XII
Les nombres réels

Longtemps, les mathématiques se sont développées au service des autres sciences. La séparation des différentes sciences est d'ailleurs tardive, et nombreux ont été les mathématiciens à avoir également été des physiciens de renommée, comme Newton par exemple. Les mathématiques ont d'abord été vues comme un outil :

— au service de la mécanique et de l'ingéniérie (Archimède [1])

— au service de l'astronomie (géométrie grecque, Ptolémée, écoles indienne et arabe)

— au service de toute étude nécessitant d'être chiffrée pour obtenir des ordres de grandeurs.

Du dernier point découle l'importance du développement du calcul numérique (calcul approché, en opposition au calcul algébrique). C'est ce point de vue qui est à la base des procédés d'approximation (méthode de Newton [2] de recherche d'un zéro, méthodes approchées de calcul d'intégrales), aboutissant notamment à la notion de convergence (qui donne la validité de l'approximation à l'infini).

Ainsi, l'utilisation de l'outil est souvent à la base de sa définition, et a souvent précédé sa théorisation : les mathématiques ont évolué de façon empirique.

⌊1⌋. **Archimède de Syracuse**, né à Syracuse vers **287** av. J.-C. et mort en cette même ville en **212** av. J.-C., est un grand scientifique grec de Sicile (Grande-Grèce) de l'Antiquité, physicien, mathématicien et ingénieur. Bien que peu de détails de sa vie soient connus, il est considéré comme l'un des principaux scientifiques de l'Antiquité classique. Parmi ses domaines d'étude en physique, on peut citer l'hydrostatique, la mécanique statique et l'explication du principe du levier. Il est crédité de la conception de plusieurs outils innovants, comme la vis d'Archimède.

Archimède est généralement considéré comme le plus grand mathématicien de l'Antiquité et l'un des plus grands de tous les temps. Il a utilisé la méthode d'exhaustion pour calculer l'aire sous un arc de parabole avec la somme d'une série infinie, et a donné un encadrement de Pi d'une remarquable précision. Il a également introduit la spirale qui porte son nom, des formules pour les volumes des surfaces de révolution et un système ingénieux pour l'expression de très grands nombres.

Archimède est mort pendant le siège de Syracuse où il a été tué par un soldat romain qui a agi malgré les ordres demandant de ne pas lui nuire.

⌊2⌋. **Isaac Newton** (25 décembre **1642** - 20 mars **1727**, ou 4 janvier **1643** - 31 mars **1727**) est un mathématicien, physicien, philosophe, alchimiste, astronome et théologien anglais, puis britannique. Figure emblématique des sciences, il est surtout reconnu pour avoir fondé la mécanique classique, pour sa théorie de la gravitation universelle et la création, en concurrence avec Gottfried Wilhelm Leibniz, du *calcul infinitésimal*. En optique, il a développé une théorie de la couleur fondée sur l'observation selon laquelle un prisme décompose la lumière blanche en un spectre visible. Il a aussi inventé le télescope à réflexion composé d'un miroir primaire concave appelé télescope de Newton.

En mécanique, il a établi les trois lois universelles du mouvement qui constituent en fait des principes à la base de la grande théorie de Newton concernant le mouvement des corps, théorie que l'on nomme aujourd'hui « mécanique newtonienne » ou encore « mécanique classique ».

Il est aussi connu pour la généralisation du théorème du binôme et l'invention dite de la méthode de Newton permettant de trouver des approximations d'un zéro (ou racine) d'une fonction réelle d'une variable réelle.

Newton a montré que les mouvements des objets sur Terre et des corps célestes sont gouvernés par les mêmes lois naturelles ; en se basant sur les lois de Kepler sur le mouvement des planètes, il développa la loi universelle de la gravitation.

Son ouvrage Philosophiae naturalis principia mathematica, publié en 1687, est considéré comme une œuvre majeure dans l'histoire des sciences. C'est dans celui-ci qu'il décrit la loi universelle de la gravitation, formule les trois lois universelles du mouvement et jette les bases de la mécanique classique. Il a aussi effectué des recherches dans les domaines de la théologie et de l'alchimie.

De fait, vous savez presque tout sur les réels - mais pas tout. Alors que vous manipulez des inégalités depuis longtemps, il y a tout de même une propriété de la relation $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ que vous ne connaissez pas, dite *propriété de la borne supérieure* et qui revêt pour les mathématiques du programme de PTSI une importance fondamentale.

Ce chapitre vise principalement à motiver et vous présenter cette propriété, mais nous y introduirons aussi un minimum de vocabulaire topologique. En un mot, la topologie est la théorie très générale de la « proximités » des objets mathématiques les uns par rapport aux autres, mais nous nous contenterons d'y mettre un pied dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Contenu

I Nombres entiers, décimaux, rationnels

I.1 Rappels sur les rationnels

— Tout rationnel peut s'écrire de différentes manières sous forme de fractions, par exemple $\frac{p}{q} = \frac{2p}{2q} = \ldots$, mais tout nombre rationnel s'écrit de manière unique sous forme de *fraction irréductible i.e.* sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et p et q premiers entre eux.

L'*égalité des produits en croix*, caractérise ces classes d'équivalence :

$$\forall \left(\frac{a}{b} ; \frac{c}{d}\right) \in \mathbb{Q}^2, \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc \quad \text{avec } b \neq 0 \text{ et } d \neq 0.$$

— L'ensemble $\mathbb{Q}$ est muni de deux lois de composition interne :

$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'} \qquad \text{et} \qquad \frac{p}{q} \times \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'}.$$

Muni de ces deux lois $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un *corps commutatif.* On vérifie également que $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Q}^*, \times)$ et $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$ sont des *groupes commutatifs.*

Exercice 1 : Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible :

A$= \dfrac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \dfrac{(a+b)^2}{a-b}$ pour $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, distincts deux à deux.

B$= \dfrac{\dfrac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\dfrac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$ pour $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$.

I.2 L'ensemble des rationnels est insuffisant

En termes d'approximations numériques, $\mathbb{Q}$ peut paraître suffisant en sciences appliquées. Le problème se pose lorsqu'on a besoin de connaître la valeur exacte de certaines grandeurs.

Par exemple, peut-on mesurer dans $\mathbb{Q}$ la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 ? D'après le théorème de Pythagore, cela revient à se demander s'il existe un rationnel dont le carré est égal à 2, or nous avons déjà établi que la réponse est négative : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Cette lacune de $\mathbb{Q}$ avait été remarquée par les Pythagoriciens, ce qui a conduit les mathématiciens à introduire de nouveaux nombres, les *irrationnels*, en concevant un ensemble plus vaste que $\mathbb{Q}$, l'ensemble des *nombres réels* noté $\mathbb{R}$.

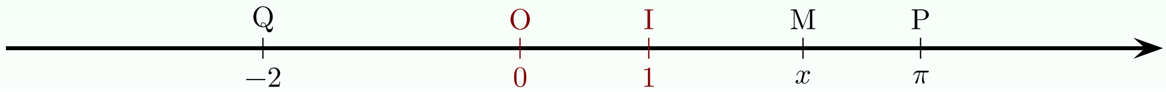
I.3 L'ensemble des réels

L'ensemble des réels est un ensemble plus difficile théoriquement à construire (théorie hors programme de PTSI). Intuitivement certains nombres que vous connaissez comme $\sqrt{2}$ ou π sont des nombres qui ne font pas partie des rationnels. On pourrait alors définir $\mathbb{R}$ comme l'union des rationnels et des irrationnels.

