossible de correctement appréhender une question mathématique. De même que l'on doit faire des gammes et beaucoup pratiquer lorsque l'on apprend un instrument, on doit calculer régulièrement lorsque l'on pratique les mathématiques.

Comment est-il organisé ?

Ce cahier comporte plusieurs parties :

- Un sommaire vous permettant de voir d'un seul coup d'œil les différentes fiches et de noter celles que vous avez déjà faites ou pas.
- Une partie de **calculs élémentaires**, faisables dès le début de la première année, centrée sur les calculs « de base » : développement, factorisation, racines carrées, fractions, *etc.* Cela peut vous paraître simple, mais sachez que ce type d'erreur de calcul est toujours fréquent, même en spé, même sur les copies de concours. Travailler les techniques élémentaires de calcul vous facilitera grandement la vie !
- Une partie liée au programme de première année : sont indiqués précisément les chapitres nécessaires pour pouvoir aborder chaque fiche de calcul.

Chaque fiche de calcul est organisée ainsi :

- Une présentation du thème de la fiche et des prérequis (notamment, pour des techniques propres à certaines filières, on précise de quelle filière il s'agit)
- Une liste de calculs, dont le temps de résolution (incluant la longueur et la technicité du calcul) est symbolisé par une (), deux (), trois () ou quatre () horloges.
- À la fin de la feuille sont affichées les réponses mélangées : c'est une première indication pour savoir si la réponse que vous avez trouvée est plausible. Je vous donnerai les réponses et les corrigés au milieu de la dernière semaine des vacances pour que vous ne soyez pas trop tentés.
- Vous êtes invité à écrire directement les réponses dans les cadres prévus à cet effet.

Comment l'utiliser ?

Un travail personnalisé.

Ce cahier de calcul est prévu pour être **utilisé en autonomie**.

Choisissez les calculs que vous faites en fonction des difficultés que vous rencontrez et des chapitres que vous étudiez, ou bien en fonction des conseils de votre professeur de mathématiques.

Enfin, ne cherchez pas à faire linéairement ce cahier : les fiches ne sont pas à faire dans l'ordre, mais en fonction des points que vous souhaitez travailler.

Un travail régulier.

Essayez de pratiquer les calculs à un rythme régulier : **une quinzaine de minutes par jour** par exemple. Privilégiez un travail régulier sur le long terme plutôt qu'un objectif du type « faire 10 fiches par jour pendant les vacances » .

Point important : pour réussir à calculer, il faut répéter. C'est pour cela que j'ai mis plusieurs exemples illustrant chaque technique de calcul.

Il peut être utile de parfois refaire certains calculs : n'hésitez pas à cacher les réponses déjà écrites dans les cadres, ou à écrire vos réponses dans les cadres au crayon à papier.

Un travail efficace.

Attention à l'utilisation des réponses et des corrigés : il est important de chercher suffisamment par vous-même avant de regarder les réponses et/ou les corrigés. Il faut vraiment **faire les calculs** afin que le corrigé vous soit profitable.

N'hésitez pas à ne faire qu'en partie une feuille de calculs : il peut être utile de revenir plusieurs fois à une même feuille, afin de voir à quel point telle technique a bien été assimilée.

La progression

Avoir une solide technique de calcul s'acquiert sur le long terme alors n'essayez pas de tout faire tout de suite mais répartissez votre travail sur la longueur des vacances.

Dans tous les cas, prenez soin de vous.

On se revoit très vite.

M. PUCCI

Tel : 90 94 50

Fiche de calcul n° 1 **001A**

Fractions

Prérequis
Règles de calcul sur les fractions.

Calculs dans l'ensemble des rationnels

Calcul 1.1 — Les fractions et le calcul littéral.

Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

a) $\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ ....

b) $\dfrac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \dfrac{(a+b)^2}{a-b}$ pour $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, distincts deux à deux. ....

c) $\dfrac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$ pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. ....

Calcul 1.2 — Le quotient de deux sommes de Gauss.

Simplifier $\dfrac{\sum_{k=0}^{n^2} k}{\sum_{k=0}^{n} k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la formule $1 + 2 + \cdots + p = \dfrac{p(p+1)}{2}$. ....

Calcul 1.3 — Décomposition en somme d'une partie entière et d'une partie décimale.

Soit $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Écrire les fractions suivantes sous la forme $a + \dfrac{b}{X}$ avec a et b entiers et $X \in \mathbb{R}$.

a) $\dfrac{29}{6}$ ....

b) $\dfrac{k}{k-1}$ ....

c) $\dfrac{3x-1}{x-2}$ ....

Calcul 1.4 — Un produit de fractions.

Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On donne $A = \dfrac{1}{1+t^2} - \dfrac{1}{(1+t)^2}$ et $B = \big(1+t^2\big)(1+t)^2$.

Simplifier AB autant que possible. ....

Calcul 1.5

Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel x.

a) $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-1}$ ....

b) $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{8}{x^2-4}$ ....

c) $\dfrac{x^2}{x^2-x} + \dfrac{x^3}{x^3+x^2} - \dfrac{2x^2}{x^3-x}$ ....

d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{x^2-4} + \dfrac{2}{x^2-2x}$ ....

► Réponses et corrigés page 23

Fiche de calcul n° 2 003A

Calcul littéral

Prérequis
Les identités remarquables.

Développer, réduire et ordonner

Dans cette section, on tâchera de mener les calculs avec le minimum d'étapes. Idéalement, on écrira directement le résultat. La variable x représente un nombre réel (ou complexe).

Calcul 2.1

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de x.

a) $(x-1)^2(x+1)\big(x^2+x+1\big)$

b) $\big(x^2+x+1\big)\big(x^2-x+1\big)$

c) $\Big(x^2+\sqrt{2}x+1\Big)\Big(1-\sqrt{2}x+x^2\Big)$

d) $\big(x^2+x+1\big)^2$

Factoriser

Calcul 2.2 — Avec plusieurs variables.

Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) $(x+y)^2-z^2$

b) $x^2+6xy+9y^2-169x^2$

c) $xy+x+y+1$

d) $xy-x-y+1$

e) $x^3+x^2y+2x^2+2xy+x+y$

f) $y^2\big(a^2+b^2\big)+16x^4\big(-a^2-b^2\big)$

Calcul 2.3 — On passe au niveau supérieur.

Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) x^4-1

b) $\big(-9x^2+24\big)\big(8x^2+8\big)+64x^4-64$

c) x^4+x^2+1

d) $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

► Réponses et corrigés page 25

Fiche de calcul n° 3

0017A

Sommes et produits

Prérequis

Factorielle. Identités remarquables. Décomposition en éléments simples.
Fonctions usuelles (racine carrée, logarithme népérien).

Calculs de sommes simples

Calcul 3.1

Calculer les sommes et les produits suivants, où p et q sont des entiers naturels non nuls tels que $p \geqslant q$.

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} 3^k$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{n-k}$ ....

c) $\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2}$ ....

d) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3^k$ ....

e) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 5\sqrt{k} \times k$ ....

f) $\displaystyle\prod_{k=-10}^{10} k$ ....

Avec des changements d'indice

Calcul 3.2

Calculer les sommes suivantes en effectuant le changement d'indice demandé.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} n+1-k$ avec $j = n+1-k$. ....

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}$ avec $j = n+1-k$. ....

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$ avec $j = k-1$. ....

d) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+2} (k-2)^3$ avec $j = k-2$. ....

Sommes et produits télescopiques

Calcul 3.3 — Sommes télescopiques.

Calculer les sommes et produits suivants.

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} (k+1)^3 - k^3$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$ ....

e) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$ ....

f) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{2k-3}$ ....

g) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$ ....

h) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ ....

À l'aide d'une décomposition en éléments simples

Calcul 3.4

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+2)(k+3)}$ ...

Sommation par paquets

Calcul 3.5

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k^2$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\min(k,n)$ ....

Sommes doubles

Calcul 3.6

Calculer les sommes doubles suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(i+j)$.

b) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i+j)^2$

c) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\ln(i^j)$ ..

d) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\max(i,j)$

► Réponses et corrigés page 26

Coefficients binomiaux

Prérequis
Factorielle. Coefficients binomiaux. Formule du binôme de Newton.

La lettre n désigne un entier naturel non nul.

Manipulations de factorielles et de coefficients binomiaux

Calcul 4.1 — Pour s'échauffer – *bis.*

Simplifier les expressions suivantes à l'aide de factorielles, de coefficients binomiaux et, le cas échéant, à l'aide de puissances. La lettre k désigne un entier naturel tel que $k < n$.

a) $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$ ....

b) $3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)$ ...

c) $\binom{n}{3}$ (pour $n \geqslant 3$) ....

d) $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$ ....

e) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{n}{(n+1)!}$ ....

f) $\dfrac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \dfrac{n!}{2^{2n}}$ ....

Autour du binôme de Newton

Calcul 4.2

Calculer les sommes ci-dessous à l'aide de la formule du binôme de Newton.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{2n-k} \binom{n}{k}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{k+2} \binom{n}{k} \times 3^{2n-k+1}$

Calcul 4.3

En utilisant la fonction $x \longmapsto (1+x)^n$, ses dérivées d'ordre 1 et 2 et sa primitive s'annulant en 0, calculer

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}$ ......

► Réponses et corrigés page 30

Racines carrées

Prérequis
Racines carrées. Méthode de la quantité conjuguée.

Premiers calculs

Calcul 5.1 — **Définition de la racine carrée.**

Simplifier les expressions suivantes en simplifiant les symboles $\sqrt{\cdot}$ qui peuvent l'être (et en prenant à ne pas se tromper sur les signes).

a) $\sqrt{(3-\pi)^2}$ ....

b) $\sqrt{(3-a)^2}$ ....

Avec la méthode de la quantité conjuguée

Calculs variés

Calcul 5.2 — **Avec une variable.**

On considère la fonction f qui à $x > 1$ associe $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Pour tout $x > 1$, calculer et simplifier les expressions suivantes.

a) $\dfrac{f(x+2) - f(x)}{f(x+2) + f(x)}$ ....

b) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ ....

c) $f(x) + 4f''(x)$ ....

d) $\dfrac{f(x)}{f''(x)}$ ....

Calcul 5.3 — **Mettre au carré.**

Élever les quantités suivantes au carré pour en donner une expression simplifiée.

a) $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$ ....

b) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ....

Calcul 5.4 — **Méli-mélo.**

Donner une écriture simplifiée des réels suivants.

a) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$ ....

b) $\dfrac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ....

c) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ ....

d) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ....

e) $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$ ....

f) $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$ ....

► Réponses et corrigés page 32

Fiche de calcul n° 6

Manipulation des fonctions usuelles

Prérequis
Dérivation, équations du second degré.

Calculs de valeurs

Calcul 6.1 — Fonctions circulaires réciproques.

Calculer les valeurs suivantes.

a) $\dfrac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$ ....

b) $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ....

Calcul 6.2 — Valeurs des fonctions hyperboliques.

Calculer les valeurs suivantes. On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\text{th}(x) = \text{sh}(x)/\text{ch}(x)$.

a) $\text{ch}(0)$ ....

b) $\text{sh}(\ln(3))$ ....

c) $\text{ch}(\ln(2/3))$ ....

d) $\text{th}(\ln(2))$ ....

Résolution d'équations

Calcul 6.3 — Fonctions $x \longmapsto a^x$.

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

On pourra faire intervenir une équation de degré 2 en posant une nouvelle variable.

a) $2^x + 4^x = 4$ ....

b) $16^x - 3 \times 4^x + 2 = 0$ ....

c) $3^x + 3^{2x} - 1 = 0.$ ....

Calcul 6.4 — Équations avec les fonctions circulaires réciproques.

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in [-1, 1]$ pour les deux premiers calculs, et $x \in \mathbb{R}$ pour les autres.

a) $\arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$ ....

b) $\cos(\arccos(x)) = 0$ ....

c) $\arcsin(\sin(x)) = \dfrac{\pi}{3}$ ......

d) $\tan(\arctan(x)) = 1$ ......

Calcul 6.5 — Équations avec des fonctions hyperboliques.

Résoudre les (in)équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\text{th}(x) = \text{sh}(x)/\text{ch}(x)$.

a) $\mathrm{ch}(x) = \sqrt{5}$ ....

b) $\mathrm{th}(x) = \dfrac{1}{3}$ ....

c) $\mathrm{ch}(x) \leqslant 4$ ....

d) $\mathrm{th}(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$ ....

Dérivation

Calcul 6.6 — Quelques calculs de dérivées.

Dériver les fonctions suivantes. On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{th}(x) = \mathrm{sh}(x)/\mathrm{ch}(x)$.

a) $x \longmapsto 2^x + x^2$ ....

b) $x \longmapsto x^x$ ....

c) $x \longmapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}$ ......

d) $x \longmapsto \arcsin(x^2)$ .....

e) $x \longmapsto \arctan(\mathrm{th}(x))$ ..

f) $x \longmapsto \mathrm{sh}(\mathrm{ch}(x))$ ......

g) $x \longmapsto \arcsin(x)+\arccos(x)$

h) $x \longmapsto \arctan(x)+\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$

▶ Réponses et corrigés page 33

Fiche de calcul n° 7 005A

Expressions algébriques

Prérequis
Identités remarquables.

Équations polynomiales

Calcul 7.1 — Cubique.

Soit a un nombre réel tel que $a^3 - a^2 + 1 = 0$.
Exprimer les quantités suivantes sous la forme $xa^2 + ya + z$ où x, y, z sont trois nombres rationnels.

a) $(a+2)^3$ ....

b) $a^5 - a^6$ ....

c) a^{12} ....

d) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2}$ ....

Expressions symétriques

Calcul 7.2 — Inverse.

Soit x un réel non nul. On pose $a = x - \dfrac{1}{x}$. Exprimer les quantités suivantes en fonction de a uniquement.

a) $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ ....

b) $x^3 - \dfrac{1}{x^3}$ ....

c) $x^4 + \dfrac{1}{x^4}$ ....

