Équations différentielles

A. *Calcul d'une primitive.*

1. Soit on réalise deux primitivations par parties (en justifiant soigneusement !), ou alors on passe par l'exponentielle complexe :

$$\begin{aligned}\int^x \cos(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t &= \int^x \mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\int^x \mathrm{e}^{(-1+i)t}\,\mathrm{d}t\\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{(-1+i)x}}{-1+i}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^{ix}(-1-i)\right)\\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{Re}\,((\cos(x)+i\sin(x))(-1-i))\\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}(-\cos(x)+\sin(x))\\ &= \frac{1}{2}(\sin(x)-\cos(x))\,\mathrm{e}^{-x}.\end{aligned}$$

Commentaires : *(à une constante réelle près !)*

Intervalle de validité : $\mathbb{R}$.

2. (a) Comme $\arcsin(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, et vu que la fonction cos est à valeurs strictement **positives** sur cet intervalle, on a :

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{\cos^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1-x^2}.$$

Commentaires : *On rappelle que l'on a utilisé l'identité : $\forall\ t \in [-1\,;1]$, $\sin(\arcsin t) = t$ et que le signe est à justifier.*

(b) Posons

$$f : \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ u & & \mathrm{e}^{-\arcsin(u)} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \varphi : \begin{array}{ccc} \mathrm{J} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ t & & \sin(t) \end{array}$$

où $\mathrm{I} =]-1\,;1[$ et $\mathrm{J} = \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

Vérifions les hypothèses du théorème de changement de variables :

(1) f est continue sur $\mathrm{I} =]-1\,;1[$ comme composée de arcsin par exp.

(2) φ est à valeurs dans $\mathrm{I} =]-1\,;1[$: en effet, si $t \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, alors par stricte croissance de sin, on obtient $\varphi(t) = \sin(t) \in]-1\,;1[$.

(3) φ est $\mathscr{C}^1$ sur J (fonction sin) et on a $\forall\ t \in \mathrm{J},\ \varphi'(t) = \cos(t)$.

Appliquons la formule de changement de variable avec les bornes vérifiant $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(\arcsin(x)) = x$ (les nouvelles bornes 0 et $\arcsin(x)$ appartiennent bien à J) :

$$\begin{aligned}\int_0^x \mathrm{e}^{-\arcsin(u)}\,\mathrm{d}u &= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\arcsin(x))} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\arcsin(x)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\arcsin(x)} \mathrm{e}^{-t}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}(\sin(t)-\cos(t))\,\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{\arcsin(x)}\\ &= \frac{1}{2}\Big(\sin\arcsin(x)-\cos\arcsin(x)\Big)\,\mathrm{e}^{-\arcsin(x)}+\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}\Big(x-\sqrt{1-x^2}\Big)\,\mathrm{e}^{-\arcsin(x)}+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

3. **Première méthode :** Comme la fonction $f\colon x \longmapsto \mathrm{e}^{-\arcsin(x)}$ est continue sur $]-1\,;1[$ (par composition), le théorème fondamental de l'analyse montre que la fonction $\mathrm{F}\colon x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-\arcsin(u)}\,\mathrm{d}u$ est dérivable sur $]-1\,;1[$ et vérifie $\mathrm{F}' = f$.

   Autrement dit, F est une primitive de f sur $]-1\,;1[$.

   Grâce au calcul de cette intégrale fait à la question précédente, et comme deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante, on en déduit que Λ est une primitive de f sur $]-1\,;1[$.

   Deuxième méthode : Vérifions que la fonction Λ donnée est une primitive de $f\colon x \longmapsto \mathrm{e}^{-\arcsin(x)}$, c'est-à-dire qu'elle est **dérivable sur** $]-1\,;1[$ **de dérivée égale à** f.

   La fonction $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur $]-1\,;1[$ comme racine carrée d'un polynôme à valeurs **strictement positives**.

   Ainsi, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{2}(x-\sqrt{1-x^2})$ est dérivable sur $]-1\,;1[$ (par combinaison linéaire).

   De plus, la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\arcsin(x)}$ est dérivable sur $]-1\,;1[$ comme composée de $-\arcsin$ (dérivable sur cet intervalle) par la fonction exp.

   Finalement, par produit, la fonction Λ est dérivable sur $]-1\,;1[$.

   Calculons à présent sa dérivée :

   $$\forall\, x \in\ ]-1\,;1[\,,$$
   $$\begin{aligned}\Lambda'(x) &= \frac{1}{2}\Big(1-\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\Big)\,\mathrm{e}^{-\arcsin(x)} + \frac{1}{2}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{e}^{-\arcsin(x)}\\ &= \frac{1}{2}\Big(1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\Big)\,\mathrm{e}^{-\arcsin(x)} - \frac{1}{2}\Big(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-1\Big)\,\mathrm{e}^{-\arcsin(x)}\\ &= \mathrm{e}^{-\arcsin(x)}.\end{aligned}$$

   D'où le résultat : Λ est une primitive de f sur $]-1\,;1[$.