En poussant plus loin, on se rendrait compte que tous ces irrationnels peuvent cependant tous être vus comme des limites de suites de rationnels (*cf.* corollaire (13.2)). L'ensemble $\mathbb{R}$ est alors, pour le dire vite et de façon peu rigoureuse, l'ensemble des limites des suites de $\mathbb{Q}$ qui convergent.

Enfin, pour un point de vue plus géométrique mais tout aussi peu satisfaisant,

Définition 1 : L'ensemble des abscisses des points d'une droite orienté est l'ensemble des *nombres réels*.



L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Les abscisses des points de la demie-droite [OI) appartiennent à $\mathbb{R}_+$.

Un peu d'histoire : *En mathématiques, un nombre réel est un nombre qui peut être représenté par une partie entière et une liste finie ou infinie de décimales. Cette définition s'applique donc aux nombres rationnels, dont les décimales se répètent de façon périodique à partir d'un certain rang, mais aussi à d'autres nombres dits irrationnels, tels que la racine carrée de* 2*,* π *et* e*.*

La notion de nombre réel émerge progressivement de la manipulation des rapports de grandeurs géométriques autres que les rapports d'entiers naturels depuis leur prise en compte par Eudoxe de Cnide au IV$^{\text{ème}}$ *siècle av. J.-C. Elle s'insère aussi dans l'approximation des solutions de problèmes algébriques et donne même lieu, au milieu du XIXe siècle, à la mise en évidence de nombres* transcendants*. Mais la définition des nombres réels n'est formalisée que quelques décennies plus tard avec les constructions de Dedekind d'une part et de Cantor et Méray d'autre part.*

L'ensemble des nombres réels, est alors un corps totalement ordonné*, c'est-à-dire qu'il est muni des quatre opérations arithmétiques satisfaisant les mêmes règles que celles sur les fractions et ces opérations sont compatibles avec la relation d'ordre. Mais il satisfait en plus la* propriété de la borne supérieure *qui fonde l'analyse réelle.*

Enfin, cet ensemble est caractérisé par Hilbert comme le plus grand corps archimédien*.*

Remarque : L'ensemble des réels n'est pas dénombrable *i.e.* il n'existe aucune bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$. (Hors-Programme)

1$^{\text{ère}}$ méthode : En considérant que $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres ayant un développement décimal illimité, on suppose le contraire et l'existence d'une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$ et on liste les uns sous les autres les nombres réels.

On construit un nombre dont la 1$^{\text{ère}}$ décimale n'est pas la 1$^{\text{ère}}$ décimale du premier nombre, la deuxième n'est pas la deuxième du 2$^{\text{ème}}$ nombre, etc...

On aboutit à un nombre qui, par construction, n'apparait pas dans la liste des réels en bijection avec $\mathbb{N}$ et la contradiction.

Donc $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

2$^{\text{ème}}$ méthode : On suppose encore le contraire et on va montrer que $[0\,;1]$ n'est pas dénombrable ce qui suffira.

Si $[0\,;1]$ était dénombrable alors on pourrait écrire $[0\,;1] = \{X_1, X_2, \dots, X_n, \dots\}$.

Or, des 3 segments $\left[0\,;\frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\right]$ et $\left[\frac{2}{3}\,;1\right]$, il y en a nécessairement un dont X_1 n'est pas élément. Notons le $I_1 = [a_1\,;b_1]$.

De même, des 3 segments $\left[a_1\,;a_1+\frac{1}{3}\right]$, $\left[a_1+\frac{1}{3}\,;a_1+\frac{2}{3}\right]$ et $\left[a_1+\frac{2}{3}\,;a_1\right]$, il y en a au moins, un dont X_2 n'est pas l'élément. On le note $I_2 = [a_2\,;b_2]$. Ainsi, X_1 et X_2 ne sont pas dans I_2.

En itérant le procédé, on construit ainsi une suite infinie de segments $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, telle que :

Pour tout entier naturel n, X_1, X_2, ..., X_n ne sont pas dans I_1, I_2, ..., I_n et de longueur $\dfrac{1}{3^n}$ qui tend vers 0.

D'après le théorème des intervalles fermés emboités (que l'on verra bientôt), il existe un nombre réel x dans $[0\,;1]$ tel que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{I}_n = \{x\}$.

Or, comme $x \in [0\,;1] = \{\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_n, \dots\}$, il existe donc un entier n tel que $x = \mathrm{X}_n$.

Mais alors, par construction de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x = \mathrm{X}_n$ n'est pas dans I_n, ce qui est absurde.

D'où le résultat.

II Relation d'ordre sur ℝ

II.1 Être inférieur à

Définition 2 : Soit $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.

On dit que « *x est inférieur à y* » et on note $x \leqslant y$ si, et seulement si $y - x \in \mathbb{R}_+$.

Théorème 1 :

$(\mathbb{R}\,;\leqslant)$ est un ensemble totalement ordonné.

En particulier, tous les éléments de ℝ sont comparables :

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leqslant y \quad \text{ou} \quad y \leqslant x.$$

Remarques :

— La relation $\geqslant$ est aussi une relation d'ordre total sur ℝ.

— La relation $<$ est définie par $x < y \iff y - x \in \mathbb{R}_+^* \iff x \leqslant y$ et $x \neq y$.

ATTENTION | La relation $<$ n'est pas une relation d'ordre car elle n'est ni réflexive, ni anti-symétrique.

Preuve :

Réflexivité : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x - x = 0 \in \mathbb{R}_+$ donc $x \leqslant x$.

Antisymétrie : $\forall\ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2$, $(x \leqslant y$ et $y \leqslant x)$ entraîne $y - x \in \mathbb{R}_+$ et $-(y-x) \in \mathbb{R}_+$ puis $y - x = 0 \iff x = y$.

Transitivité : $\forall\ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2$, $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$ revient à écrire $y - x \in \mathbb{R}_+$ et $z - y \in \mathbb{R}_+$.

D'où $z - x = \underbrace{(z-y)}_{\in\mathbb{R}_+} + \underbrace{(y-x)}_{\in\mathbb{R}_+} \in \mathbb{R}_+ \iff x \leqslant z$.

Elle est totale : $\forall\ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2$, $x - y$ est positif ou négatif i.e. $x \leqslant y$ ou $x \geqslant y$.

Proposition 2 (Compatibilité de $\leqslant$ avec $+$ et $\times$) : Soient a, b, c et d des nombres réels.

1. Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ alors $a+c \leqslant b+d$.
2. Si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$ alors $ac \leqslant bd$.
3. $a \leqslant b \iff -b \leqslant -a$.
4. Si a et b sont non nuls de même signe alors $a \leqslant b \iff \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$.

En particulier,

— $a \leqslant b \iff \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ a+\lambda \leqslant b+\lambda$.

— $\forall\, \lambda > 0,\ a \leqslant b \iff \lambda\, a \leqslant \lambda\, b$ et $\forall\, \lambda < 0,\ a \leqslant b \iff \lambda\, a \geqslant \lambda\, b$.

ATTENTION L'assertion 4 ne dit pas que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*$ mais seulement qu'elle est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.

Preuve : On reprend l'idée de la démonstration du théorème (1).