Calcul 7.3 — Trois variables.

Soient x, y, z trois nombres deux à deux distincts. On pose

$$a = x + y + z, \qquad b = xy + yz + zx \qquad \text{et} \qquad c = xyz.$$

Exprimer les quantités suivantes en fonction de a, b, c uniquement.

a) $x^2 + y^2 + z^2$ ....

b) $x^3 + y^3 + z^3$ ....

c) $(x+y)(y+z)(z+x)$ ....

d) $x^2yz + y^2zx + z^2xy$ ....

e) $\dfrac{x}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{y}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{z}{(z-x)(z-y)}$ ....

f) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$ ....

► Réponses et corrigés page 36

Dérivation

Prérequis

Dérivées des fonctions usuelles. Formules de dérivation.

Opérations et fonctions composées

Calcul 8.1

Calculer $f'(x)$ et écrire le résultat sous forme factorisée.

a) $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

b) $x \in]-3, 3[$ et $f(x) = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$.

c) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$

d) $x \in]0, \pi[$ et $f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$.

e) $x \in \mathbb{R} \setminus 3, -2$ et $f(x) = \frac{1}{3-x} + \frac{1}{2+x}$.

f) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = x^2 - \ln(x+1)$

g) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(x^2 + x - 2) - \frac{x+2}{x-1}$.

h) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = \frac{x}{x+1} + x - 2\ln(x+1)$.

i) $x \in]0, e[\cup]e, +\infty[$ et $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{1 - \ln(x)}$.

► Réponses et corrigés page 37

Nombres complexes

Prérequis
Forme algébrique et forme exponentielle.

Pour s'échauffer

Calcul 9.1 — Écriture algébrique.

Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

a) $(2-3\mathrm{i})^4$ ....

b) $\dfrac{1}{3-\mathrm{i}}$ ....

c) $\dfrac{2-3\mathrm{i}}{5+2\mathrm{i}}$ ....

d) $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ ....

Calcul 9.2 — Forme exponentielle.

Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle.

a) $-2\mathrm{i}$ ....

b) $-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}}$ ....

c) $-5+5\mathrm{i}\sqrt{3}$ ....

d) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ ....

► Réponses et corrigés page 39

Fiche de calcul n° 10 016A

Trigonométrie et nombres complexes

Prérequis
Nombres complexes, trigonométrie.

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Linéarisations

Calcul 10.1

Linéariser :

a) $\cos^2(2x)\sin^2(x)$ ...

b) $\cos(3x)\sin^3(2x)$ ...

Arc-moitié, arc-moyen

Calcul 10.2

Écrire sous forme trigonométrique (c'est-à-dire sous la forme $re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$) :

a) $1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$ ....

b) $e^{-i\frac{\pi}{6}} - 1$ ....

c) $1 + ie^{i\frac{\pi}{3}}$ ....

d) $\dfrac{1 + e^{i\frac{\pi}{6}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{12}}}$ ....

e) $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{2}}$ ....

f) $e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{2}}$ ....

Factorisations

Calcul 10.3

Factoriser :

a) $\cos(x) + \cos(3x)$ .....

b) $\sin(5x) - \sin(3x)$ .....

c) $\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)$

► Réponses et corrigés page 40

Fiche de calcul n° 11 **009A**

Primitives

Prérequis
Intégration de Terminale. Dérivée d'une fonction composée.
Trigonométrie directe et réciproque. Trigonométrie hyperbolique.

Pour chaque fonction à intégrer on pourra commencer par chercher les domaines où elle admet des primitives.

Calculs directs

Calcul 11.1

Déterminer directement une primitive des expressions suivantes.

a) $\dfrac{3}{(t+2)^3}$ ....

b) $\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ ....

c) $\dfrac{\ln^3 t}{t}$ ....

d) $\dfrac{1}{t^2\sqrt{t}}$ ....

e) $\tan^2 t$ ....

f) $\tan^3 t$ ....

g) $\dfrac{1}{\cos^2(t)\sqrt{\tan t}}$ ....

h) $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}\mathrm{Arcsin}(t)}$ ....

Calcul 11.2 — Trigonométrie – *bis.*

Déterminer une primitive des expressions suivantes en utilisant d'abord le formulaire de trigonométrie.

a) $\sin^3 t$ ....

b) $\dfrac{\sin(2t)}{1+\sin^2 t}$ ....

c) $\dfrac{1}{\sin t \cos t}$ ....

d) $\dfrac{1}{\sin^2(t)\cos^2(t)}$ ....

e) $\dfrac{1}{\sin(4t)}$ ....

Calcul 11.3 — Fractions rationnelles.

Déterminer une primitive des expressions suivantes après quelques manipulations algébriques simples.

a) $\dfrac{t^2+t+1}{t^2}$ ....

b) $\dfrac{t^2+1}{t^3}$ ....

c) $\dfrac{1-t^6}{1-t^2}$ ....

d) $\dfrac{t^3+1}{t+1}$ ....

e) $\dfrac{t-1}{t+1}$ ....

f) $\dfrac{t^3}{t+1}$ ....

g) $\dfrac{t-1}{t^2+1}$ ....

h) $\dfrac{t}{(t+1)^2}$ ....

► Réponses et corrigés page 42

Calcul d'intégrales

Prérequis
Primitives usuelles, composées simples.

Intégrales et aires algébriques

On rappelle que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire algébrique entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses du repère lorsque les bornes sont « dans le bon ordre ».

Calcul 12.1

En se ramenant à des aires, calculer de tête les intégrales suivantes.

a) $\int_1^3 7\,\mathrm{d}x$ ....

b) $\int_7^{-3} -5\,\mathrm{d}x$ .....

c) $\int_0^7 3x\,\mathrm{d}x$ ......

d) $\int_2^8 1-2x\,\mathrm{d}x$ ..

e) $\int_{-2}^2 \sin x\,\mathrm{d}x$ ....

f) $\int_{-2}^1 |x|\,\mathrm{d}x$ ......

Calcul d'intégrales

On rappelle que si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, que l'on note $\Big[F(x)\Big]_a^b$.

Calcul 12.2 — Fonctions usuelles.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin x\,\mathrm{d}x$ ....

b) $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ ....

c) $\int_1^{100} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ ....

d) $\int_{-3}^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ ....

e) $\int_{-1}^2 (2x+1)^3\,\mathrm{d}x$ ....

f) $\int_0^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x$ ....

g) $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\mathrm{d}x$ ....

h) $\int_{-2}^3 |x+1|\,\mathrm{d}x$ ....

i) $\int_{-1}^2 \max(1, \mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$ ....

j) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin(x)\,\mathrm{d}x$ ....

k) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\cos x \sin x|\,\mathrm{d}x$ ....

l) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \arcsin x\,\mathrm{d}x$ ....

m) $\int_0^2 10^x\,\mathrm{d}x$ ....

▶ Réponses et corrigés page 44

Intégration par parties

Prérequis
Primitives, dérivées, intégration par parties.

On rappelle le théorème d'intégration par parties. Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, si $u \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ et si $v \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$, alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Intégrales

Calcul 13.1

Calculer :

a) $\displaystyle\int_0^1 (2t+3)\operatorname{sh}(2t)\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_1^{\ln 2} t2^t\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin t\,\mathrm{d}t$ ....

e) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t$ ....

f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\tan^2 t\,\mathrm{d}t$ ....

Intégrations par parties successives

Pour ces calculs de primitives et d'intégrales, on pourra réaliser plusieurs intégrations par parties successives.

Calcul 13.2 — Calcul de primitives.

Calculer des primitives des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto \ln^2 x$ ....

b) $x \longmapsto (x\ln x)^2$ ....

c) $x \longmapsto \mathrm{e}^{\arccos(x)}$ ....

▶ Réponses et corrigés page 46

Changements de variable

Prérequis
Primitives, dérivées. Changements de variables. Intégration par parties.

Changements de variable

Calcul 14.1

Effectuer le changement de variable indiqué et en déduire la valeur de l'intégrale.

a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sqrt{t}$ ....

b) $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{4t-t^2}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \dfrac{t}{2} - 1$ ....

c) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \dfrac{1}{t}$ ....

d) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln t}{t+t\ln^2 t}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \ln t$ ....

Calculs de primitives par changement de variable

Calcul 14.2

Déterminer une primitive de f en utilisant le changement de variable donné.

a) $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\longmapsto \dfrac{\cos x + \sin x}{\sin x \cos^2 x}$ avec $u = \tan x$ ....

b) $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}}$ avec $u = \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$ ....

c) $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \dfrac{1}{x + \sqrt[3]{x}}$ avec $u = \sqrt[3]{x}$ ....

d) $x > 1 \longmapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ avec $u = \sqrt{x^2-1}$ ....

▶ Réponses et corrigés page 48

Intégration des fractions rationnelles

Prérequis
Fonctions ln et arctan. Division euclidienne entre polynômes.
Petites décompositions en éléments simples.
Forme canonique d'un trinôme du second degré.
Changements de variable affines dans les intégrales.

Classiques

Calcul 15.1 — Exemple détaillé d'un calcul d'intégrale.

a) Quels sont les deux zéros de $t \longmapsto t^2 - 3t + 2$? ....

b) Trouver deux réels A et B tels que

pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, on ait $\dfrac{1}{(t-1)(t-2)} = \dfrac{A}{t-1} + \dfrac{B}{t-2}$ ....

c) Calculer $\displaystyle\int_3^4 \frac{2}{(t-1)(t-2)}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 15.2

Calculer les intégrales suivantes, en procédant comme ci-dessus.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{t^2-4}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{2}{t^2-t}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 15.3

Calculer les intégrales suivantes, en effectuant d'abord une division euclidienne entre le numérateur et le dénominateur des fractions en jeu.

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1+t+t^2}{1+t}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1+2t+3t^2}{4t+5}\,\mathrm{d}t$ ....

Synthèse

Calcul 15.4 — Mise sous forme canonique.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Mettre sous forme canonique les expressions suivantes (où $x \in \mathbb{R}$).

a) $x^2 + x + 1$ ....

b) $2x^2 - 3x + 1$ ....

c) $\sqrt{2}x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}$ ....

d) $ax^2 + a^2x + a^3$ ....

Calcul 15.5

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+2t+t^2}\,\mathrm{d}t$ ……………………………………

b) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t$ ……………………………………

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-t+t^2}\,\mathrm{d}t$ ……………………………………

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{6t^2-5t+1}\,\mathrm{d}t$ ……………………………………

e) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$ ……………………………………

▶ Réponses et corrigés page 50

Fiche de calcul n° 16 024A

Décomposition en éléments simples

Prérequis
Polynômes (factorisation, division euclidienne), primitives usuelles

Calculs de décompositions en éléments simples

Calcul 16.1 — Uniquement des pôles simples.

Effectuer la décomposition en éléments simples (sur $\mathbb{C}$) des fractions rationnelles suivantes.

a) $\dfrac{X^4-2}{X(X+1)(X+2)}$ ....

b) $\dfrac{X^3+2}{(X-1)X(X+1)}$ ....

c) $\dfrac{X^2}{(X-\pi)(X+\pi)}$ ....

Calcul 16.2

Même exercice.

a) $\dfrac{X+1}{(X+2)(X+\mathrm{e})}$ ....

b) $\dfrac{X^2+X+1}{(X-i)(X+i)(X-1)}$ ....

c) $\dfrac{X^2+2}{(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{3})}$ ....

Calcul 16.3 — Avec des pôles multiples.

Effectuer la décomposition en éléments simples (sur $\mathbb{C}$) des fractions rationnelles suivantes.

a) $\dfrac{X+1}{(X-1)^2(X-2)(X-3)}$ ..

b) $\dfrac{2+X^2}{(X+1)X^2(X-1)^2}$ ....

c) $\dfrac{1-X}{X(X+\pi)^2}$ ....

d) $\dfrac{1}{(X-i)^2(X-1-i)^2}$ ......

Calcul 16.4 — À vous de factoriser.

Effectuer la décomposition en éléments simples (sur $\mathbb{C}$) des fractions rationnelles suivantes.

a) $\dfrac{X-3}{X^4-1}$ ....

b) $\dfrac{2X^3+1}{X^4-3X^2+2X}$ ....

Calcul d'intégrales de fractions rationnelles

Calcul 16.5 — Pôles simples ou multiples.

Calculer les intégrales suivantes

a) $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x$ .....

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x+2)(x-2)}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(2x+1)(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$ .....

e) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$ ....

► Réponses et corrigés page 53

Réponses et corrigés

Fiche nº 1. Fractions

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{\dfrac{-1}{n(n+1)^2}}$

1.1 b) .... $\boxed{-\dfrac{ab}{a-b}}$

1.1 c) .... $\boxed{\dfrac{3}{2}n}$

1.2 .... $\boxed{\dfrac{n^3+n}{n+1}}$

1.3 a) .... $\boxed{4+\dfrac{5}{6}}$

1.3 b) .... $\boxed{1+\dfrac{1}{k-1}}$

1.3 c) .... $\boxed{3+\dfrac{5}{x-2}}$

1.4 .... $\boxed{2t}$

1.5 a) .... $\boxed{\dfrac{x}{x+1}}$

1.5 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{x-2}}$

1.5 c) .... $\boxed{\dfrac{2x}{x+1}}$

1.5 d) .... $\boxed{\dfrac{2}{x-2}}$

Corrigés

1.1 a) On met au même dénominateur. Cela donne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}&=\frac{n}{n(n+1)^2}+\frac{n(n+1)}{n(n+1)^2}-\frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2}=\frac{n+n(n+1)-(n+1)^2}{n(n+1)^2}\\&=\frac{n+n^2+n-(n^2+2n+1)}{n(n+1)^2}=\frac{-1}{n(n+1)^2}.\end{aligned}$$

1.1 b) On rappelle la formule : $a^3-b^3=(a-b)\big(ab+a^2+b^2\big)$. Cela donne :

$$\frac{a^3-b^3}{(a-b)^2}-\frac{(a+b)^2}{a-b}=\frac{(a-b)\big(ab+a^2+b^2\big)}{(a-b)^2}-\frac{(a+b)^2}{a-b}=\frac{ab+a^2+b^2}{a-b}-\frac{a^2+2ab+b^2}{a-b}=-\frac{ab}{a-b}.$$

1.1 c) Pour $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, on a :

$$\frac{\dfrac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\dfrac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}=\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}\times\frac{n^2(n-1)^2}{2n+2}=\frac{6(n+1)}{2(n-1)}\times\frac{n(n-1)}{2(n+1)}=\frac{3}{2}n.$$

1.2 De $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$, on a : $\displaystyle\frac{\sum_{k=0}^{n^2}k}{\sum_{k=0}^{n}k}=\frac{\dfrac{n^2(n^2+1)}{2}}{\dfrac{n(n+1)}{2}}=\frac{n^2(n^2+1)}{2}\,\frac{2}{n(n+1)}=\frac{n(n^2+1)}{n+1}=\frac{n^3+n}{n+1}.$

1.3 a) On trouve $\dfrac{29}{6}=\dfrac{4\times6+5}{6}=4+\dfrac{5}{6}$.