B. 1. Si $x \in\ ]-1\,;1[$, alors $1-x^2>0$, donc $\sqrt{1-x^2}$ est défini et $\sqrt{1-x^2}>0$ ce qui justifie qu'on peut diviser et l'équation (E) est équivalente à $(\mathrm{E}')\colon y' - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,y = 1$.

   Commentaires : *Certes, l'important était de dire que l'on divisait par un nombre non nul mais l'existence de la racine est à justifier aussi.*

2. L'équation homogène associée à (E') s'écrit

   $$(\mathrm{E}'_{\mathrm{H}})\colon y' - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y = 0,$$

   donc est du type $y' + a(x)y = 0$ où $a\colon x \longmapsto -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur $\mathrm{I} =\ ]-1\,;1[$.

   La solution générale de $(\mathrm{E}'_{\mathrm{H}})$ sur I est donc $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et A une primitive de a sur I, donc il suffit de poser $\mathrm{A}\colon x \longmapsto -\arcsin(x)$. Les solutions de $(\mathrm{E}'_{\mathrm{H}})$ sur I sont finalement :

   $$x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{\arcsin(x)} \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

   Commentaires : *La forme des solutions homogène est considérée comme sue par tout élève de PTSI. Seule la continuité de « a » est à préciser avant de poser la forme des solutions.*

3. (E') est de la forme $y' + a(x)y = b(x)$ où a a été définie ci-dessus et $b\colon x \longmapsto 1$. Les fonctions a et b sont continues sur I (car b est constante), donc le théorème de structure s'applique : toute solution est somme de la solution générale de l'équation homogène $(\mathrm{E}'_{\mathrm{H}})$ (déjà résolue) et d'une solution particulière.

Par la méthode de variation de la constante, on cherche y_P sous la forme $y_P : x \longmapsto \lambda(x)\ \mathrm{e}^{\arcsin(x)}$ où λ est une fonction $\mathscr{C}^1$ sur I.

Comme arcsin est $\mathscr{C}^1$ sur $]-1\,;1[$, alors par composition avec exp, puis par produit, y_P est $\mathscr{C}^1$ sur I.

Ainsi, y_P solution sur I si, et seulement si

$$\begin{aligned}
&\forall\ x \in \mathrm{I},\quad y_P'(x) - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} y_P(x) = 1 \\
&\iff \forall\ x \in \mathrm{I},\quad \lambda'(x)\ \mathrm{e}^{\arcsin(x)} + \lambda(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{e}^{\arcsin(x)} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\lambda(x)\ \mathrm{e}^{\arcsin(x)} = 1 \\
&\iff \forall\ x \in \mathrm{I},\quad \lambda'(x)\ \mathrm{e}^{\arcsin(x)} = 1 \\
&\iff \forall\ x \in \mathrm{I},\quad \lambda'(x) = \mathrm{e}^{-\arcsin(x)}.
\end{aligned}$$

D'après les résultats de la partie **A.** il suffit de poser $\lambda : x \longmapsto \Lambda(x) = \dfrac{1}{2}(x - \sqrt{1-x^2})\ \mathrm{e}^{-\arcsin(x)}$ ce qui fournit comme solution particulière $y_P : x \longmapsto \dfrac{1}{2}(x - \sqrt{1-x^2})$.

Conclusion : Toute solution de (E′) sur I (et donc de (E) car les équations sont équivalentes) s'écrit :

$$x \longmapsto \frac{1}{2}(x - \sqrt{1-x^2}) + \lambda\ \mathrm{e}^{\arcsin(x)} \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Commentaires : *Même si on raisonne par équivalence, n'oubliez pas que c'est quand même un raisonnement par « analyse-synthèse » donc suivant votre formulation, vous devrez vérifier que votre solution convient au risque d'être pénalisé.*

4. Soit φ une solution de (E) : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\ x \in \mathrm{I},\ \ \varphi(x) = \dfrac{1}{2}(x - \sqrt{1-x^2}) + \lambda\ \mathrm{e}^{\arcsin(x)}$.
Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(0) = -\frac{1}{2} &\iff \frac{1}{2}(0-1) + \lambda\ \mathrm{e}^0 = -\frac{1}{2} \\
&\iff \lambda - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \\
&\iff \lambda = 0.
\end{aligned}$$

Donc, l'unique solution du problème de Cauchy (E) sur I telle que $y(0) = -\dfrac{1}{2}$ est donnée par :

$$\varphi : x \longmapsto \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{1-x^2}\right).$$

Commentaires : *Merci à Gabriel d'avoir précisé ce point. Sans ce théorème, rien ne vous assure que la solution que vous avez trouvée est la seule.*