1. $b+d-(a+c) = \underbrace{(b-a)}_{\in\mathbb{R}_+} + \underbrace{(d-c)}_{\in\mathbb{R}_+} \in \mathbb{R}_+ \iff a+c \leqslant b+d$.
2. Avec $d \geqslant 0$ par transitivité et $a \geqslant 0$, on a $bd-ac = (b-a)d + a(d-c) \in \mathbb{R}_+ \iff ac \leqslant bd$.
3. $-a-(-b) = b-a \in \mathbb{R}_+ \iff -b \leqslant -a$.
4. $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b-a}{ab} \in \mathbb{R}_+ \iff \left(\dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}\right)$ et (a et b de même signe).

ATTENTION On ne soustrait ni de divise des inégalités !

$$\begin{cases} 1 \leqslant 3 \\ 2 \leqslant 5 \end{cases} \quad \text{mais} \quad 1-2 > 3-5.$$

On pourra cependant les ajouter membre à membre ou les multiplier si tous les membres sont strictement positifs.

Remarque : Sur $\mathbb{C}$, il existe des relations d'ordre (lexicographique, ...), mais non compatibles avec les opérations.

Par exemple,

— Si $\mathrm{i} \geqslant 0$ alors $\mathrm{i} \times \mathrm{i} \geqslant 0 \times \mathrm{i}$ d'où $-1 \geqslant 0$. Absurde !

— Si $\mathrm{i} \leqslant 0$ alors $-\mathrm{i} \geqslant 0$. $(-\mathrm{i}) \times (-\mathrm{i}) \geqslant 0 \times (-\mathrm{i})$ d'où $-1 \geqslant 0$. Absurde aussi !

Exercice 2 : Soient a, b des réels strictement positifs.

1. Ordonner les réels $\dfrac{a+b}{2}$ et $\sqrt{ab}$.
2. Montrer que leur distance est majorée par $\dfrac{|b-a|^3}{8ab}$.

Correction :

1. $\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \dfrac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}{2} = \dfrac{(b-a)^2}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \geqslant 0$ donc $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

2 Par symétrie, on peut supposer que $a \leqslant b$.

D'où $\dfrac{(b-a)^2}{8b} \leqslant \dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{8a}$.

$d\left(\dfrac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{8a} - \dfrac{(b-a)^2}{8b} \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{8}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right) \leqslant \dfrac{(b-a)^3}{8ab}$.

II.2 Borne supérieure, borne inférieure

Rappel 1 (Parties bornées) : Soit $(\mathrm{E}, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

On dit que :

- A est *majorée* dans E lorsque : $\exists \mathrm{M} \in \mathrm{E},\ \forall x \in \mathrm{A},\ x \leqslant \mathrm{M}$.
- A est *minorée* dans E lorsque : $\exists m \in \mathrm{E},\ \forall x \in \mathrm{A},\ m \leqslant x$.
- A est *bornée* dans E lorsque A est à la fois majorée et minorée.

- A admet un *maximum* lorsque : $\exists b \in \mathrm{A},\ \forall x \in \mathrm{A},\ x \leqslant b$.
- A admet un *minimum* lorsque : $\exists a \in \mathrm{A},\ \forall x \in \mathrm{A},\ a \leqslant x$.

Exemple 1 : L'intervalle $[0\,;1[$ admet 0 pour plus petit élément mais n'admet PAS de plus grand élément.

1 $0 \in [0\,;1[$ et $\forall x \in [0\,;1[$, $0 \leqslant x$ donc 0 est le plus petit élément de $[0\,;1[$.

2 Supposons qu'il existe $\mathrm{M} \in [0\,;1[$ qui en soit le plus grand élément. Alors $\mathrm{M}' = \dfrac{\mathrm{M}+1}{2}$ vérifie, $\mathrm{M} < \mathrm{M}'$ et $\mathrm{M}' \in [0\,;1[$ ce qui contredit la « maximalité » de M.

Il n'existe donc pas de plus grand élément dans $[0\,;1[$.

L'une des propriétés caractéristiques de ℝ est l'existence d'une borne supérieure pour toute partie majorée.

Il s'agit d'une propriété caractéristique dans le sens où cette propriété fait partie de la définition de ℝ ou des axiomes régissant la relation d'ordre de celui-ci. Il est donc hors de propos de la démontrer.

Définition 3 (Borne supérieure) :

- Soit A une partie majorée de ℝ.

  On appelle *borne supérieure* de A, notée $\sup(\mathrm{A})$, le plus petit des majorants de A.
- Soit B une partie minorée de ℝ.

  On appelle *borne inférieure* de B, notée $\inf(\mathrm{B})$, le plus grand des minorants de B.

Notons que l'unicité de la borne supérieure (*resp.* inférieure) est une conséquence de l'unicité du plus petit élément (*resp.* plus grand élément) d'un ensemble. On pourra donc parler de LA borne supérieure mais jamais du majorant mais d'UN majorant. La borne supérieure nous apporte l'unicité qu'il nous manquait.

ATTENTION Les bornes inférieure et supérieure n'ont aucune raison d'exister.

Dans le cas des parties bornées, l'existence découle du théorème suivant qui est une conséquence de la construction de ℝ, une propriété intrinsèque dont nous verrons l'origine plus tard :

Théorème 3 (Propriété de la borne supérieure) :

Toute partie non vide et majorée de ℝ possède une borne supérieure.

ATTENTION

Ce théorème est faux dans $\mathbb{Q}$.

Par exemple $A = \{q \in \mathbb{Q}^+, q^2 \leqslant 2\}$ est non vide (elle contient 0) et majorée (par 10).

Si A admettait une borne supérieure $\alpha \in \mathbb{Q}$:

— Si $\alpha^2 < 2$, alors, on peut trouver un entier n tel que $\alpha + \dfrac{1}{n} \in A$; absurde.

— Si $\alpha^2 > 2$, alors, on peut trouver un entier n tel que $\alpha - \dfrac{1}{n}$ majore A ; absurde.

— Si $\alpha^2 = 2$, alors $\alpha \notin \mathbb{Q}$; absurde.

Conclusion, A ne possède pas de borne supérieure.

On prendra garde au fait qu'une partie A peut posséder une borne supérieure a sans avoir de plus grand élément.

Réciproquement, si A possède un plus grand élément a, alors $a = \max(A) = \sup(A)$.

Preuve : En effet, soit $a = \max(A)$:

– Pour tout $b \in A$, on a $b \leqslant a$, donc a est un majorant de A qui est, en particulier, majorée. La borne supérieure est donc correctement définie. Comme c'est le plus petit des majorants, on a :

$$\sup(A) \leqslant a.$$

– Réciproquement, $\sup(A)$ est aussi un majorant de A donc majore tout élément de A, y compris son plus grand élément donc $a \leqslant \sup(A)$ et l'égalité.

Exercice 3 : Compléter :

	min(A)	inf(A)	max(A)	sup(A)
$A = \{1\}$				
$A = \{2, 4\}$				
$A = \left\{\dfrac{1}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$				
$A = \{x \in \mathbb{Q} \,/\, x^2 \leqslant 2\}$				

Commentaires : *La propriété de la borne supérieure est un pur résultat d'EXISTENCE et ne raconte rien d'intéressant sur la VALEUR des bornes supérieures.*

Telle borne supérieure existe, c'est magique, mais la propriété n'en dit pas plus.