1.3 b) On trouve $\dfrac{k}{k-1}=\dfrac{k-1+1}{k-1}=1+\dfrac{1}{k-1}$.

1.3 c) On trouve $\dfrac{3x-1}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+5}{x-2}=3+\dfrac{5}{x-2}$.

1.4 Pour $t\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, on a :

$$A=\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{(1+t)^2}=\frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(1+t)^2}-\frac{1+t^2}{(1+t^2)(1+t)^2}=\frac{1+2t+t^2-\big(1+t^2\big)}{(1+t^2)(1+t)^2}=\frac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2}.$$

Donc, $AB=\left(\dfrac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2}\right)\times\big(1+t^2\big)(1+t)^2=2t.$

1.5 a) On met au même dénominateur les deux premières écritures fractionnaires : $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{x(x+1)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)} - \dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{x^2+x-2x+2}{(x+1)(x-1)} - \dfrac{2}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x^2-x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x}{x+1}$

1.5 b) Même méthode : $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{8}{x^2-4} = \dfrac{2(x-2)-(x+2)}{(x+2)(x-2)} + \dfrac{8}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{2x-4-x-2+8}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{1}{x-2}$

1.5 c) On commence par simplifier les puissances superflues, puis c'est le même principe que précédemment : $\dfrac{x^2}{x^2-x} + \dfrac{x^3}{x^3+x^2} - \dfrac{2x^2}{x^3-x} = \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{x(x+1+x-1)}{(x-1)(x+1)} - \dfrac{2x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{2x^2-2x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{2x}{x+1}$

1.5 d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{x^2-4} + \dfrac{2}{x^2-2x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)} + \dfrac{2}{x(x-2)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{2}{x(x-2)} = \dfrac{x-2+x}{x(x-2)} + \dfrac{2}{x(x-2)} = \dfrac{2}{x-2}$

Fiche n° 2. Calcul littéral

Réponses

2.1 a) .... $\boxed{x^5 - x^3 - x^2 + 1}$

2.1 b) .... $\boxed{x^4 + x^2 + 1}$

2.1 c) .... $\boxed{1 + x^4}$

2.1 d) .... $\boxed{1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4}$

2.2 a) .... $\boxed{(x + y - z)(x + y + z)}$

2.2 b) .... $\boxed{3(14x + 3y)(-4x + y)}$

2.2 c) .... $\boxed{(x + 1)(y + 1)}$

2.2 d) .... $\boxed{(x - 1)(y - 1)}$

2.2 e) .... $\boxed{(x + y)(x + 1)^2}$

2.2 f) .... $\boxed{\left(a^2 + b^2\right)\left(y - 4x^2\right)\left(y + 4x^2\right)}$

2.3 a) .... $\boxed{(x - 1)(x + 1)\left(x^2 + 1\right)}$

2.3 b) .... $\boxed{-8\left(x^2 + 1\right)(x - 4)(x + 4)}$

2.3 c) .... $\boxed{\left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right)}$

2.3 d) .... $\boxed{\left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right)}$

Corrigés

2.1 a) On calcule : $(x-1)^2(x+1)\left(x^2+x+1\right) = \left(x^2-1\right)\left(x^3-1\right) = x^5 - x^3 - x^2 + 1$.

....

2.2 b) On calcule $x^2 + 6xy + 9y^2 - 169x^2 = (x+3y)^2 - (13x)^2 = (14x+3y)(-12x+3y) = 3(14x+3y)(-4x+y)$.

....

2.2 e) On calcule $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy + x + y = (x+y)(x^2+2x+1) = (x+y)(x+1)^2$.

....

2.3 a) On calcule $x^4 - 1 = \left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right) = (x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$.

....

2.3 b) On calcule $\left(-9x^2+24\right)\left(8x^2+8\right)+64x^4-64 = -8\left(x^2+1\right)\left[9x^2-24-8\left(x^2-1\right)\right] = -8\left(x^2+1\right)(x-4)(x+4)$.

....

2.3 c) On calcule $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = \left(x^2+1\right) - x^2 = \left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$. La factorisation est alors terminée sur $\mathbb{R}$ puisque les deux équations, $x^2 + x + 1 = 0$ et $x^2 - x + 1 = 0$, n'ont pas de solutions réelles.

....

2.3 d) Une fois n'est pas coutume : on peut commencer par développer avant de factoriser. Ce qui donne

$$(ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 = \left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right).$$

Remarque : signalons tout de même qu'une autre voie (sans calcul) consiste à interpréter en termes de module d'un produit de deux nombres complexes !

....

Fiche n° 3. Sommes et produits

Réponses

3.1 a) .... $\boxed{\dfrac{9}{2}(3^{n-2}-1)}$

3.1 b) .... $\boxed{\dfrac{5^{n+1}-2^{n+1}}{3}}$

3.1 c) .... $\boxed{\dfrac{n+1}{2n}}$

3.1 d) .... $\boxed{3^{\frac{n(n+1)}{2}}}$

3.1 e) .... $\boxed{5^n(n!)^{\frac{3}{2}}}$

3.1 f) .... $\boxed{0}$

3.2 a) .... $\boxed{\dfrac{n(n+1)}{2}}$

3.2 b) .... $\boxed{0}$

3.2 c) .... $\boxed{n2^{n+1}+2(1-2^n)}$

3.2 d) .... $\boxed{\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}}$

3.3 a) .... $\boxed{(n+3)^3-2^3}$

3.3 b) .... $\boxed{\ln(n+1)}$

3.3 c) .... $\boxed{1-\dfrac{1}{(n+1)!}}$

3.3 d) .... $\boxed{(n+1)!-1}$

3.3 e) .... $\boxed{n+1}$

3.3 f) .... $\boxed{1-4n^2}$

3.3 g) .... $\boxed{\dfrac{1}{n}}$

3.3 h) .... $\boxed{\dfrac{n+1}{2n}}$

3.4 a) .... $\boxed{1-\dfrac{1}{n+1}}$

3.4 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+3}}$

3.5 a) .... $\boxed{2n^2+n}$

3.5 b) .... $\boxed{\dfrac{n(3n+1)}{2}}$

3.6 a) .... $\boxed{\dfrac{n(n^2-1)}{2}}$

3.6 b) ... $\boxed{\dfrac{n(n+1)(7n^2+13n+4)}{12}}$

3.6 c) .... $\boxed{\dfrac{n(n+1)}{2}\ln(n!)}$

3.6 d) .... $\boxed{\dfrac{n(n+1)(4n-1)}{6}}$

Corrigés

3.1 a) On utilise la formule pour les sommes géométriques : on a $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}3^k = 3^2\frac{1-3^{n-1-2+1}}{1-3} = \frac{9}{2}(3^{n-2}-1)$.

....

3.1 b) On factorise pour faire apparaître une somme géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n}2^k5^{n-k} = 5^n\sum_{k=0}^{n}2^k5^{-k} = 5^n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{5}\right)^k = 5^n\frac{1-(\frac{2}{5})^{n-0+1}}{1-\frac{2}{5}} = 5^{n+1}\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{3} = \frac{5^{n+1}-2^{n+1}}{3}.$$

....

3.1 c) On utilise la formule suivante : $\displaystyle\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k = \frac{n+1}{2n}$.

....

3.1 d) On utilise la formule suivante : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}3^k = 3^1\times3^2\times\cdots\times3^n = 3^{1+\cdots+n} = 3^{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}k\right)} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

....

3.1 e) On factorise et on utilise que $\sqrt{k}=k^{\frac{1}{2}}$: on a

$$\prod_{k=1}^{n}5\sqrt{k}\times k = 5^n\prod_{k=1}^{n}k^{\frac{3}{2}} = 5^n\left(\prod_{k=1}^{n}k\right)^{\frac{3}{2}} = 5^n(n!)^{\frac{3}{2}}.$$

....

3.1 f) Un produit est nul si l'un des termes est nul.

....

3.2 a) Avec ce changement ou renversement, on a $k=n+1-j$, les bornes varient alors de n à 1, on les remet dans le bon ordre. On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}n+1-k = \sum_{j=1}^{n}j = \frac{n(n+1)}{2}$.

....

3.2 b) On utilise la linéarité de la somme et on effectue ce changement ou renversement dans la seconde. On a $k = n + 1 - j$, les bornes varient alors de n à 1, on les remet dans le bon ordre. On a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.$$

....

3.2 c) Avec le changement d'indice, on a, en notant $S_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k$:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)2^{j+1} = \sum_{j=0}^{n-1} j2^{j+1} + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j+1} = 2\sum_{j=0}^{n-1} j2^j + 2\sum_{j=0}^{n-1} 2^j \\ &= 2\left[\sum_{j=1}^{n} j2^j - n2^n\right] + 2\frac{1-2^n}{1-2} = 2S_n - n2^{n+1} - 2(1-2^n) \end{aligned}$$

D'où $S_n = n2^{n+1} + 2(1-2^n) = (n-1)2^{n+1} + 2$.

....

3.2 d) On a $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+2} (k-2)^3 = \sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

....

3.3 a) On reconnaît une somme télescopique :

$$\sum_{k=2}^{n+2} (k+1)^3 - k^3 = 3^3 - 2^3 + 4^3 - 3^3 + \cdots + (n+3)^3 - (n+2)^3 = (n+3)^3 - 2^3.$$

....

3.3 b) On calcule :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(2) + \cdots + \ln(n+1) - [\ln(1) + \cdots + \ln(n)] = \ln(n+1).$$

....

3.3 c) En écrivant $k = k + 1 - 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{k+1-1}{(k+1)!}\right] = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!}\right] = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right] = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

....

3.3 d) En écrivant $k = k + 1 - 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k \times k! = \sum_{k=1}^{n} (k+1-1)k! = \sum_{k=1}^{n} [(k+1) \times k! - k!] = \sum_{k=1}^{n} [(k+1)! - k!] = (n+1)! - 1.$$

....

3.3 e) On écrit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \cdots \times \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{1} = n + 1.$

....

3.3 f) Dans cet exemple, il faut aller un terme plus loin pour voir le télescopage :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k-3} &= \frac{3}{-1} \times \frac{5}{1} \times \frac{7}{3} \times \cdots \times \frac{2(n-1)+1}{2(n-1)-3} \times \frac{2n+1}{2n-3} \\ &= \frac{2(n-1)+1}{-1} \times \frac{2n+1}{1} = -(2n-2+1)(2n+1) = -(2n-1)(2n+1) = 1 - 4n^2. \end{aligned}$$

....

3.3 g) En mettant au même dénominateur : $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k-1}{k}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$

....

3.3 h) Il faut remarquer l'identité remarquable et faire deux produits télescopiques :

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k\times k} = \left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\right)\times\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\right)\times\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n}\times\frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}.\end{aligned}$$

3.4 a) D'après la décomposition en éléments simples, on a $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$. En réduisant au même dénominateur et en identifiant, on trouve $a = 1$ et $b = -1$.

D'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$, en reconnaissant une somme télescopique.

3.4 b) D'après la décomposition en éléments simples, on a $\dfrac{1}{(k+2)(k+3)} = \dfrac{a}{k+2} + \dfrac{b}{k+3}$. En réduisant au même dénominateur et en identifiant, on trouve $a = 1$ et $b = -1$.

D'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+2)(k+3)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}$, en reconnaissant une somme télescopique.

