Équations différentielles linéaires

1 Résoudre (E_1) : $\begin{cases} (2+x)y' = 2-y \\ y(0)=0 \end{cases}$ sur $\mathrm{I} =]-2\,;+\infty[$.

Solution homogène : Sur I, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x+2}$ est continue donc l'équation homogène est $(2+x)y' + y = 0$ admet sur I des solutions de la forme :

$$y_{\mathrm{H}} = \frac{\lambda}{2+x}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Solution particulière : On pourrait remarquer que la fonction constante à 2 est une solution particulière mais, dans le cas contraire, on applique la méthode de variation de la constante est on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \dfrac{\lambda(x)}{2+x}$ où λ est une fonction dérivable sur I.

On a alors :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\; y_p'(x) = \frac{\lambda'(x)}{2+x} - \frac{\lambda(x)}{(2+x)^2}.$$

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de } (\mathrm{E}_1) &\iff \forall\, x \in \mathrm{I},\; (2+x)y_p'(x) = 2 - y_p(x) \\ &\iff \forall\, x \in \mathrm{I},\; \lambda'(x) - \cancel{\frac{\lambda(x)}{2+x}} = 2 - \cancel{\frac{\lambda(x)}{2+x}}. \\ &\iff \forall\, x \in \mathrm{I},\; \lambda(x) = 2x + \mu,\; \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Comme on cherche une solution particulière, on peut choisir celle qui s'annule en 0 i.e. celle où $\mu = 0$. On obtient alors $y_p(x) = \dfrac{2x}{2+x} = 2 - \dfrac{4}{2+x}$.

Solution générale : Les solutions générales sur I sont donc de la forme :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\; y(x) = y_p(x) + y_{\mathrm{H}}(x) = 2 - \frac{4}{2+x} + \frac{\lambda}{2+x} = 2 + \frac{\alpha}{x+2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Conditions initiales : $y(0) = 0 \iff 2 + \dfrac{\alpha}{2} = 0 \iff \alpha = -4$.

Conclusion, $\boxed{\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad y(x) = 2 - \dfrac{4}{x+2} = \dfrac{2x}{x+2}.}$

2 Résoudre (E_2) : $\begin{cases} y'' - y' - 6y = 50\cos(x) \\ y(0) = -5 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$.

Solution homogène : L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 est $x^2 - x - 6 = 0$ donc les racines sont 3 et -2.
Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme :

$$y_{\mathrm{H}} = \lambda\,\mathrm{e}^{3x} + \mu\,\mathrm{e}^{-2x}, \qquad (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Solution particulière : On cherche une solution particulière de la forme : On a alors :

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathrm{I},\ y_p(x) &= \alpha\cos(x) + \beta\sin(x), \text{ où } (\alpha\,;\beta) \in \mathbb{R}^2 \\ y_p'(x) &= -\alpha\sin(x) + \beta\cos(x) \\ y_p''(x) &= -\alpha\cos(x) - \beta\sin(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de } (\mathrm{E}_2) &\iff 50\cos(x) = -(7\alpha+\beta)\cos(x) + (\alpha - 7\beta)\sin(x) \\ &\iff \begin{cases} 7\alpha + \beta = -50 \\ \alpha - 7\beta = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha = -7 \\ \beta = -1 \end{cases} \\ &\iff \forall\, x \in \mathrm{I},\ y_p(x) = -7\cos(x) - \sin(x). \end{aligned}$$

Solution générale : Les solutions générales sur I sont donc de la forme :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ y(x) = y_p(x) + y_{\mathrm{H}}(x) = -7\cos(x) - \sin(x) + \lambda\,\mathrm{e}^{3x} + \mu\,\mathrm{e}^{-2x}, \quad (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Conditions initiales : $\begin{cases} y(0) = -5 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -7 + \lambda + \mu = -5 \\ -1 + 3\lambda - 2\mu = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 1 \end{cases}$.

Conclusion, $\boxed{\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad y(x) = -7\cos(x) - \sin(x) + \mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-2x}.}$