Pour montrer que $\sup([0,1[) = 1$, *nous n'avons pas eu besoin de la propriété de la borne supérieure car nous avions à l'avance une idée très claire de la valeur de cette borne, mais il arrivera souvent que nous n'ayons aucune idée précise de ce genre.*

La propriété de la borne supérieure sera alors notre lueur dans l'obscurité, la petite magie qui fera surgir des êtres de nulle part et nous permettra d'avancer. L'exemple le plus flagrant est la démonstration du théorème de la limite monotone : « tout suite croissante et majorée de réels converge dans $\mathbb{R}$. *» Nous verrons cela plus loin.*

Un autre exemple est la définition correcte de la racine carrée : « La racine carrée d'un réel positif a *est, par définition, l'unique réel positif* r *pour lequel* $r^2 = a$. *»*

Cette définition est un théorème d'existence et d'unicité avant d'être une définition. L'unicité est claire, car pour tous $r, r' \geqslant 0$, *si* $r^2 = r'^2$, *alors* $r = \pm r'$, *donc* $r = r'$ *par positivité.*

Mais l'existence, qui nous la garantit ? Si vous y réfléchissez bien, vous avez accepté l'existence des racines carrées sans même vous en rendre compte alors qu'elle n'a rien d'évident, et elle découle en fait de la propriété de la borne supérieure.

Preuve : Fixons $a \geqslant 0$. L'ensemble $\mathrm{R} = \{r \geqslant 0 \,/\quad r^2 \leqslant a\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$.

En effet,

- R est non vide car il contient 0.
- R est majoré par $a+1$ car pour tout $r \in \mathrm{R}$: $r^2 \leqslant a \leqslant a+1 \overset{a+1\geqslant}{\leqslant} (a+1)^2$, donc $(a+1-r)(a+1+r) \geqslant 0$ et $a+1-r \geqslant 0$.

  Enfin, $r \leqslant a+1$.

D'après le **théorème** (3), l'ensemble R possède une borne supérieure que l'on note dorénavant $\sqrt{a}$:

$$\sqrt{a} = \sup\{r \geqslant 0 \,/\, r^2 \leqslant a\}.$$

Ceci est la vraie définition propre de la racine carrée.

Remarque : Si on partait du principe qu'on connaissait les racines carrées, alors évidemment $\mathrm{R} = [0\,;\sqrt{a}]$. Dans notre cas contraire, on aura posé $\sqrt{a} = \sup(\mathrm{R})$.

Théorème 4 (Caractérisation de la borne supérieure) : Soit A une partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ et $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{M} = \sup \mathrm{A} \iff \begin{cases} \text{M est un majorant de A} \\ \forall\, \mathrm{M}' \text{ majorant de A, } \mathrm{M} \leqslant \mathrm{M}' \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \text{M est un majorant de A} \\ \forall\, b < \mathrm{M},\ b \text{ n'est pas un majorant de A} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \forall\, x \in \mathrm{A},\ x \leqslant \mathrm{M} \\ \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, x_\varepsilon \in \mathrm{A} \text{ tel que } \mathrm{M} - \varepsilon < x_\varepsilon. \end{cases}$$

Exercice 4 : Sur le même modèle, écrire une caractérisation de la borne inférieure.

Correction : Soit B une partie minorée non vide de $\mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$.

$$m = \inf(\mathrm{B}) \iff \begin{cases} m \text{ est un minorant de B} \\ \forall\, m' \text{ minorant de B, } m' \leqslant m \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} m \text{ est un minorant de B} \\ \forall\, m < b,\ b \text{ n'est pas un minorant de B} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \forall\, x \in \mathrm{B},\ m \leqslant x \\ \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, x_\varepsilon \in \mathrm{B} \text{ tel que } x_\varepsilon < m + \varepsilon. \end{cases}$$

Corollaire 4.1 (Borne inférieure d'une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$) : Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

Preuve : Il suffit en effet d'effectuer une symétrie par rapport à 0 pour échanger les nombres positifs et négatifs, pour transformer une partie majorée en partie minorée et une borne supérieure en borne inférieure.

Plus formellement, soit B une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. On considère $\mathrm{A} = \{-b,\ b \in \mathrm{B}\}$ qui est donc une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Elle admet une borne supérieure S.

Montrons que $-\mathrm{S}$ est une borne inférieure de B.

Pour tout élément b de B, $-b \leqslant \mathrm{S} \iff -\mathrm{S} \leqslant b$. $-\mathrm{S}$ est donc un minorant de B.
Pour tout ε strictement positif il existe un $a \in \mathrm{A}$ tel que $\mathrm{S} - \varepsilon < a \iff -a < -\mathrm{S} + \varepsilon$. Comme $-a \in \mathrm{B}$, $-\mathrm{S} + \varepsilon$ ne minore pas B pour tout $\varepsilon > 0$ i.e. $-\mathrm{S}$ est le plus grand des minorants de B.

C'est donc la borne inférieure de B.

Méthode 1 (Utilisation courante de la borne supérieure) :
Soient A une partie de $\mathbb{R}$ admettant une borne supérieure.

1. Pour montrer que $\sup(\mathrm{A}) \leqslant \mathrm{M}$, il suffit de montrer : $\forall\, a \in \mathrm{A}, \quad a \leqslant \mathrm{M}$
2. Pour montrer que $\sup(\mathrm{A}) \geqslant \mathrm{M}$, il suffit de montrer : $\exists\, a_0 \in \mathrm{A}, \quad a_0 \geqslant \mathrm{M}$;

Preuve :

1. C'est l'utilisation la plus courante de la borne supérieure et souvent désignée sous le nom de passage à la borne supérieure.

   Il suffit de montrer que M est un majorant de A. Par définition, $\sup(\mathrm{A})$ étant le plus petit, on aura, par définition, je le répète, $\sup(\mathrm{A}) \leqslant \mathrm{M}$.

   C'est une condition nécessaire et suffisante.
2. C'est simplement de la transitivité de $\leqslant$ ou encore M n'est pas un majorant de A donc il est plus petit que n'importe lequel des majorants de A. En particulier, $\sup(\mathrm{A})$:
$$\mathrm{M} \leqslant a_0 \leqslant \sup(\mathrm{A}).$$

Attention, c'est simplement une condition suffisante. Par exemple, pour prouver que $\sup([2\,;3[) \geqslant 3$, on ne pourra pas trouver de $a \in [2\,;3[$ tel que $a \geqslant 3$. On raisonnera ici par la contradiction en supposant $\sup([2\,;3[) < 3$.

Exemple 2 : L'intervalle $[0\,;1[$ admet 1 comme borne supérieure.

1. Par définition, $\forall\, x \in [0\,;1[$, $x \leqslant 1$ donc $[0\,;1[$ est une partie non vide est majorée. $\sup([0\,;1[)$ existe d'après le théorème (3) et on a :
$$\sup([0\,;1[) \leqslant 1.$$
2. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque. Montrons que $1-\varepsilon$ n'est pas un majorant de $[0\,;1[$.

   On sait déjà que $1-\varepsilon \in [0\,;1[$, de même que $\dfrac{(1-\varepsilon)+1}{2} = 1-\dfrac{\varepsilon}{2}$.

   Comme $1-\varepsilon < 1-\dfrac{\varepsilon}{2} < 1$, le réel $1-\varepsilon$ n'est pas un majorant de $[0\,;1[$.

La réunion des points 1 et 2, montre que 1 est un majorant de $[0\,;1[$ et que c'est le plus petit. Le réel 1 est donc la borne supérieure de $[0\,;1[$.

Exercice 5 : Soient A et B deux parties de ℝ non vides et bornées telles que $A \subset B$.
Montrer que $\inf(B) \leqslant \inf(A)$ et $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.