3.5 a) Séparons les termes d'indices pairs et impairs. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k^2 &= \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n\\ k \text{ pair}}}(-1)^k k^2 + \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n\\ k \text{ impair}}}(-1)^k k^2 = \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n\\ k \text{ pair}}} k^2 + \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n\\ k \text{ impair}}}(-1)k^2\\ &= \sum_{p=0}^{n}(2p)^2 - \sum_{p=0}^{n-1}(2p+1)^2 = \sum_{p=0}^{n}4p^2 - \sum_{p=0}^{n-1}\left(4p^2+4p+1\right)\\ &= \underbrace{4\sum_{p=0}^{n}p^2 - 4\sum_{p=0}^{n-1}p^2}_{=4n^2} - 4\sum_{p=0}^{n-1}p - \sum_{p=0}^{n-1}1 = 4n^2 - 4\frac{n(n-1)}{2} - n = 2n^2+n.\end{aligned}$$

3.5 b) Séparons les termes plus petits que n et les autres. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n}\min(k,n) &= \sum_{k=0}^{n}\min(k,n) + \sum_{k=n+1}^{2n}\min(k,n)\\ &= \sum_{k=0}^{n}k + \sum_{k=n+1}^{2n}n = \frac{n(n+1)}{2} + n[2n-(n+1)+1] = \frac{n(n+1)}{2} + n^2 = \frac{n(3n+1)}{2}.\end{aligned}$$

3.6 a) Il faut faire attention à l'inégalité stricte :

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(i+j) &= \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}(i+j) = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1}i + \sum_{i=1}^{j-1}j\right) = \sum_{j=2}^{n}\left[\frac{j(j-1)}{2} + j(j-1)\right]\\ &= \sum_{j=2}^{n}\left[\frac{3}{2}(j^2-j)\right] = \frac{3}{2}\left(\sum_{j=2}^{n}j^2 - \sum_{j=2}^{n}j^2\right) = \frac{3}{2}\left[\left(\sum_{j=1}^{n}j^2\right) - 1 - \left(\sum_{j=1}^{n}j\right) + 1\right]\\ &= \frac{3}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{3n(n+1)(2n+1-3)}{3\times 2\times 2} = \frac{n(n+1)(n-1)}{2} = \frac{n(n^2-1)}{2}.\end{aligned}$$

3.6 b) On développe d'abord puis on choisit l'ordre de sommation qui semble faciliter les calculs :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i+j)^2 &= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i^2+2ij+j^2) = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i^2 + 2\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij + \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} j^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} i^2\right) + 2\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} ij\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} j^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(i^2\sum_{j=i}^{n}1\right) + 2\sum_{j=1}^{n}\left(j\sum_{i=1}^{j} i\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(j^2\sum_{i=1}^{j}1\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} i^2(n-i+1) + 2\sum_{j=1}^{n} j\frac{j(j+1)}{2} + \sum_{j=1}^{n} j^3 = \sum_{i=1}^{n}\left[i^2(n+1)-i^3\right] + \sum_{j=1}^{n}(j^3+j^2) + \frac{n^2(n+1)^2}{4}\\
&= (n+1)\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i^3 + \sum_{j=1}^{n} j^3 + \sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{n^2(n+1)^2}{4}\\
&= (n+2)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{4}\\
&= \frac{n(n+1)(7n^2+13n+4)}{12}.
\end{aligned}$$

3.6 c) On calcule :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\ln(i^j) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j\ln(i) = \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\ln(i)\right) = \frac{n(n+1)}{2}\ln\left(\prod_{i=1}^{n} i\right) = \frac{n(n+1)}{2}\ln(n!).$$

3.6 d) On fait une sommation par paquets :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\max(i,j) &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\max(i,j) + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}\max(i,j) + \sum_{1\leqslant j=i\leqslant n}\max(i,j)\\
&= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} j + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} i + \sum_{i=1}^{n} i\\
&= 2\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} j + \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{par symétrie}\\
&= 2\sum_{j=2}^{n} j(j-1) + \frac{n(n+1)}{2} = 2\sum_{j=1}^{n} j(j-1) + \frac{n(n+1)}{2}\\
&= 2\left[\sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{j=1}^{n} j\right] + \frac{n(n+1)}{2} = 2\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right] + \frac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{n(n+1)}{6}(4n+2-6+3) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.
\end{aligned}$$

Fiche n° 4. Coefficients binomiaux

Réponses

4.1 a) .... $\boxed{2^n \times n!}$

4.1 b) .... $\boxed{\dfrac{(2n+1)!}{2^n \times n!}}$

4.1 c) .... $\boxed{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}}$

4.1 d) .... $\boxed{\dfrac{k+1}{n-k}}$

4.1 e) .... $\boxed{\dfrac{1}{(n+1)!}}$

4.1 f) .... $\boxed{\dfrac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}}$

4.2 a) .... $\boxed{3^n}$

4.2 b) .... $\boxed{0}$

4.2 c) .... $\boxed{6^n}$

4.2 d) .... $\boxed{12 \times 15^n}$

4.3 a) .... $\boxed{2^n}$

4.3 b) .... $\boxed{n2^{n-1}}$

4.3 c) .... $\boxed{n(n+1)2^{n-2}}$

4.3 d) .... $\boxed{\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}}$

Corrigés

4.1 a) On peut mettre 2 en facteur de chaque nombre du produit $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)$, produit qui contient n facteurs. Ainsi,

$$2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n) = 2^n \times (1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n) = 2^n \times n!.$$

4.1 b) On multiplie le produit $3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n+1)$ par le produit $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)$ de la question précédente.

On obtient ainsi le produit de tous les entiers compris entre 2 et $(2n+1)$. Il s'agit donc de $(2n+1)!$.

Donc, on a

$$3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)} = \frac{(2n+1)!}{2^n \times n!}.$$

4.1 c) Par définition, $\displaystyle\binom{n}{3} = \frac{n!}{3! \times (n-3)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)!}{3! \times (n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

4.1 d) On calcule

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} = \frac{\frac{n!}{k! \times (n-k)!}}{\frac{n!}{(k+1)! \times (n-(k+1))!}} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!} \times \frac{(k+1)! \times (n-(k+1))!}{n!}$$

$$= \frac{(k+1) \times k! \times (n-k-1)!}{k! \times (n-k) \times (n-k-1)!} = \frac{k+1}{n-k}.$$

4.1 e) On réduit au même dénominateur $\displaystyle\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1) \times n!} - \frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)-n}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}$.

4.1 f) On réduit au même dénominateur

$$\frac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \frac{n!}{2^{2n}} = \frac{(n+1)!}{2^{2n+2}} - \frac{2^2 \times n!}{2^2 \times 2^{2n}} = \frac{(n+1)! - 4 \times n!}{2^{2n+2}} = \frac{(n+1) \times n! - 4 \times n!}{2^{2n+2}} = \frac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}.$$

4.2 a) On constate que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \times 1^{n-k} = (2+1)^n = 3^n$.

4.2 b) On constate que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1) \times \binom{n}{k} (-1)^k \times 1^{n-k} = -1 \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \times 1^{n-k} = (-1) \times (-1+1)^n = 0.$$

4.2 c) On calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{2n-k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} 2^n \times 2^{n-k}\binom{n}{k} = 2^n \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}2^{n-k} \times 1^k = 2^n \times (1+2)^n = 2^n \times 3^n = 6^n$.

4.2 d) On calcule

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} 2^{k+2}\binom{n}{k} \times 3^{2n-k+1} &= \sum_{k=0}^{n} 2^2 \times 2^k \times \binom{n}{k} \times 3^{n+1} \times 3^{n-k}\\ &= 4 \times 3^{n+1} \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}2^k \times 3^{n-k}\\ &= 4 \times 3^{n+1} \times (2+3)^n = 4 \times 3^{n+1} \times 5^n = 4 \times 3 \times 3^n \times 5^n = 12 \times 15^n.\end{aligned}$$

4.3 a) On développe $(1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}x^k$. On évalue en $x=1$ pour obtenir $(1+1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

4.3 b) On dérive par rapport à x la relation $(1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}x^k$.

On obtient $n(1+x)^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times k \times x^{k-1}$.

On évalue en $x=1$ pour obtenir $n(1+1)^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times k$. Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times k = n2^{n-1}$.

4.3 c) On dérive deux fois par rapport à x la relation $(1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}x^k$.

On obtient $n(n-1)(1+x)^{n-2} = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) \times x^{k-2}$.

On évalue en $x=1$ pour obtenir $n(n-1)(1+1)^{n-2} = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1)$. Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) = n(n-1)2^{n-2}$.

Or, par linéarité, on a $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2 - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k$. Donc,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2 = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}.$$

4.3 d) On intègre entre 0 et x la relation $(1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}x^k$. On obtient

$$\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}x^{k+1}.$$

On évalue en $x=1$ pour obtenir

$$\frac{1}{n+1}(1+1)^{n+1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}.$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Fiche n° 5. Racines carrées

Réponses

5.1 a) .... $\boxed{\pi - 3}$

5.1 b) .... $\boxed{|3-a|}$

5.2 a) .... $\boxed{x - \sqrt{x^2-1}}$

5.2 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x-1}}$

5.2 c) .... $\boxed{\dfrac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}}$

5.2 d) .... $\boxed{-4(x-1)^2}$

5.3 a) .... $\boxed{\sqrt{2}}$

5.3 b) .... $\boxed{2\sqrt{2}}$

5.4 a) .... $\boxed{-11+5\sqrt{5}}$

5.4 b) .... $\boxed{2\sqrt{2}}$

5.4 c) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}}$

5.4 d) .... $\boxed{1+\sqrt{2}}$

5.4 e) .... $\boxed{1+\sqrt{2}}$

5.4 f) .... $\boxed{\ln(1+\sqrt{2})}$

Corrigés

5.1 b) On trouve $|3-a|$, c'est-à-dire $3-a$ si $a \leqslant 3$ et $a-3$ si $a \geqslant 3$.

....

5.2 c) Le calcul donne $f''(x) = -\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(x-1)^{3/2}}$ d'où :

$$f(x) + 4f''(x) = \sqrt{x-1} - \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}} = \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}\left((x-1)^2 - 1\right) = \frac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}.$$

....

5.3 a) On calcule :

$$\left(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 = 3+\sqrt{5} - 2\sqrt{3+\sqrt{5}}\sqrt{3-\sqrt{5}} + 3 - \sqrt{5} = 6 - 2\sqrt{9-5} = 6 - 2\sqrt{4} = 6-4 = 2.$$

De plus, $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} \geqslant 0$, donc $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{2}$.

....

5.4 c) On pose $A := \dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. On a :

$$A = \frac{1}{1+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)} = \frac{1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(1+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)\left(1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)} = \frac{1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{4+2\sqrt{6}}.$$

Ainsi, la technique de la « quantité conjuguée » n'est pas suffisante ici ; mais on peut la réappliquer. On a

$$A = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1\right)\left(4-2\sqrt{6}\right)}{\left(4+2\sqrt{6}\right)\left(4-2\sqrt{6}\right)} = \frac{4\sqrt{2}-4\sqrt{3}+4\sqrt{3}-6\sqrt{2}-4+2\sqrt{6}}{16-24} = \frac{2\sqrt{2}+4-2\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}.$$

Ainsi, on a $\boxed{\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}}$: ce qu'on cherchait.

Remarque : on pouvait aussi faire un autre type de quantité conjuguée :

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}.$$

....

5.4 d) On calcule $3+2\sqrt{2} = 2+2\sqrt{2}+1 = (\sqrt{2})^2 + 2\times 1\times\sqrt{2} + 1^2 = (1+\sqrt{2})^2$ et on trouve donc

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}.$$

....

Fiche n° 6. Manipulation des fonctions usuelles

Réponses

6.1 a) .... $\boxed{2}$

6.1 b) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{6}}$

6.2 a) .... $\boxed{1}$

6.2 b) .... $\boxed{\dfrac{4}{3}}$

6.2 c) .... $\boxed{\dfrac{13}{12}}$

6.2 d) .... $\boxed{\dfrac{3}{5}}$

6.3 a) .... $\boxed{\dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}}$

6.3 b) .... $\boxed{\left\{0;\dfrac{1}{2}\right\}}$

6.3 c) .... $\boxed{\dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\ln(3)}}$

6.4 a) .... $\boxed{1}$

6.4 b) .... $\boxed{0}$

6.4 c) .... $\boxed{\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\} \cup\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}}$

6.4 d) .... $\boxed{1}$

6.5 a) .... $\boxed{\{\ln(\sqrt{5}-2);\ln(\sqrt{5}+2)\}}$

6.5 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln(2)}$

6.5 c) .... $\boxed{[-\ln(4+\sqrt{15}),\ln(4+\sqrt{15})]}$

6.5 d) .... $\boxed{\left]-\infty,\dfrac{1}{2}\ln(3)\right]}$

6.6 a) .... $\boxed{x\mapsto \ln(2)\times 2^x+2x}$

6.6 b) .... $\boxed{x\mapsto (\ln(x)+1)x^x}$

6.6 c) .... $\boxed{x\mapsto \dfrac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}\arccos(x)^2}}$.

6.6 d) .... $\boxed{x\mapsto 2x\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}}$

6.6 e) .... $\boxed{x\mapsto \dfrac{1-\text{th}^2(x)}{1+\text{th}^2(x)}}$

6.6 f) .... $\boxed{x\mapsto \text{sh}(x)\text{ch}(\text{ch}(x))}$

6.6 g) .... $\boxed{x\mapsto 0}$

6.6 h) .... $\boxed{x\mapsto 0}$

Corrigés

6.1 a) On calcule : $\dfrac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\dfrac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{6}}=2.$

6.1 b) On remarque que $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\arctan\left(\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=\dfrac{\pi}{6}.$

6.2 b) On calcule : $\text{sh}(\ln(3))=\dfrac{e^{\ln(3)}-e^{-\ln(3)}}{2}=\dfrac{3-\frac{1}{3}}{2}=\dfrac{\frac{8}{3}}{2}=\dfrac{4}{3}.$

6.2 c) On calcule : $\text{ch}(\ln(2/3))=\dfrac{e^{\ln(2/3)}+e^{-\ln(2/3)}}{2}=\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}}{2}=\dfrac{\frac{13}{6}}{2}=\dfrac{13}{12}.$

6.2 d) On sait que $\text{th}(\ln(2))=\dfrac{e^{\ln(2)}-e^{-\ln(2)}}{e^{\ln(2)}+e^{-\ln(2)}}=\dfrac{2-\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}}=\dfrac{3}{5}.$

6.3 a) Soit $x\in\mathbb{R}$. Posons $X=2^x$. Alors $2^x+4^x=4\Leftrightarrow X+X^2-4=0$. Cette équation a pour discriminant $1+16=17$, d'où deux racines, $\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$. Seule la racine $\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}$ est positive, donc $2^x+4^x=4\Leftrightarrow 2^x=\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}\Leftrightarrow$ $x\ln(2)=\ln\left(\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}\right)\Leftrightarrow x=\dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}.$

6.3 b) Soit $x\in\mathbb{R}$. Notons $X=4^x$. Alors $16^x-3\times 4^x+2=0\Leftrightarrow X^2-3X+2=0\Leftrightarrow (X-1)(X-2)=0\Leftrightarrow 4^x=1$ ou $4^x=2\Leftrightarrow x=0$ ou $x=\dfrac{1}{2}.$

6.3 c) Soit $x\in\mathbb{R}$. Posons $X=3^x$.
Alors on a l'équivalence $3^x+3^{2x}-1=0\Leftrightarrow X^2+X-1=0$. Cette équation a pour discriminant $1+4=5$, donc les deux

solutions de l'équation sont $\dfrac{-1 \pm 5}{2}$. La seule solution positive est $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, donc $3^x + 3^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 3^x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow x\ln(3) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

6.4 a) Ici, pas de calcul : $\arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2}$ et, par stricte croissance de arcsin, l'unique solution est 1.

