Équations différentielles

Le résultat principal de la partie **A.** pourra être utilisé, même s'il n'a pas été démontré, dans la partie **B.**

A. *Calcul d'une primitive.*

1. Calculer $\displaystyle\int \cos(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ en précisant l'intervalle de validité.

2. Dans cette question, on se fixe $x \in \,]-1\,;1[$.
   (a) Simplifier $\cos(\arcsin(x))$ en justifiant.
   (b) Calculer $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-\arcsin(u)}\,\mathrm{d}u$ en effectuant le changement de variable $t = \arcsin(u)$.

3. En déduire que la fonction $\Lambda\colon x \longmapsto \dfrac{1}{2}\left(x - \sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{e}^{-\arcsin(x)}$ est une primitive sur $]-1\,;1[$ de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\arcsin(x)}$.

B. Dans cette partie, on cherche à résoudre l'équation différentielle

$$(\mathrm{E})\colon \sqrt{1-x^2}\,y' - y = \sqrt{1-x^2}$$

sur l'intervalle $\mathrm{I} = \,]-1\,;1[$.

1. Justifier que (E) est équivalente à $\quad (\mathrm{E}')\ :\ y' - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,y = 1.$

2. Résoudre l'équation homogène associée à (E').

3. En déduire la résolution complète de l'équation (E').

4. Déterminer l'unique solution de (E) telle que $y(0) = -\dfrac{1}{2}$.