Correction : *$\inf(B)$ est un minorant de B donc un minorant de A, par conséquent $\inf(B) \leqslant \inf(A)$ car $\inf(A)$ est le plus grand des minorants de A.*

De même, $\sup(B)$ majore B , donc majore A également, d'où $\sup(A) \leqslant \sup(B)$ car $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A.

II.3 Fonctions bornées

Définition 4 (Fonction bornées) : Soient I un sous-ensemble de ℝ et $f : I \longmapsto \mathbb{R}$.

- Une fonction f est dite *majorée* sur I lorsqu'il existe un réel M tel que :
$$\forall\, x \in I,\ f(x) \leqslant M.$$
Le réel M est alors appelé un *majorant* de f (sur I).
On appelle alors *borne supérieure* de f sur I, notée $\sup\limits_{I}(f)$, le réel
$$\sup_{I}(f) = \sup\{f(x),\ x \in I\}.$$
- Une fonction f est dite *minorée* sur I lorsqu'il existe un réel m tel que :
$$\forall\, x \in I,\ f(x) \geqslant m.$$
Le réel m est alors appelé un *minorant* de f (sur I).

On appelle alors *borne inférieure* de f sur I, notée $\inf_{\mathrm{I}}(f)$, le réel

$$\inf_{\mathrm{I}}(f) = \inf\{f(x),\ x \in \mathrm{I}\}.$$

- Une fonction f est dite *bornée* lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

Exercice 6 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{F}(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$.

1. Démontrer que si f et g sont majorées alors $f+g$ est majorée et

$$\sup_{\mathrm{I}}(f+g) \leqslant \sup_{\mathrm{I}} f + \sup_{\mathrm{I}} g. \tag{XII.1}$$

2. Donner un exemple où l'inégalité (XII.1) est stricte.
3. Démontrer que si f est majorée et g bornée alors $\sup_{\mathrm{I}}(f+g) \geqslant \sup_{\mathrm{I}} f + \inf_{\mathrm{I}} g$.

Correction :

1. Soit $x \in \mathrm{I}$. On a, $f(x)+g(x) \leqslant \sup_{\mathrm{I}} f + \sup_{\mathrm{I}} g$.

   Donc $f+g$ est majorée sur I et on a $\sup_{\mathrm{I}}(f+g) \leqslant \sup_{\mathrm{I}} f + \sup_{\mathrm{I}} g$.
2. Il suffit de prendre, par exemple, $f = \cos$ et $g = \sin$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

   Alors $\sup_{\mathbb{R}}(f+g) = \sup_{\mathbb{R}} \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} < 2 = \sup_{\mathbb{R}} f + \sup_{\mathbb{R}} g$.
3. Pour tout x de I, $f(x) = f(x) + g(x) - g(x)$.

   Donc $f(x) \leqslant \sup_{\mathrm{I}}(f+g) - \inf_{\mathrm{I}} g$ puis $\sup_{\mathrm{I}} f \leqslant \sup_{\mathrm{I}}(f+g) - \inf_{\mathrm{I}} g$.

   Enfin, $\sup_{\mathrm{I}}(f+g) \geqslant \sup_{\mathrm{I}} f + \inf_{\mathrm{I}} g$.

III Topologie de ℝ

III.1 La droite numérique achevée

La propriété de la borne supérieure est un outil puissant mais présente tout de même un gros inconvénient. On aurait préféré l'énoncé suivant : « Toute partie de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure. »

Que manque-t-il à $\mathbb{R}$ pour que ce résultat soit vrai ? Pourquoi $\mathbb{R}$ lui-même, par exemple, n'a-t-il pas de borne supérieure ?

Réponse : parce qu'il n'a pas de majorant. Eh bien rajoutons-en ! Donnons-nous pour cela deux objets mathématiques quelconques extérieurs à $\mathbb{R}$ (par exemple i et $-\mathrm{i}$) et notons les $+\infty$ et $-\infty$. Peu importe qui ils sont, ce qui compte, ce sont les règles de calcul que nous allons leur imposer. En principe, ces règles devraient vous paraître naturelles.

Définition 5 (Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$) : L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\,;+\infty\}$, noté $\overline{\mathbb{R}}$, est appelé *droite numérique achevée.*

On étend à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation $\leqslant$, l'addition $+$ et la multiplication $\times$ de $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

Prolongement de l'ordre : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ -\infty < x < +\infty$.

Prolongement de l'addition : $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

- $(+\infty) + x = x + (+\infty) = +\infty$.
- $(-\infty) + x = x + (-\infty) = -\infty$.
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

Prolongement de la multiplication :

- $\dfrac{1}{+\infty} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$.

$\forall\, x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$,

- $x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = \begin{cases} +\infty & \text{si } x > 0 \\ -\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$
- $x \times (-\infty) = (-\infty) \times x = \begin{cases} -\infty & \text{si } x > 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$

L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ devient ainsi un ensemble totalement ordonné. De plus il possède un maximum $+\infty$ et un minimum $-\infty$.

On prendra garde au fait que nous n'avons pas totalement défini de loi de composition interne dans $\overline{\mathbb{R}}$ puisque nous n'avons pas défini

- $0 \times (\pm\infty)$
- $(-\infty) + (+\infty)$
- $(-\infty) - (-\infty)$
- $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

qui restent des formes indéterminées.

Les règles de calculs définies ci-dessus auront leur utilité dans la section sur les limites.

Remarque : Ainsi définie, la droite réelle achevée n'est qu'une notation commode, qui permet d'éviter de séparer les cas entre un réel et l'infini dans les énoncés.

Par exemple, les intervalles ouverts seront ceux qui s'écrivent $]a\,;b[$ avec $a,\ b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Il n'est pas trop dur de montrer que les majorants/plus grands éléments/bornes supérieures que nous calculons dans $\mathbb{R}$ sont encore des majorants/plus grands éléments/bornes supérieures dans $\overline{\mathbb{R}}$, mais certaines parties qui n'avaient pas de majorant/plus grand élément/borne supérieure se trouvent maintenant en avoir.

— L'intervalle $\mathbb{R}_+$ est majoré par $+\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ et y admet même $+\infty$ pour borne supérieure alors qu'il n'était pas majoré dans $\mathbb{R}$.

— L'ensemble vide admet tout élément de $\overline{\mathbb{R}}$ pour majorant dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Comme $\overline{\mathbb{R}}$ admet $-\infty$ pour plus petit élément dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $\emptyset$ admet $-\infty$ pour borne supérieure (dans $\overline{\mathbb{R}}$) !

Plus généralement, la propriété de la borne supérieure s'énonce avec plus de pureté :

Proposition 5 : Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ (éventuellement $\pm\infty$).

En outre, si les bornes supérieure et inférieure existent dans $\mathbb{R}$ alors elles coïncident avec leur homologue dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Preuve : Si A est majorée dans $\mathbb{R}$, c'est terminé. Sinon, l'ensemble des majorants de A dans $\overline{\mathbb{R}}$ est réduit à $\{+\infty\}$ i.e. il y a donc bien une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ qui n'a d'autre choix d'être $+\infty$.

Le raisonnement est identique pour la borne inférieure.

III.2 Intervalles de $\mathbb{R}$

La relation d'ordre permet également de définir la notion d'intervalle.

En effet, qu'est-ce donc d'autre qu'un ensemble de valeurs à la fois inférieures et supérieures à deux bornes :

Définition 6 : Soient $(a\,;b) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^2$.