6.4 b) Soit $x \in [-1,1]$. Alors $\cos(\arccos(x)) = 0 \Leftrightarrow \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Mais comme arccos est à valeurs dans $[0,\pi]$, $\cos(\arccos(x)) = 0 \Leftrightarrow \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 0$.

6.4 c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\arcsin(\sin(x)) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

6.4 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\tan(\arctan(x)) = 1 \Leftrightarrow \arctan(x) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 1$.

6.5 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = \mathrm{e}^x$. Alors on a les équivalences (comme $\mathrm{e}^x > 0$)

$$\mathrm{ch}(x) = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow X + \frac{1}{X} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow X^2 + 1 = 2\sqrt{5}X \Leftrightarrow X^2 - 2\sqrt{5}X + 1 = 0.$$

Il s'agit donc d'une équation du second degré, dont le discriminant est $20 - 4 = 16$, donc les deux solutions de l'équation sont $\dfrac{2\sqrt{5} \pm 4}{2} = \sqrt{5} \pm 2$. Ces deux quantités sont positives, on a donc l'équivalence $\mathrm{ch}(x) = \sqrt{5} \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = \sqrt{5} \pm 2 \Leftrightarrow x = \ln(\sqrt{5} \pm 2)$. Ainsi, les deux solutions sont $\{\ln(\sqrt{5}-2); \ln(\sqrt{5}+2)\}$

6.5 b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = \mathrm{e}^x$. Alors $\mathrm{th}(x) = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{X - \frac{1}{X}}{X + \frac{1}{X}} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow X^2 - 1 = \dfrac{1}{3}(X^2+1) \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}X^2 - \dfrac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow X^2 = 2 \Leftrightarrow X = \pm\sqrt{2}$. Ainsi, la seule solution positive étant $\sqrt{2}$, $\mathrm{th}(x) \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\ln(2)$.

6.5 c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = \mathrm{e}^x$. Alors $\mathrm{ch}(x) \leqslant 4 \Leftrightarrow \dfrac{X + \frac{1}{X}}{2} \leqslant 4 \Leftrightarrow X^2 + 1 \leqslant 8X \Leftrightarrow X^2 - 8X + 1 \leqslant 0$. Ce polynôme du second degré a pour discriminant 60 et pour racines $\dfrac{8 \pm 2\sqrt{15}}{2} = 4 \pm \sqrt{15}$. Les deux racines sont positives, donc $\mathrm{ch}(x) \leqslant 4 \Leftrightarrow 4 - \sqrt{15}\mathrm{e}^x \leqslant 4 + \sqrt{15} \Leftrightarrow \ln(4-\sqrt{15}) \leqslant x \leqslant \ln(4+\sqrt{15})$. On remarque ensuite que $\dfrac{1}{4-\sqrt{15}} = \dfrac{4+\sqrt{15}}{(5-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})} = 4 + \sqrt{15}$.

6.5 d) Soit $x \in \mathbb{R}$, posons $X = \mathrm{e}^x$. Alors, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{th}(x) \leqslant \frac{1}{2} &\Longleftrightarrow \frac{X - \frac{1}{X}}{X + \frac{1}{X}} \leqslant \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \frac{X^2-1}{X^2+1} \leqslant \frac{1}{2} \\ &\Longleftrightarrow X^2 - 1 \leqslant \frac{X^2+1}{2} \Longleftrightarrow X^2 - 3 \leqslant 0 \\ &\Longleftrightarrow X^2 \leqslant 3 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{2x} \leqslant 3 \Longleftrightarrow x \leqslant \frac{1}{2}\ln(3).\end{aligned}$$

6.6 a) On n'oublie pas que $2^x = \mathrm{e}^{x\ln(2)}$. Donc la dérivée de $x \mapsto 2^x$ est $x \mapsto \ln(2).2^x$.

6.6 b) On écrit que $x^x = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$. Ainsi la dérivée de la fonction est $x \mapsto (\ln(x)+1)\mathrm{e}^{x\ln(x)}$.

6.6 c) On dérive un quotient : en notant f la fonction et si $x \in]-1,1[$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arccos(x) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin(x)}{\arccos(x)^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}\arccos(x)^2}.$$

6.6 d) On dérive une composée $x \mapsto 2x\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$.

6.6 e) Il s'agit de dériver th :

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)^2} = \frac{\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2}{\mathrm{ch}(x)^2} = 1 - \frac{\mathrm{sh}(x)^2}{\mathrm{ch}(x)^2} = 1 - \mathrm{th}(x)^2.$$

La suite se dérive comme la dérivée d'une composée.

6.6 g) La fonction est dérivable sur $]-1,1[$ et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$.

6.6 h) La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{-1}{x^2}\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2+1} = 0$.

Fiche nº 7. Expressions algébriques

Réponses

7.1 a) .... $\boxed{7a^2+12a+7}$

7.1 b) .... $\boxed{a^2-1}$

7.1 c) .... $\boxed{4a^2-a-3}$

7.1 d) .... $\boxed{-a^2+1}$

7.2 a) .... $\boxed{a^2+2}$

7.2 b) .... $\boxed{a^3+3a}$

7.2 c) .... $\boxed{a^4+4a^2+2}$

7.3 a) .... $\boxed{a^2-2b}$

7.3 b) .... $\boxed{a^3-3ab+3c}$

7.3 c) .... $\boxed{ab-c}$

7.3 d) .... $\boxed{ac}$

7.3 e) .... $\boxed{0}$

7.3 f) .... $\boxed{\dfrac{b}{c}}$

Corrigés

7.1 a) On développe $(a+2)^3 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8$, puis on simplifie sachant que $a^3 = a^2 - 1$.

7.1 b) De $a^3 = a^2 - 1$, on déduit $a^6 = a^3(a^2-1) = a^5 - a^3$ et donc $a^5 - a^6 = a^3$. De plus $a^3 = a^2 - 1$.

7.1 c) On commence par $a^6 = (a^3)^2 = (a^2-1)^2 = a^4 - 2a^2 + 1 = -a^2 - a$ puis $a^{12} = (-a^2-a)^2 = a^4 + 2a^3 + a^2$.

7.1 d) L'égalité $a^3 - a^2 + 1$ peut s'écrire $a(a - a^2) = 1$ ce qui montre que $a \neq 0$ et $\dfrac{1}{a} = a - a^2$. Alors $\dfrac{1}{a^2} = 1 - a$.

7.2 a) On complète le carré : $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 + 2 \cdot x \cdot \dfrac{1}{x}$.

7.2 b) On se ramène au résultat précédent : $x^3 - \dfrac{1}{x^3} = x\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{1}{x}\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + \left(x - \dfrac{1}{x}\right) = a(a^2+2) + a$.

7.2 c) De même : $x^4 + \dfrac{1}{x^4} = x^2\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{1}{x^2}\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - 2 = (a^2+2)^2 - 2$.

7.3 a) On développe $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$ puis on conclut par soustraction.

7.3 b) Le développement $(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3\big[x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y)\big] + 6xyz$ conduit par soustraction à $a^3 - 3(ab - 3c) - 6c$ d'après l'expression précédente.

7.3 c) *Première solution* : on développe et on obtient une combinaison des expressions précédentes.

Deuxième solution : on reconnaît $(a-z)(a-x)(a-y) = a^3 - (x+y+z)a^2 + (xy+yz+zx)a - xyz$.

7.3 d) En factorisant, on reconnaît $(x+y+z)xyz$.

7.3 e) On réduit au même dénominateur $(x-y)(y-z)(z-x)$ puis on développe le numérateur.

7.3 f) Réduire au même dénominateur.

Fiche n° 8. Dérivation

Réponses

8.1 a) .... $\boxed{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}$

8.1 b) .... $\boxed{\dfrac{9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}}$

8.1 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{1-x^2}}$

8.1 d) .... $\boxed{\dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{x\sin(x)}}$

8.1 e) .... $\boxed{\dfrac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2}}$

8.1 f) .... $\boxed{\dfrac{2}{x+1}\left(x+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)}$

8.1 g) .... $\boxed{\dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}}$

8.1 h) .... $\boxed{\dfrac{x^2}{(x+1)^2}}$

8.1 i) .... $\boxed{\dfrac{2}{x(1-\ln(x))^2}}$

Corrigés

8.1 a) On calcule : $f'(x)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\times\left(\frac{-1}{x^2}\right)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

8.1 b) On calcule : $f'(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}-x\frac{1}{2\sqrt{9-x^2}}(-2x)}{\sqrt{9-x^2}^2}=\dfrac{\sqrt{9-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2}=\dfrac{\frac{9-x^2+x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2}=\dfrac{9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$

8.1 c) On a trois fonctions composées à la suite : $f=\ln(\sqrt{u})$). Donc on a, en appliquant deux fois la formule de dérivée d'une fonction composée : $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{u-x)}}\times u'(x)\times\dfrac{1}{\sqrt{u(x)}}$.

On calcule :

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}}\times\frac{1(x-1)-(x+1)\times 1}{(x-1)^2}\times\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}}\\&=\frac{1}{2\times\dfrac{x+1}{x-1}}\times\frac{-2}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x+1)(x-1)}\\&=\frac{-1}{x^2-1}=\frac{1}{1-x^2}.\end{aligned}$$

8.1 d) On calcule : $f'(x)=\dfrac{\cos(x)\times x-\sin(x)\times 1}{x^2}\times\dfrac{x}{\sin(x)}=\dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{x\sin(x)}$.

8.1 e) On calcule : $f'(x)=\dfrac{-(-1)}{(3-x)^2}+\dfrac{-1}{(2+x)^2}=\dfrac{(2+x)^2-(3-x)^2}{(3-x)^2(2+x)^2}=\dfrac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2}$.

8.1 f) On calcule : $f'(x)=2x-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2x(x+1)-1}{x+1}=\dfrac{2x^2+2x-1}{x+1}$.

Pour le trinôme $2x^2+2x-1$, on calcule $\Delta=4-4\times 2\times(-1)=12$. On a deux racines :

$$x_1=\frac{-2-\sqrt{12}}{2\times 2}=\frac{-2-2\sqrt{3}}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\quad\text{et}\quad x_2=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}.$$

Enfin, on a $f'(x)=\dfrac{2(x-\frac{-1-\sqrt{3}}{2})(x-\frac{-1+\sqrt{3}}{2})}{x+1}=\dfrac{2}{x+1}\left(x+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

8.1 g) On calcule : $f'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+2}-\dfrac{1\times(x-1)-(x+2)\times 1}{(x-1)^2}=\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}+\dfrac{3}{(x-1)^2}$.

On cherche les racines du trinôme $x^2 + x - 2$ dont le discriminant est $\Delta = 1 + 8 = 9$; on identifie deux racines $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. D'où la forme factorisée : $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$.

Alors : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{(x+2)(x-1)} + \dfrac{3}{(x-1)^2} = \dfrac{(2x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)^2} + \dfrac{3(x+2)}{(x+2)(x+1)^2} = \dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$.

Le trinôme $2x^2 + 2x + 5$ dont le discriminant est $\Delta = 4 - 4 \times 2 \times 5 = -36 < 0$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

On a : $f'(x) = \dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$.

....

8.1 h) On calcule :

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1 \times (x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} + 1 - 2\frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x+1)^2} + 1 - \frac{2}{x+1} = \frac{1 + (x+1)^2 - 2(x+1)}{(x+1)^2} \\
&= \frac{1 + x^2 + 2x + 1 - 2x - 2}{(x+1)^2} = \frac{x^2}{(x+1)^2}.
\end{aligned}
$$

....

8.1 i) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1 - \ln(x)) - (1 + \ln(x))\frac{-1}{x}}{(1 - \ln(x))^2} = \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}}{(1 - \ln(x))^2} = \dfrac{\frac{2}{x}}{(1 - \ln(x))^2} = \dfrac{2}{x(1 - \ln(x))^2}$.

....

Fiche n° 9. Nombres complexes

Réponses

9.1 a) ... $\boxed{-119+120\mathrm{i}}$

9.1 b) ...... $\boxed{\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}\mathrm{i}}$

9.1 c) ...... $\boxed{\dfrac{4}{29}-\dfrac{19}{29}\mathrm{i}}$

9.1 d) ...... $\boxed{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}$

9.2 a) .... $\boxed{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$

9.2 b) .... $\boxed{2e^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}}$

9.2 c) .... $\boxed{10\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}$

9.2 d) .. $\boxed{2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$

Corrigés

9.1 a) On développe :

$(2-3\mathrm{i})^4 = \left((2-3\mathrm{i})^2\right)^2 = (4-2\times 2\times 3\mathrm{i}-9)^2 = (-5-12\mathrm{i})^2 = (5+12\mathrm{i})^2 = 5^2+2\times 5\times 12\mathrm{i}-12^2 = -119+120\mathrm{i}.$
Ou bien : avec la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}(2-3\mathrm{i})^4 &= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}2^k(-3\mathrm{i})^{4-k}\\ &= (-3\mathrm{i})^4+4\times 2\times(-3\mathrm{i})^3+6\times 2^2\times(-3\mathrm{i})^2+4\times 2^3\times(-3\mathrm{i})+2^4\\ &= 81+216i-216-96\mathrm{i}+16 = -119+120\mathrm{i}.\end{aligned}$$

9.1 b) On utilise l'expression conjuguée : $\dfrac{1}{3-\mathrm{i}} = \dfrac{3+\mathrm{i}}{(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})} = \dfrac{3+\mathrm{i}}{3^2+1^2} = \dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}\mathrm{i}$

9.1 c) On utilise l'expression conjuguée et on développe :

$\dfrac{2-3\mathrm{i}}{5+2\mathrm{i}} = \dfrac{(2-3\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})}{(5+2\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})} = \dfrac{10-4\mathrm{i}-15\mathrm{i}-6}{5^2+2^2} = \dfrac{4}{29}-\dfrac{19}{29}\mathrm{i}.$

9.1 d) On utilise la définition de l'écriture exponentielle et la trigonométrie :

$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$

9.2 a) On a $|-2\mathrm{i}| = 2$ et $-\mathrm{i} = \bar{\mathrm{i}} = \overline{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}} = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$.

9.2 b) On écrit que $-2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ et on utilise les propriétés de l'exponentielle :

$-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi+\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}.$

9.2 c) On calcule $|-5+5\mathrm{i}\sqrt{3}| = \sqrt{25+75} = 10$ puis on écrit

$-5+5\mathrm{i}\sqrt{3} = 10\left(-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right).$

9.2 d) On écrit que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$

Ainsi, $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right| = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ $\left(\text{car } \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\geqslant 0 \text{ et } \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right| = 1\right)$ et $\arg\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right) = \arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}) = \dfrac{\pi}{4}$.

On en déduit que l'écriture exponentielle de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ est $2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

Fiche n° 10. Trigonométrie et nombres complexes

Réponses

10.1 a) ... $\boxed{-\frac{1}{8}\cos(6x)+\frac{1}{4}\cos(4x)-\frac{3}{8}\cos(2x)+\frac{1}{4}}$

10.1 b) ... $\boxed{-\frac{\sin(9x)}{8}+\frac{3\sin(5x)}{8}-\frac{\sin(3x)}{8}-\frac{3\sin(x)}{8}}$

10.2 a) .... $\boxed{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}}$

10.2 b) .... $\boxed{2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{\frac{-7i\pi}{12}}}$

10.2 c) .... $\boxed{2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)e^{\frac{5i\pi}{12}}}$

10.2 d) .... $\boxed{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)}e^{\frac{13i\pi}{24}}}$

10.2 e) .... $\boxed{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{5\pi}{12}}}$

10.2 f) .... $\boxed{2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{11\pi}{12}}}$

10.3 a) .... $\boxed{2\cos(2x)\cos(x)}$

10.3 b) .... $\boxed{2\cos(4x)\sin(x)}$

10.3 c) .... $\boxed{\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}$

Corrigés

10.1 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\cos^2(2x)\sin^2(x) &= \left(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{16}\left(e^{4ix}+2+e^{-4ix}\right)\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right)\\ &= -\frac{1}{16}\left(e^{6ix}-2e^{4ix}+e^{2ix}+2e^{2ix}-4+2e^{-2ix}+e^{-2ix}-2e^{-4ix}+e^{-6ix}\right)\\ &= -\frac{1}{16}\left(e^{6ix}+e^{-6ix}-2(e^{4ix}+e^{-4ix})+3(e^{2ix}+e^{-2ix})-4\right) = -\frac{1}{8}\cos(6x)+\frac{1}{4}\cos(4x)-\frac{3}{8}\cos(2x)+\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

10.1 b) On calcule :

$$\begin{aligned}\cos(3x)\sin^3(2x) &= \left(\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{16i}\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)\left(e^{6ix}-3e^{2ix}+3e^{-2ix}-e^{-6ix}\right)\\ &= -\frac{1}{16i}\left(e^{9ix}-e^{-9ix}-3(e^{5ix}-e^{-5ix})+e^{3ix}-e^{-3ix}+3(e^{ix}-e^{-ix})\right)\\ &= -\frac{1}{8}\sin(9x)+\frac{3}{8}\sin(5x)-\frac{1}{8}\sin(3x)-\frac{3}{8}\sin(x).\end{aligned}$$

10.2 a) $1+e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{-\frac{i\pi}{12}}+e^{\frac{i\pi}{12}}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0}e^{i\frac{\pi}{12}}.$

10.2 b) $e^{-i\frac{\pi}{6}}-1 = e^{-i\frac{\pi}{12}}\left(e^{-i\frac{\pi}{12}}-e^{i\frac{\pi}{12}}\right) = e^{-i\frac{\pi}{12}}\left(-2i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{-i\frac{\pi}{12}-i\frac{\pi}{2}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{-\frac{7i\pi}{12}}.$

10.2 c) $1+ie^{i\frac{\pi}{3}} = 1+e^{i\frac{5\pi}{6}} = e^{\frac{5i\pi}{12}}2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)e^{\frac{5i\pi}{12}}$

10.2 d) On fait le quotient de a) et f).

10.2 e) $e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}}{2}}\left(e^{i\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}}{2}}+e^{i\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}{2}}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0}e^{i\frac{5\pi}{12}}.$

10.2 f) $e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}}{2}}\left(e^{i\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}}{2}}-e^{i\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}{2}}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)ie^{5i\frac{\pi}{12}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{5i\frac{\pi}{12}+i\frac{\pi}{2}} = \underbrace{2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0}e^{i\frac{11\pi}{12}}.$

10.3 a) $\cos(x)+\cos(3x)=\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x})=\mathrm{Re}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+3x}{2}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-x)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\Big)=\mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}2\cos(x)\big)=2\cos(2x)\cos(x)$.

10.3 b) $\sin(5x)-\sin(3x)=\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x})=\mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\big)=\mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}2\mathrm{i}\sin(x)\big)=2\cos(4x)\sin(x)$.

10.3 c) Si $x\in 2\pi\mathbb{Z}$, alors cette somme vaut 0. Sinon, $\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)=\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x})$

$=\mathrm{Im}\big(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^2+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^3\big)$. Or, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\neq 1$ donc $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^2+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^3=\dfrac{1-\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}$.

On utilise maintenant l'astuce de l'arc moitié. On obtient,

$$\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)=\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}}\frac{-2\mathrm{i}\sin(2x)}{-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)=\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3x}{2}}\frac{\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)=\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Fiche n° 11. Primitives

Réponses

11.1 a) .... $\boxed{-\dfrac{3}{2(t+2)^2}}$

11.1 b) .... $\boxed{-\sqrt{1-t^2}}$

11.1 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}\ln^4 t}$

11.1 d) .... $\boxed{-\dfrac{2}{3t^{\frac{3}{2}}}}$

11.1 e) .... $\boxed{\tan t - t}$

11.1 f) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\tan^2 t + \ln|\cos t|}$

11.1 g) .... $\boxed{2\sqrt{\tan t}}$

11.1 h) .... $\boxed{\ln|\mathrm{Arcsin}(t)|}$

11.2 a) .... $\boxed{-\cos t + \dfrac{1}{3}\cos^3 t}$

11.2 b) .... $\boxed{\ln(1+\sin^2 t)}$

11.2 c) .... $\boxed{\ln|\tan t|}$

11.2 d) .... $\boxed{-\mathrm{cotan} t + \tan t}$

11.2 e) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}\ln|\tan 2t|}$

11.3 a) .... $\boxed{t + \ln|t| - \dfrac{1}{t}}$

11.3 b) .... $\boxed{\ln|t| - \dfrac{1}{2t^2}}$

11.3 c) .... $\boxed{t + \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{t^5}{5}}$

11.3 d) .... $\boxed{t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3}}$

11.3 e) .... $\boxed{t - 2\ln|t+1|}$

11.3 f) .... $\boxed{t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} - \ln|t+1|}$

11.3 g) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2) - \mathrm{Arctan}(t)}$

11.3 h) .... $\boxed{\ln|t+1| + \dfrac{1}{t+1}}$

Corrigés

11.1 a) Admet des primitives sur $]-\infty,-2[$ ou $]-2,+\infty[$.

11.1 e) $\displaystyle\int^t \tan^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \int^t ((1+\tan^2\theta)-1)\,\mathrm{d}\theta = \tan t - t + \mathrm{cte}$

11.1 f) $\displaystyle\int^t \tan^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \int^t ((\tan^2\theta+1)\tan\theta - \tan\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\tan^2 t + \ln|\cos t| + \mathrm{cte}$

11.2 a) $\displaystyle\int^t \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \int^t (1-\cos^2\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -\cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t + \mathrm{cte}$

11.2 b) $\displaystyle\int^t \frac{\sin(2\theta)}{1+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \ln(1+\sin^2 t) + \mathrm{cte}$

11.2 c) $\displaystyle\int^t \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \int^t \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta = \ln|\sin t| - \ln|\cos t| + \mathrm{cte} = \ln|\tan t| + \mathrm{cte}$

11.2 d) $\displaystyle\int^t \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)} = \int^t \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \left(\frac{1}{\sin^2\theta} + \frac{1}{\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta = -\mathrm{cotan}(t) + \tan(t) + \mathrm{cte}$

11.2 e) On a

$$\begin{aligned}\int^t \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin(4\theta)} &= \int^t \frac{\cos^2(2\theta)+\sin^2(2\theta)}{2\sin(2\theta)\cos(2\theta)}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int^t \frac{1}{4}\left(\frac{2\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)} + \frac{2\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)}\right)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\ln|\sin(2t)| - \frac{1}{4}\ln|\cos(2t)| + \text{cte} = \frac{1}{4}\ln|\tan 2t| + \text{cte}.\end{aligned}$$

11.3 c) On a $1-t^6 = 1^3 - (t^2)^3 = (1-t^2)(1+t^2+t^4)$ donc finalement on cherche une primitive de $1+t^2+t^4$.

11.3 e) $\displaystyle\int^t \frac{\theta-1}{\theta+1}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \frac{\theta+1-2}{\theta+1}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \left(1 - \frac{2}{\theta+1}\right)\mathrm{d}\theta = t - 2\ln|t+1| + \text{cte}$

11.3 f) $\displaystyle\int^t \frac{\theta^3}{\theta+1}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \frac{\theta^3+1-1}{\theta+1}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \frac{(\theta+1)(1-\theta+\theta^2)-1}{\theta+1}\,\mathrm{d}\theta = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ln|t+1| + \text{cte}$

11.3 h) $\displaystyle\int^t \frac{\theta}{(\theta+1)^2}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \frac{\theta+1-1}{(\theta+1)^2}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \left(\frac{1}{\theta+1} - \frac{1}{(\theta+1)^2}\right)\mathrm{d}\theta = \ln|t+1| + \frac{1}{t+1} + \text{cte}$

Fiche n° 12. Calcul d'intégrales

Réponses

12.1 a) .... $\boxed{14}$

12.1 b) .... $\boxed{50}$

12.1 c) .... $\boxed{\dfrac{147}{2}}$

12.1 d) .... $\boxed{-54}$

12.1 e) .... $\boxed{0}$

12.1 f) .... $\boxed{\dfrac{5}{2}}$

12.2 a) .... $\boxed{0}$

12.2 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

12.2 c) .... $\boxed{18}$

12.2 d) .... $\boxed{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-3}}$

12.2 e) .... $\boxed{78}$

12.2 f) .... $\boxed{6}$

12.2 g) .... $\boxed{\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

12.2 h) .... $\boxed{\dfrac{17}{2}}$

12.2 i) .... $\boxed{\mathrm{e}^2}$

12.2 j) .... $\boxed{-\dfrac{1}{3}}$

12.2 k) .... $\boxed{\dfrac{5}{8}}$

12.2 l) .... $\boxed{0}$

12.2 m) .... $\boxed{\dfrac{99}{\ln 10}}$

Corrigés

12.1 a) Il s'agit de l'aire d'un rectangle de largeur 2 et de longueur 7.

12.1 b) On commence par mettre les bornes « dans le bon sens » : $\displaystyle\int_7^{-3} -5\,\mathrm{d}x = -\int_{-3}^{7} -5\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{7} 5\,\mathrm{d}x$. Cette dernière intégrale est l'aire d'un rectangle dont les côtés mesurent 10 et 5.

12.1 c) Il s'agit de l'aire du triangle dont les sommets sont l'origine O, le point $A(7;0)$ et $B(7;21)$. Ce triangle est rectangle en A et son aire est $\dfrac{1}{2} \times AO \times AB$.

12.1 d) Les bornes sont « dans le bon sens », on peut donc interpréter l'intégrale comme une aire algébrique. Sur l'intervalle $[2,8]$, la courbe de $f(x) = 1 - 2x$ est située sous l'axe des abscisses, l'aire algébrique sera négative.

Il s'agit de calculer l'aire du trapèze rectangle dont les sommets sont $A(2;0)$, $B(8;0)$, $C(8;-15)$ et $D(2;-3)$. L'aire de ce trapèze rectangle est $\dfrac{1}{2} \times AB \times (AD + BC) = \dfrac{1}{2} \times 6 \times (3 + 15)$.

12.1 e) Avec la relation de Chasles, on a $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sin x\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} \sin x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \sin x\,\mathrm{d}x$.La fonction sinus étant impaire, les aires algébriques $\displaystyle\int_{-2}^{0} \sin x\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{0}^{2} \sin x\,\mathrm{d}x$ sont opposées, il suit que leur somme est nulle.

12.1 f) Les bornes étant « dans le bon sens », on interprète cette intégrale comme une aire algébrique. Cette aire est composée de deux triangles rectangles (les intégrales de -2 à 0 et de 0 à 1).

12.2 a) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

12.2 b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$.

12.2 c) $\displaystyle\int_1^{100} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{100} = 18$.

12.2 d) $\displaystyle\int_{-3}^{2} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x\Big]_{-3}^{2} = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-3}$.

12.2 e) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (2x+1)^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{8}(2x+1)^4\right]_{-1}^{2} = \frac{625}{8} - \frac{1}{8} = 78$.