On définit les ensembles suivants :

- $[a\,;b] = \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} \,/\, a \leqslant x \leqslant b\right\}$
- $]a\,;b] = \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} \,/\, a < x \leqslant b\right\}$
- $[a\,;b[= \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} \,/\, a \leqslant x < b\right\}$
- $]a\,;b[= \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} \,/\, a < x < b\right\}$

On appelle *intervalle* de $\overline{\mathbb{R}}$ toute partie I de $\overline{\mathbb{R}}$ vérifiant :

$$\forall\, x, y \in \mathrm{I},\ x \leqslant y \implies [x\,;y] \subset \mathrm{I}.$$

Un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ est donc une partie de $\overline{\mathbb{R}}$ qui, quand elle contient deux points, contient aussi toutes leurs « valeurs intermédiaires ».

Exemples 3 :

- Lorsque $a, b \in \mathbb{R}$, on appelle *segment* l'ensemble $[a\,;b] \subset \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \text{Si } a < b, & [a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leqslant x \leqslant b\} \\ \text{Si } a = b, & [a\,;a] = \{a\} \\ \text{Si } a > b, & [a\,;b] = \emptyset \end{cases}$$

- $\varnothing$ et $\{a\}$ sont dits *intervalles triviaux* de $\mathbb{R}$. Ce sont les seuls intervalles de $\mathbb{R}$ qui soient finis.
- $\mathbb{Z}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$ car $1, 2 \in \mathbb{Z}$ mais pas $\dfrac{3}{2} \in \mathbb{Z}$.
- $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle car $-1, 1 \in \mathbb{R}^*$ mais pas $[-1\,;1]$ qui contient $0 \notin \mathbb{R}^*$.
- $\mathbb{Q}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$ (*cf.* corollaire (13.1)).

Théorème 6 (Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$) : Les intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$ sont exactement les ensembles $[a\,;b]$, $[a\,;b[$, $]a\,;b]$ et $]a\,;b[$ pour a et b décrivant $\overline{\mathbb{R}}$.

Les intervalles $[a\,;b]$ et $]a\,;b[$ avec $(a\,;b) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^2$ sont respectivement dit *fermé* et *ouvert*.

Preuve : Commençons par démontrer que que les ensembles décrits sont bien des intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$. Sans perte de généralités, on ne le démontre que pour $[a\,;b[$ par exemple.

Soient $x, y \in [a\,;b[$ tels que $x \leqslant y$. Montrons que $[x\,;y] \subset [a\,;b[$.

Or, $\forall\, t \in [x\,;y]$, $a \leqslant x \leqslant t \leqslant y < b$

Donc $t \in [a\,;b[$ et $[x\,;y] \subset [a\,;b[$ qui est bien un intervalle.

Réciproquement, considérons I un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ et montrons que I est de l'un des quatre types précédents.

Comme I est un intervalle non vide de $\overline{\mathbb{R}}$, il possède une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ que l'on note respectivement b et a.

On distingue plusieurs cas :

Cas où $a \in \mathrm{I}$ et $b \in \mathrm{I}$: Montrons que $\mathrm{I} = [a\,;b]$.

- Comme I est un intervalle et que $a, b \in \mathrm{I}$ alors $[a\,;b] \subset \mathrm{I}$.
- Comme a minore I et b majore I, $\forall\, x \in \mathrm{I}$, $a \leqslant x \leqslant b$ i.e. $\mathrm{I} \subset [a\,;b]$.

Par double inclusion, $\mathrm{I} = [a\,;b]$.

Cas où $a \in \mathrm{I}$ et $b \notin \mathrm{I}$: Montrons que $\mathrm{I} = [a\,;b[$.

- Soit $x \in [a\,;b[$. Comme $x < b = \sup(\mathrm{I})$, x ne majore pas I : $\exists\, b' \in \mathrm{I}$ tel que $x \leqslant b'$ i.e. $a \leqslant x \leqslant b'$ avec $a, b' \in \mathrm{I}$.
  Comme I est un intervalle alors $x \in \mathrm{I}$ et $[a\,;b[\subset \mathrm{I}$.
- Réciproquement, soit $x \in \mathrm{I}$. Comme a minore I et b majore I : $a \leqslant x \leqslant b$.

  Or, $x \in \mathrm{I}$ alors que $b \notin \mathrm{I}$.

  Donc $a \leqslant x < b$ i.e. $x \in [a\,;b[$ et $\mathrm{I} \subset [a\,;b[$.

Par double inclusion, $\mathrm{I} = [a\,;b[$.

Cas où $a \notin \mathrm{I}$ et $b \in \mathrm{I}$: On démontre de la même manière que $\mathrm{I} =]a\,;b]$.

Cas où $a \notin \mathrm{I}$ et $b \notin \mathrm{I}$: On démontre enfin que $\mathrm{I} =]a\,;b[$.

Exemples 4 (Classification des intervalles de $\mathbb{R}$) : Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont :

- l'ensemble vide $\varnothing$,
- l'ensemble $\mathbb{R}$ tout entier,
- les singletons $\{a\}$, avec $a \in \mathbb{R}$ un réel,
- les segments $[a\,;b]$, avec $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$,
- les intervalles ouverts $]a\,;b[$, avec $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$,
- les intervalles semi-ouverts ou semi-fermés $[a\,;b[$ et $]a\,;b]$, avec $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$,
- les demi-droites fermées $[a\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;a]$, avec $a \in \mathbb{R}$, définies respectivement par

$$[a\,;+\infty[= \Big\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geqslant a\Big\} \qquad \text{et} \qquad]-\infty\,;a] = \Big\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leqslant a\Big\},$$

- les demi-droites ouvertes $]a\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;a[$, avec $a \in \mathbb{R}$, définies respectivement par

$$]a\,;+\infty[= \Big\{x \in \mathbb{R} \,/\, x > a\Big\} \qquad \text{et} \qquad]-\infty\,;a[= \Big\{x \in \mathbb{R} \,/\, x < a\Big\},$$

III.3 Voisinages

Comme on a pu le constater, la distinction souvent nécessaire entre un point fini et les deux infinis amène parfois, comme dans les théorèmes sur les limites, à considérer plusieurs cas.

Pour les études pratiques, ce n'est pas gênant : il suffit de considérer le cas qui nous concerne mais pour des études plus théoriques, notamment pour établir des propriétés générales, il peut être plus commode d'avoir une description plus uniforme, évitant d'avoir à distinguer entre un grand nombre de cas. C'est là qu'entre en jeu la *topologie*[3].

Le concept de voisinage n'est pas au programme de PTSI, mais nous ne le regretterons pas.

Définition 7 (Voisinage d'un point) : Soit $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

On appelle *voisinage* de a, noté $\mathcal{V}(a)$, toute partie $\mathrm{V} \subset \overline{\mathbb{R}}$ telle que $a \in \mathrm{V}$ et V contient un intervalle ouvert contenant a.

$$\mathrm{A} \in \mathcal{V}(a) \iff \exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ ]a-\varepsilon\,;a+\varepsilon[\, \subset \mathrm{A}.$$

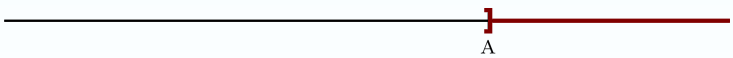
Les voisinages peuvent être un tantinet compliqué mais, intuitivement, le point a est non seulement dans A, mais il lui reste un peu de place autour.