12.2 f) $\displaystyle\int_0^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}\right]_0^{33} = \frac{2}{3}(10-1) = 6.$

12.2 g) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\mathrm{d}x = \left[-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = -\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

12.2 h) $x+1$ est négatif sur $[-2,-1]$ et positif sur $[-1,3]$. On en déduit : $\displaystyle\int_{-2}^{3} |x+1|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} -x-1\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{3} x+1\,\mathrm{d}x.$ Ces deux intégrales se calculent avec des primitives ou en les interprétant comme des aires de triangles.

12.2 i) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \max(1,\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}\mathrm{d}x + \int_0^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^2.$

12.2 j) On calcule

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2(x)-1)\sin(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{2}{3}\Big[\cos^3(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[\cos(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

12.2 k) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\cos x\sin x|\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\frac{1}{2}\sin(2x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin(2x)|\,\mathrm{d}x.$ Le signe de $\sin(2x)$ est négatif sur $\left[-\frac{\pi}{3},0\right]$ et positif sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, il suit que

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin(2x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} -\sin(2x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[\cos(2x)\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{0} - \frac{1}{2}\Big[\cos(2x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{5}{4}.$$

12.2 l) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

12.2 m) $\displaystyle\int_0^2 10^x\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \mathrm{e}^{x\ln 10}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{\ln 10}\mathrm{e}^{x\ln 10}\right]_0^2 = \frac{\mathrm{e}^{2\ln 10}-1}{\ln 10} = \frac{99}{\ln 10}.$

Fiche n° 13. Intégration par parties

Réponses

13.1 a) .... $\boxed{\frac{5}{2}\mathrm{ch}(2) - \frac{1}{2}\mathrm{sh}(2) - \frac{3}{2}}$

13.1 b) .... $\boxed{\dfrac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)} - 2\ln(2) - 2^{\ln(2)} + 2}{(\ln(2))^2}}$

13.1 c) .... $\boxed{\ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}}$

13.1 d) .... $\boxed{\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1}$

13.1 e) .... $\boxed{\frac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \frac{8}{9}\sqrt{2} + \frac{4}{9}}$

13.1 f) .... $\boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi^2}{32}}$

13.2 a) .... $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x \end{cases}}$

13.2 b) .... $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^3\left(\frac{1}{3}\ln^2 x - \frac{2}{9}\ln x + \frac{2}{27}\right) \end{cases}}$

13.2 c) .... $\boxed{\begin{cases}]-1,1[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\arccos(x)}\left(x - \sqrt{1-x^2}\right) \end{cases}}$

Corrigés

13.1 a) On choisit $u'(t) = \mathrm{sh}(2t)$ et $v(t) = 2t+3$. $\displaystyle\int_0^1 (2t+3)\mathrm{sh}(2t)\,\mathrm{d}t = \left[(2t+3)\frac{\mathrm{ch}(2t)}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{ch}(2t)\,\mathrm{d}t = \frac{5}{2}\mathrm{ch}(2) - \frac{3}{2} - \frac{\mathrm{sh}(2)}{2}$.

13.1 b) On choisit $v(t) = t$ et $u'(t) = 2^t$. $\displaystyle\int_1^{\ln(2)} t2^t\,\mathrm{d}t = \int_1^{\ln(2)} t\mathrm{e}^{t\ln(2)}\,\mathrm{d}t = \left[t\frac{1}{\ln(2)}2^t\right]_1^{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(2)}\int_1^{\ln(2)} \mathrm{e}^{t\ln(2)}\,\mathrm{d}t = 2^{\ln(2)} - \frac{2}{\ln(2)} - \frac{1}{(\ln(2))^2}[2^t]_1^{\ln(2)} = \frac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)} - 2\ln(2) - 2^{\ln(2)} + 2}{(\ln(2))^2}$.

13.1 c) On choisit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln(1+t^2)$. $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t = \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \ln(2) - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \ln 2 - 2[t - \arctan(t)]_0^1 = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$.

13.1 d) On choisit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \arcsin t$. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin t\,\mathrm{d}t = [t\arcsin t]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{12} + \left[\sqrt{1-t^2}\right]_0^{\frac{1}{2}}$.

13.1 e) On choisit $u'(t) = \sqrt{1+t}$ et $v(t) = \ln(1+t)$. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\ln(1+t)\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}(1+t))^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \frac{8}{9}\sqrt{2} + \frac{4}{9}$.

13.1 f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\tan^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\left(1+\tan^2 t\right)\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\,\mathrm{d}t$. On choisit dans la première intégrale, $v(t) = t$ et $u'(t) = 1 + \tan^2 t$. On obtient $\displaystyle[t\tan t]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t\,\mathrm{d}t - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + [\ln\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi^2}{32}$.

13.2 a) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et y est continue. Soit $x > 0$, en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln^2 t$ on obtient $\displaystyle\int_1^x \ln^2 t\,\mathrm{d}t = \left[t\ln^2 t\right]_1^x - \int_1^x 2\ln t\,\mathrm{d}t$. Puis, en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln t$, on obtient $\displaystyle x\ln^2 x - 2[t\ln t]_1^x + 2\int_1^x 1\,\mathrm{d}t = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x - 2$. Ainsi, $x \mapsto x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \ln^2 x$.

13.2 b) La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $x > 0$, alors, avec $u'(t) = t^2$ et $v(t) = \ln^2(t)$, on a : $\displaystyle\int_1^x t^2\ln^2 t\,\mathrm{d}t =$

$\left[\dfrac{t^3}{3}\ln^2 t\right]_1^x - \dfrac{2}{3}\displaystyle\int_1^x t^2 \ln t \,\mathrm{d}t$ puis avec $u'(t) = t^2$ et $v(t) = \ln(t)$, on obtient $\dfrac{x^3}{3}\ln^2 x - \dfrac{2}{9}\left[t^3 \ln t\right]_1^x + \dfrac{2}{9}\displaystyle\int_1^x t^2 \,\mathrm{d}t = \dfrac{x^3 \ln^2 x}{3} - \dfrac{2}{9}x^3 \ln x + \dfrac{2}{27}(x^3 - 1)$. D'où une primitive.

....

13.2 c) La fonction est définie et continue sur $]-1,1[$. Si $x \in]-1,1[$, alors, en posant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \mathrm{e}^{\arccos(t)}$, on obtient $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\arccos(t)} \,\mathrm{d}t = \left[t\mathrm{e}^{\arccos(t)}\right]_0^x - \int_0^x \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{e}^{\arccos(t)} \,\mathrm{d}t$, ensuite, en posant $u'(t) = -\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ et $v(t) = \mathrm{e}^{\arccos(t)}$, on obtient $x\mathrm{e}^{\arccos(x)} - \left[\sqrt{1-t^2}\mathrm{e}^{\arccos(t)}\right]_0^x + \displaystyle\int_0^x \sqrt{1-t^2}\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{e}^{\arccos(t)} \,\mathrm{d}t = x\mathrm{e}^{\arccos(x)} - \sqrt{1-x^2}\mathrm{e}^{\arccos(x)} + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^x \mathrm{e}^{\arccos(t)} \,\mathrm{d}t$. D'où $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\arccos(t)} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\arccos(x)}\left(x - \sqrt{1-x^2}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$.

....

Fiche n° 14. Changements de variable

Réponses

14.1 a) .... $\boxed{2\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$

14.1 b) .... $\boxed{\frac{\pi}{2}}$

14.1 c) .... $\boxed{\frac{\pi}{12}}$

14.1 d) .... $\boxed{\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}}$

14.2 a) .... $\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} \left]0, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan x + \ln\tan(x) \end{array}\right.}$

14.2 b) .... $\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\arctan\left(\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}\right) \end{array}\right.}$

14.2 c) .... $\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{3}{2}\ln(x^{\frac{2}{3}} + 1) \end{array}\right.}$

14.2 d) .... $\boxed{\left\{\begin{array}{rcl}]1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan\sqrt{x^2 - 1} \end{array}\right.}$

Corrigés

14.1 a) On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [1, 4]$, donc $t = u^2$ et $u \in [1, 2]$. On a $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 2u$.

Ainsi, $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{t + \sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{2u}{u^2 + u}\,\mathrm{d}u = 2\int_1^2 \frac{1}{1 + u}\,\mathrm{d}u = 2\Big[\ln(1 + u)\Big]_1^2 = 2(\ln(3) - \ln(2))$.

....

14.1 b) On pose $u = \frac{1}{2}t - 1$ avec $t \in [2, 4]$, donc $t = 2u + 2$ et $u \in [0, 1]$. On a donc $\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}u$.

Ainsi, $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{4t - t^2}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 - 4u^2}}\,\mathrm{d}u = \Big[\arcsin u\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}$.

....

14.1 c) On pose $u = \frac{1}{t}$ avec $t \in \left[\sqrt{2}, 2\right]$. On a $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = -\frac{1}{u^2}$.

Ainsi, $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t\sqrt{t^2 - 1}}\,\mathrm{d}t = -\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2} - 1}}\frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = -\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\,\mathrm{d}u = -\Big[\arcsin u\Big]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12}$.

....

14.1 d) On pose $u = \ln(t)$ avec $t \in [\mathrm{e},\ \mathrm{e}^2]$, donc $t = \mathrm{e}^u$ et $u \in [1, 2]$. On a $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \mathrm{e}^u$ et

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln t}{t + t\ln^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{u}{1 + u^2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}\ln(1 + u^2)\right]_1^2 = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}.$$

....

14.2 a) La fonction est bien continue. Soit $(a, x) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[^2$.

On calcule $\displaystyle\int_a^x \frac{\cos t + \sin t}{\sin t\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ qui est aussi $\displaystyle\int_a^x \frac{1 + \frac{\sin t}{\cos t}}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ en posant $u = \tan t$.

On a $\frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$ et, ainsi, $\displaystyle\int_a^x \frac{\cos t + \sin t}{\sin t\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_{\tan a}^{\tan x}\left(1 + \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u = \Big[u + \ln u\Big]_{\tan a}^{\tan x} = \tan x + \ln\tan(x) + C$.

....

14.2 b) La fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et y est continue.

Avec le changement de variable $u = \sqrt{\mathrm{e}^t - 1}$, on a $t = \ln(1 + u^2)$ et ainsi, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \frac{2u}{1 + u^2}$.

Soit $x > 0$. On a ainsi $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^t - 1}}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{\mathrm{e}-1}}^{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}} \frac{1}{u}\frac{2u}{1 + u^2}\,\mathrm{d}u = 2\Big[\arctan u\Big]_{\sqrt{\mathrm{e}-1}}^{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}} = 2\arctan(\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}) + C$.

....

14.2 c) La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le changement de variable $u = \sqrt[3]{t}$ donne $t = u^3$ et ainsi, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 3u^2$. Soit $x > 0$. On a

$$\int_1^x \frac{1}{t + \sqrt[3]{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt[3]{x}} \frac{3u^2}{u^3 + u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{\sqrt[3]{x}} \frac{3u}{u^2 + 1}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{3}{2}\ln(u^2 + 1)\right]_1^{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\ln(x^{\frac{2}{3}} + 1) + C.$$

14.2 d) La fonction est définie et continue sur $]1, +\infty[$.

Le changement de variable $u = \sqrt{t^2 - 1}$ donne $t = \sqrt{u^2 + 1}$ et ainsi, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \dfrac{u}{\sqrt{u^2 + 1}}$. Soit $a > 1$ et $x > 1$. On a

$$\int_a^x \frac{1}{t\sqrt{t^2 - 1}}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{a^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} \frac{1}{u\sqrt{u^2 + 1}}\,\frac{u}{\sqrt{u^2 + 1}}\,\mathrm{d}u = \int_{\sqrt{a^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} \frac{1}{u^2 + 1}\,\mathrm{d}u = \arctan\sqrt{x^2 - 1} + C.$$

Fiche n° 15. Intégration des fractions rationnelles

Réponses

15.1 a) .... $\boxed{1 \text{ et } 2}$

15.1 b) ...... $\boxed{A=-1 \text{ et } B=1}$

15.1 c) .... $\boxed{2\ln\dfrac{4}{3}}$

15.2 a) .... $\boxed{\ln\dfrac{1}{3}}$

15.2 b) .... $\boxed{2\ln\dfrac{4}{3}}$

15.3 a) .... $\boxed{\dfrac{3}{2}+\ln(3)-\ln(2)}$

15.3 b) .... $\boxed{-\dfrac{1}{48}+\dfrac{51}{64}\ln\dfrac{21}{19}}$

15.4 a) .... $\boxed{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}$

15.4 b) .... $\boxed{2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}}$

15.4 c) ... $\boxed{\sqrt{2}(x+\frac{1}{4})^2+\sqrt{2}\dfrac{15}{16}}$

15.4 d) ...... $\boxed{a\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{3a^3}{4}}$

15.5 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

15.5 b) .... $\boxed{\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}}$

15.5 c) .... $\boxed{\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}}$

15.5 d) .... $\boxed{\ln(2)}$

15.5 e) .... $\boxed{\dfrac{1}{3}\left(\ln(2)+\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}\right)}$

Corrigés

15.1 b) Supposons que A et B soient trouvés. En particulier, pour t convenable, on a

$$\frac{1}{t-2}=A+\frac{B(t-1)}{t-2}.$$

Cette égalité est encore valable pour $t=1$ (par exemple par continuité). En évaluant en $t=1$, on trouve $A=-1$. De même, on trouve $B=1$.