Exemples 5 (Exemples de voisinages) : Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

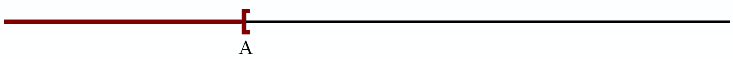
Les voisinages de a sont les intervalles de la forme :

- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $]a-\varepsilon\,;a+\varepsilon[$ est un voisinage de a.

- $\forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R}$, $]\mathrm{A}\,;+\infty[$ est un voisinage de $+\infty$.



- $\forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R}$, $]-\infty\,;\mathrm{A}[$ est un voisinage de $-\infty$.



Exemples 6 :

- $[0\,;1]$ est un voisinage de $0,2$: prendre $\varepsilon = 0,1$ par exemple.
- $[0\,;1]$ est un voisinage de $0,98$: prendre $\varepsilon = 0,01$ par exemple.
- $[0\,;1]$ n'est pas un voisinage de 1 : pour tout $\varepsilon > 0$, $]1-\varepsilon\,;1+\varepsilon[$ déborde à droite.
- $[0\,;1]$ est voisinage de toute réel a vérifiant $0 < a < 1$: il suffit de prendre $\varepsilon = \min\{a, 1-a\}$ (la plus petite des distances de a aux bornes de $[0\,;1]$).

D'une manière générale, les voisinages permettent de donner un sens à la notion de localité de certaines propriétés comme la continuité, la dérivabilité, ...

[3]. En mathématiques, le mot topologie désigne l'étude des propriétés de continuité des fonctions, de limite des suites, ...

Définition 8 (Propriété vraie dans un voisinage) : Soit $\mathcal{P}(x)$ une proposition dépendante de $x \in \mathbb{R}$, et soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que $\mathcal{P}$ est *vraie au voisinage de a* lorsqu'il existe un voisinage V_a de a tel que :

$$\forall\, x \in \mathrm{V}_a,\ \mathcal{P}(x) \text{ est vraie.}$$

Considérons une fonction f définie sur un intervalle I. On dira, par exemple, que a est un maximum local de f sur I si, et seulement si il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a tel que f admette un maximum global sur $\mathrm{I} \cap \mathcal{V}_a$.

Théorème 7 (Lemme de séparation) :

1. Pour tout $a \in \overline{\mathbb{R}}$, l'intersection de deux voisinages de a est un voisinage de a :

$$\forall\, \mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2 \in \mathcal{V}(a),\ \mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2 \in \mathcal{V}(a).$$

2. Deux points distincts de $\overline{\mathbb{R}}$ possèdent des voisinages disjoints :

$$\forall\ (a\,;b) \in \overline{\mathbb{R}}^2,\ a \neq b \implies \exists\, \mathrm{V}_a \in \mathcal{V}(a), \exists\, \mathrm{V}_b \in \mathcal{V}(b) \text{ tels que } \mathrm{V}_a \cap \mathrm{V}_b = \varnothing.$$

Preuve :

1. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et V_1 et V_2 deux voisinages de a.

Cas où $a \in \mathbb{R}$: Il existe deux réels $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ pour lesquels $]a-\varepsilon_1\,;a+\varepsilon_1[\ \subset \mathrm{V}_1$ et $]a-\varepsilon_2\,;a+\varepsilon_2[\ \subset \mathrm{V}_2$.

En posant $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, il est clair que $]a-\varepsilon\,;a+\varepsilon[\ \subset \mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2$.

Donc, $\mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2$ est bien un voisinage de a.

Cas où $a = +\infty$: Il existe deux réels $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$ pour lesquels $]\mathrm{A}_1\,;+\infty[\ \subset \mathrm{V}_1$ et $]\mathrm{A}_2\,;+\infty[\ \subset \mathrm{V}_2$.

En posant $\mathrm{A} = \max\{\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2\}$, il est clair que $]\mathrm{A}\,;+\infty[\ \subset \mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2$.

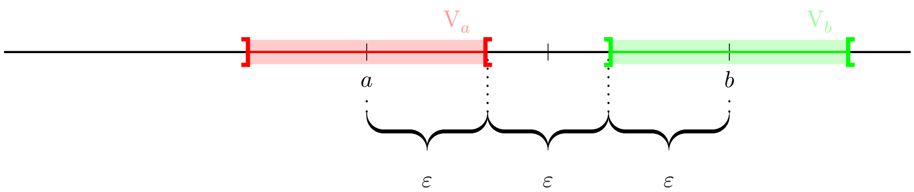
Donc, $\mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2$ est bien un voisinage de a.

Cas où $a = -\infty$: Identique à précédemment.

2. Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ deux réels distincts. Sans perte de généralités, on peut supposer $a < b$.

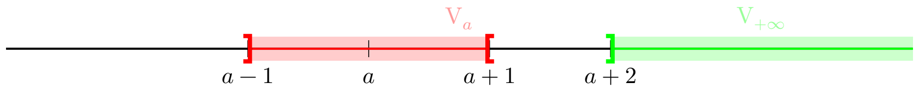
Cas où $a, b \in \mathbb{R}$: Posons $\varepsilon = \dfrac{b-a}{3} > 0$, puis $\mathrm{V}_a =]a-\varepsilon\,;a+\varepsilon[$ et $\mathrm{V}_b =]b-\varepsilon\,;b+\varepsilon[$.

Comme voulu, V_a est un voisinage de a, V_b un voisinage de b et $\mathrm{V}_a \cap \mathrm{V}_b = \varnothing$.



Cas où $a \in \mathbb{R}$ et $b = +\infty$: Il suffit de poser $\mathrm{V}_a =]a-1\,;a+1[$ et $\mathrm{V}_{+\infty} =]a+2\,;+\infty[$.

Comme voulu, V_a *est un voisinage de* a*,* $\mathrm{V}_{+\infty}$ *un voisinage de* $+\infty$ *et* $\mathrm{V}_a \cap \mathrm{V}_{+\infty} = \varnothing$.



Remarque : Une autre manière de voir l'assertion (2) est d'écrire : *Soient a et b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$. Si $a < b$ alors il existe un voisinage V_a de a et un voisinage V_b de b tels que :*

$$\forall\, x \in \mathrm{V}_a \;\; \textit{et}\;\; y \in \mathrm{V}_b,\; x < y.$$

Ce théorème permettra, entre autre, de démontrer l'unicité de la limite d'une suite ou d'une fonction en un point de $\overline{\mathbb{R}}$.

Une dernière notion qui nous sera utile par la suite avant de nous arrêter :

Définition 9 (Ouvert) : Soit U une partie de $\mathbb{R}$.

On dit que U est un *ouvert* si, et seulement si U est un voisinage de chacun de ses points :

$$\forall\, a \in \mathrm{U}, \left|\begin{array}{l} \exists\, \mathrm{V} \in \mathcal{V}(a),\; \mathrm{V} \subset \mathrm{U}. \\ \text{ou} \\ \exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\;]a-\varepsilon\,;a+\varepsilon[\subset \mathrm{U}. \end{array}\right.$$

Intuitivement, tous les points de U ont un peu de place autour d'eux.

Exemples 7 :

- $\varnothing$ est ouvert, puisqu'il n'y a même pas de point a à tester, c'est donc tout bon.
- un ensemble de cardinal fini ne peut pas être ouvert (dès qu'il y a un point a dans U, il y a alors dans U un intervalle entier $]a-\varepsilon\,;a+\varepsilon[$)
- $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas ouverts : leurs points sont isolés.
- Tout intervalle ouvert $]b\,;c[$ est ouvert !