15.1 c) D'après ce qui précède, on a

$$\begin{aligned}\int_3^4 \frac{2}{(t-1)(t-2)}\,\mathrm{d}t &= 2\int_3^4 \frac{1}{(t-1)(t-2)}\,\mathrm{d}t = 2\int_3^4 \frac{1}{t-2}-\frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t\\ &= 2\Big[\ln(t-2)-\ln(t-1)\Big]_3^4 = 2\left[\ln\left(\frac{t-2}{t-1}\right)\right]_3^4\\ &= 2\left(\ln\frac{2}{3}-\ln\frac{1}{2}\right)=2\left(\ln\frac{2}{3}+\ln(2)\right)=2\ln\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

15.2 a) Soit $t\in[0,1]$. Déjà, on a

$$\frac{1}{t^2-4}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right).$$

Donc, on calcule

$$\int_0^1 \frac{4}{t^2-4}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t=\Big[\ln(2-t)-\ln(2+t)\Big]_0^1=\left[\ln\left(\frac{2-t}{2+t}\right)\right]_0^1=\ln\frac{1}{3}.$$

15.2 b) Soit $t\in[2,3]$. Déjà, on a

$$\frac{1}{t^2-t}=\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}.$$

Donc, on calcule

$$\int_2^3 \frac{2}{t^2-t}\,\mathrm{d}t=2\int_2^3\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=2\Big[\ln(t-1)-\ln(t)\Big]_2^3=2\left[\ln\left(\frac{t-1}{t}\right)\right]_2^3=2\left(\ln\frac{2}{3}-\ln\frac{1}{2}\right)=2\ln\frac{4}{3}.$$

15.3 a) On commence par faire la division euclidienne de l'expression t^2+t+1 et $t+1$. On trouve

$$t^2+t+1=(t+1)t\ +\ 1.$$

Donc, on a (pour $t \in \mathbb{R}$ convenable) :

$$\frac{1+t+t^2}{1+t} = t + \frac{1}{1+t}$$

Donc,

$$\int_1^2 \frac{1+t+t^2}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 t\,\mathrm{d}t + \int_1^2 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2} + \big(\ln(3) - \ln(2)\big) = \frac{3}{2} + \ln(3) - \ln(2).$$

Pour la seconde intégrale, on a utilisé un calcul fait précédemment.

....

15.3 b) D'abord, on fait une division euclidienne et on trouve

$$3t^2 + 2t + 1 = (4t+5)\Big(\frac{3}{4}t - \frac{7}{16}\Big) + \frac{51}{16}.$$

Puis, après calcul, on trouve

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \Big(\frac{3}{4}t - \frac{7}{16}\Big)\,\mathrm{d}t = \frac{5}{96} - \frac{7}{96} = -\frac{1}{48} \qquad \text{et} \qquad \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4t+5}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\Big(\ln(7) - \ln\frac{19}{3}\Big) = \frac{1}{4}\ln\frac{21}{19}.$$

Ainsi, l'intégrale cherchée vaut

$$-\frac{1}{48} + \frac{51}{64}\ln\frac{21}{19}.$$

....

15.4 a) On force le terme en x à apparaître comme le second membre du développement d'une identité remarquable $(x+a)^2$, où a est à déterminer. Puis, on force à apparaître le troisième terme de l'identité remarquable (ici, a^2), qu'on ajoute-soustrait. On trouve :

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 &= x^2 + (2 \times \frac{1}{2} \times x) + 1 \\ &= x^2 + (2 \times \frac{1}{2} \times x) + \Big(\frac{1}{2}\Big)^2 - \Big(\frac{1}{2}\Big)^2 + 1 \\ &= \Big(x + \frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

....

15.4 b) On procède comme précédemment mais on commence par factoriser par 2. On trouve :

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x + 1 &= 2\Big(x^2 - \frac{3}{2} \times x + \frac{1}{2}\Big) \\ &= 2\Big(x^2 - 2 \times \frac{3}{4} \times x + \Big(\frac{3}{4}\Big)^2 - \Big(\frac{3}{4}\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big) \\ &= 2\bigg(\Big(x - \frac{3}{4}\Big)^2 - \frac{1}{16}\bigg) = 2\Big(x - \frac{3}{4}\Big)^2 - \frac{1}{8}. \qquad \Big(\text{car } \tfrac{1}{2} - \tfrac{9}{16} = -\tfrac{1}{16}\Big) \end{aligned}$$

....

15.4 c) On trouve $\sqrt{2}x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2} = \sqrt{2}\big(x + \frac{1}{4}\big)^2 + \sqrt{2}\dfrac{15}{16}$.

....

15.4 d) On trouve

$$ax^2 + a^2x + a^3 = a\big(x^2 + ax\big) + a^3 = a\bigg(\Big(x + \frac{a}{2}\Big)^2 - \frac{a^2}{4}\bigg) + a^3 = a\Big(x + \frac{a}{2}\Big)^2 + \frac{3a^3}{4}.$$

....

15.5 a) On calcule

$$\int_0^1 \frac{1}{1+2t+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{-1}{1+t}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

....

15.5 b) Déjà, on a, si $t \in \mathbb{R}$: $t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$. Donc, on calcule

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\theta^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta \qquad \text{(en posant } \theta = t + \tfrac{1}{2}\text{)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2\theta}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \times \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}\times 6} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

15.5 c) On a

$$\int_0^1 \frac{1}{1-t+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{(t-1/2)^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\theta^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\int_0^{1/2} \frac{1}{\theta^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta = 2\left[\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right]_0^{1/2} \qquad \text{(avec } a = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\text{)}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

15.5 d) Déjà, on a $6t^2 - 5t + 1 = 6\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{1}{3}\right)$, pour $t \in \mathbb{R}$. Donc,

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{6t^2 - 5t + 1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{3}\right)}\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour $t \in \mathbb{R}$ convenable, on a

$$\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{3}\right)} = 6\left(\frac{1}{t-\frac{1}{2}} - \frac{1}{t-\frac{1}{3}}\right).$$

Donc,

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{6t^2-5t+1}\,\mathrm{d}t = \left[\ln\left(\tfrac{1}{2} - t\right) - \ln\left(\tfrac{1}{3} - t\right)\right]_0^{\frac{1}{4}} = \left[\ln\left(\frac{\frac{1}{2}-t}{\frac{1}{3}-t}\right)\right]_0^{\frac{1}{4}}$$

$$= \ln\left(\frac{1/4}{1/12}\right) - \ln\left(\frac{1/2}{1/3}\right) = \ln(3) - \ln(3/2) = \ln(2).$$

15.5 e) Déjà, si $t \in [0,1]$, on a

$$\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{2-t}{1-t+t^2}\right).$$

Ensuite, on calcule : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln(2)$.

Et, on écrit : $\displaystyle\frac{2-t}{1-t+t^2} = \frac{-\frac{1}{2}(2t-1)+\frac{3}{2}}{1-t+t^2}$.

Et, on remarque que

$$\int_0^1 \frac{2t-1}{1-t+t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(1-t+t^2)\Big]_0^1 = \ln(1) - \ln(1) = 0.$$

Or, on a vu plus haut que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-t+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

Donc, on trouve

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\left(\ln(2) + \frac{3}{2}\times\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}\left(\ln(2) + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right).$$

Fiche nº 16. Décomposition en éléments simples

Réponses

16.1 a) .... $\boxed{X-3-\dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{X+1}+\dfrac{7}{X+2}}$

16.1 b) .... $\boxed{1-\dfrac{2}{X}+\dfrac{1}{2(X+1)}+\dfrac{3}{2(X-1)}}$

16.1 c) .... $\boxed{1+\dfrac{\pi}{2(X-\pi)}-\dfrac{\pi}{2(X+\pi)}}$

16.2 a) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}-1}{(\mathrm{e}-2)(X+\mathrm{e})}+\dfrac{1}{(2-\mathrm{e})(X+2)}}$

16.2 b) .... $\boxed{\dfrac{3}{2(X-1)}-\dfrac{1+i}{4(X-i)}-\dfrac{1-i}{4(X+i)}}$

16.2 c) . $\boxed{1-\dfrac{5}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(X+\sqrt{3})}-\dfrac{4}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-X)}}$

16.3 a) ..... $\boxed{\dfrac{-3}{X-2}+\dfrac{1}{X-3}+\dfrac{2}{X-1}+\dfrac{1}{(X-1)^2}}$

16.3 b) .. $\boxed{\dfrac{2}{X}+\dfrac{2}{X^2}-\dfrac{11}{4(X-1)}+\dfrac{3}{2(X-1)^2}+\dfrac{3}{4(X+1)}}$

16.3 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{\pi^2X}-\dfrac{1}{\pi^2(X+\pi)}-\dfrac{1+\pi}{\pi(X+\pi)^2}}$

16.3 d) ..... $\boxed{\frac{2}{X-i}+\frac{1}{(X-i)^2}-\frac{2}{X-(1+i)}+\frac{1}{(X-(1+i))^2}}$

16.4 a) ... $\boxed{\dfrac{1}{X+1}-\dfrac{1}{2(X-1)}-\dfrac{1+3i}{4(X-i)}-\dfrac{1-3i}{4(X+i)}}$

16.4 b) . $\boxed{\dfrac{1}{2X}+\dfrac{5}{6(X+2)}+\dfrac{2}{3(X-1)}+\dfrac{1}{(X-1)^2}.}$

16.5 a) .... $\boxed{1-2\ln(3)}$

16.5 b) .... $\boxed{-\dfrac{1}{2}\ln(3)+\dfrac{2}{3}\ln(2)}$

16.5 c) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}-4\ln(2)+2\ln(3)}$

16.5 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{18}-\dfrac{1}{9}\ln(5)+\dfrac{2}{9}\ln(2)}$

16.5 e) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{8}}$

16.5 f) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln(2)-\dfrac{1}{4}\ln(3)}$

Corrigés

16.1 a) Pour commencer, effectuons la division euclidienne de X^4-2 par $X(X+1)(X+2)=X^3+3X^2+2X$: on trouve $X^4-2=(X^3+3X^2+2X)(X-3)+7X^2+6X-2$. Ainsi, on a

$$\frac{X^4}{X(X+1)(X+2)}=X-3+\frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)(X+2)}.$$

On écrit ensuite la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle précédente :

$$\frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)(X+2)}=\frac{a}{X}+\frac{b}{X+1}+\frac{c}{X+2}.$$

Pour calculer a, on multiplie la fraction par X, on l'écrit sous forme irréductible, et on évalue en 0 :

$$\frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)(X+2)}\times X=\frac{7X^2+6X-2}{(X+1)(X+2)},\ \text{ce qui, évalué en } 0, \text{ donne } a=\frac{-2}{2}=-1.$$

Pour calculer b, on multiplie la fraction par $X+1$, on l'écrit sous forme irréductible, et on évalue en -1 :

$$\frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)(X+2)}\times(X+1)=\frac{7X^2+6X-2}{X(X+2)},\ \text{ce qui, évalué en } -1, \text{ donne } b=\frac{7-6-2}{(-1)(-1+2)}=1.$$

Enfin, pour c,

$$\frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)(X+2)}\times(X+2)=\frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)},\ \text{ce qui, évalué en } -2, \text{ donne } c=\frac{28-12-2}{(-2)(-2+1)}=\frac{14}{2}=7.$$

D'où

$$\frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)(X+2)}=\frac{-1}{X}+\frac{1}{X+1}+\frac{7}{X+2},$$

donc

$$\frac{X^4-2}{X(X+1)(X+2)} = X - 3 - \frac{1}{X} + \frac{1}{X+1} + \frac{7}{X+2}.$$

16.3 a) Pour cette décomposition en éléments simples, pas de partie entière. On écrit la décomposition théorique :

$$\frac{X+1}{(X-1)^2(X-2)(X-3)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-2} + \frac{d}{X-3}.$$

Par les méthodes du premier exercice, on détermine facilement $c = -3$ et $d = 1$. De même, en multipliant par $(X-1)^2$ et en évaluant en 1, on obtient $b = 1$. Ensuite, en évaluant en 0, on obtient

$$\frac{1}{6} = \frac{a}{-1} + b + \frac{c}{-2} + \frac{d}{-3},$$

donc $a = 1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = 2$. Ainsi,

$$\frac{X+1}{(X-1)^2(X-2)(X-3)} = \frac{-3}{X-2} + \frac{1}{X-3} + \frac{2}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}.$$

16.4 a) Il suffit de remarquer que $X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)$ et de se ramener à la méthode des pôles simples vue précédemment !

16.4 b) Il faut remarquer que $X^4 - 3X^2 + 2X = (X-1)^2(X+2)X$, puis utiliser les méthodes des pôles multiples !

16.5 a) On effectue la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^2+1}{(X-1)(X+1)}$:

$$\frac{X^2+1}{(X-1)(X+1)} = 1 - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{X-1}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x &= \int_{-1/2}^{1/2} 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x \\ &= 1 + \Big[-\ln(x+1) + \ln(1-x)\Big]_{-1/2}^{1/2} \\ &= 1 - \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - 2\ln(3).\end{aligned}$$

16.5 e) On remarque que

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \frac{1}{(2x)^2+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\arctan(2x)\right]_0^{1/2} = \frac{1}{2}(\arctan(1) - \arctan(0)) = \frac{\pi}{8}.$$

16.5 f) On effectue la décomposition en éléments simples $\boxed{\text{sur } \mathbb{R}}$ de $\dfrac{X}{X^4-1}$.

On a $X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2+1)$. Donc, on écrit

$$\frac{X}{X^4-1} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+1}$$

Par la méthode déjà décrite, $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{4}$. En multipliant par x et en faisant $x \to +\infty$, $0 = a + b + c$, donc $c = -\frac{1}{2}$. Enfin, en évaluant en 0, $-a + b + d = 0$ donc $d = 0$. Donc

$$\frac{X}{X^4-1} = \frac{1}{4(X-1)} + \frac{1}{4(X+1)} - \frac{X}{2(X^2+1)} = \frac{X}{2(X^2-1)} - \frac{X}{2(X^2+1)}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{x}{x^4-1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{x}{x^2-1} - \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2-1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_2^3\\ &= \frac{1}{4}(\ln(8) - \ln(10) - \ln(3) + \ln(5))\\ &= \frac{1}{4}(3\ln(2) - \ln(2) - \ln(5) - \ln(3) + \ln(5)) = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{4}\ln(3)\end{aligned}$$