  $\left(\text{pour } a \text{ vérifiant } b < a < c, \text{ on peut prendre } \varepsilon = \min\left\{\dfrac{a-b}{2}, \dfrac{c-a}{2}\right\}\right)$.
- $\mathbb{R}$ est ouvert.
- Une intersection de deux ouverts U et V est encore un ouvert.
- Une réunion d'ouverts est un ouvert. En particulier, toute réunion d'intervalles ouverts est ouverte.

Dernière petite remarque complètement hors-programme avant de quitter ce paragraphe. C'est précisément l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ qui s'appelle une *topologie*. Celui-ci devient alors un *espace topologique*.

Doter $\mathbb{R}$ ou un un ensemble d'une topologie revient donc à le munir de tous les outils nécessaires à l'étude des limites, de la continuité, de la dérivabilité,… en un mot, tous les outils nécessaires pour faire de l'analyse !

IV Opérateurs réels

IV.1 Valeur absolue

La relation d'ordre permet de doter $\mathbb{R}$ d'une *norme* :

Définition 10 (Valeur absolue) : Soit $x \in \mathbb{R}$.

La *valeur absolue* de x est le nombre réel noté $|x|$ défini par :

$$|x| = \max(x\,;-x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0, \\ -x & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Remarque : Une partie A est bornée si, et seulement si $\exists\, \mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall\, x \in \mathrm{A},\ |x| \leqslant \mathrm{M}.$$

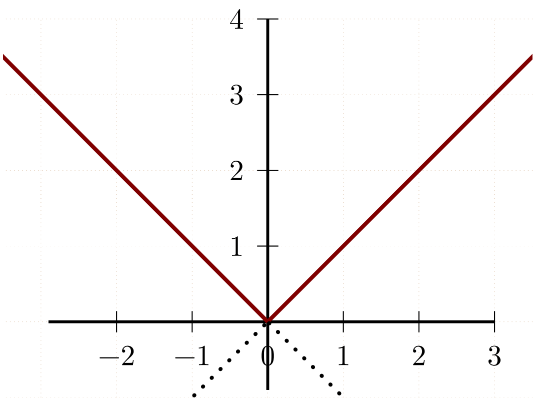


Figure XII.1 – $x \longmapsto |x|$.

Méthode 2 (Équation avec la valeur absolue) :
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

1. $|x-a| = r \iff x-a = r \quad$ ou $\quad x-a=-r$.
2. $|x-a| \leqslant r \iff -r \leqslant x-a \leqslant r \quad$ ou $\quad \begin{cases} x-a \leqslant r \\ x-a \geqslant -r \end{cases}$.
3. $|x-a| \geqslant r \iff x-a \geqslant r \quad$ ou $\quad x-a \leqslant -r$.

Exemple 8 : Écrire $|x-3|-|x+2|$ sans valeurs absolues.

On se ramène à la définition :

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \geqslant 3 \\ -x+3 & \text{si } x < 3 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad |x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \geqslant -2 \\ -x-2 & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

Le mieux est de représenter la situation par un tableau :

x		-2		3	
$\lvert x-3\rvert$	$3-x$		$3-x$	0	$x-3$
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	0	$x+2$		$x+2$
$\lvert x-3\rvert-\lvert x+2\rvert$	5		$1-2x$		-5

$$|x-3|-|x+2| = \begin{cases} 5 & \text{si } x \in]-\infty,-2[\\ 1-2x & \text{si } x \in [-2,3[\\ -5 & \text{si } x \in [3,+\infty[\end{cases}$$

Exemple 9 : Résolution de l'équation $|x-4| = 2x+10$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

$$|x-4| = 2x+10 \iff \begin{cases} x-4 = 2x+10 & \text{si } x \geqslant 4 \\ \text{ou} & \\ 4-x = 2x+10 & \text{si } x < 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -14 & \text{si } x \geqslant 4 \\ \text{ou} & \\ x = -2 & \text{si } x < 4 \end{cases}$$

Comme $-14 \notin [4,+\infty[$, il ne subsiste qu'une seule solution : $\mathscr{S} = \{-2\}$.

Exemple 10 : Résolution de l'inéquation $|x-2| < \dfrac{3}{x}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^*$.

On remarque que l'inéquation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}_-^*$ car $\dfrac{3}{x} < 0$ pour tout $x < 0$ alors que $|x-2| \geqslant 0$. On restreint donc notre résolution à $\mathbb{R}_+^*$.

$$|x-2| < \frac{3}{x} \iff -\frac{3}{x} < x-2 < \frac{3}{x} \underset{x>0}{\iff} -3 < x(x-2) < 3$$

$$\iff \begin{cases} 0 < x^2-2x-3 \\ \text{et} \\ (x+1)(x-3) < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \mathbb{R}_+^* \text{ car } \Delta = -8 < 0 \\ \text{et} \\ x \in]-1\,;3[\cap \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

En conclusion, $\mathscr{S} =]0\,;3[$.

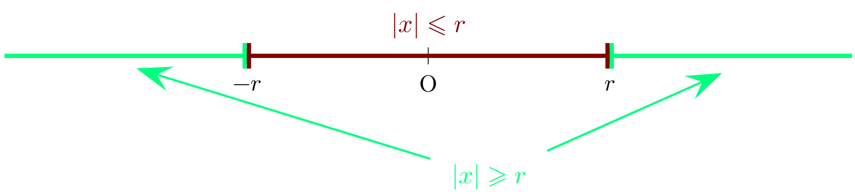


Figure XII.2 – $|x| \leqslant r$ et $|x| \geqslant r$.

Exercice 7 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|4x-5| = 3$.
2. $|4x-5| \leqslant 3$.
3. $|2x-7| > 1$.

Tout de suite, quelques propriétés évidentes mais importantes à retenir :

Proposition 8 (Propriété de la valeur absolue) : Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. $|x| \geqslant 0$ La valeur absolue est positive.

2. $|x| = 0 \iff x = 0$ La valeur absolue est définie.
3. $|-x| = |x|$ La valeur absolue est paire.
4. $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.
5. $\sqrt{x^2} = |x|$ La valeur absolue dérive d'un produit scalaire.

En particulier,

Corollaire 8.1 :

- De la définition, $|x| = |y| \iff x = y \quad \text{ou} \quad x = -y$.
- De la parité, on n'oubliera pas que $|x - y| = |y - x|$.
- Du lien avec la racine carrée, on démontre aussi que

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ |xy| = |x|\,|y| \qquad \text{et} \qquad \forall\ (x\,;y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Enfin, et de loin la propriété la plus importante :

Proposition 9 (Inégalité triangulaire) : Pour tous réels x et y, on a :

$$\Big||x| - |y|\Big| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y|. \tag{XII.2}$$

Avec égalité si, et seulement si x et y sont de même signe.

Remarque : Si $x \neq 0$, dire que x et y sont de même signe est équivalent à dire qu'il existe un réel λ positif tel que $x = \lambda y$ puisque $x = \underbrace{\left(\frac{x}{y}\right)}_{\geqslant 0} y$. Si $x = 0$, $\lambda = 0$ convient.

On retrouve ainsi, écrite plus simplement, la même condition d'égalité que pour l'inégalité triangulaire complexe.

Preuve : *Soient x et y deux réels. On a :*

$$\begin{aligned}|x+y|^2 &= (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2\\ &\leqslant |x|^2 + 2\,|x|\,|y| + |y|^2\\ &= \big(\,|x| + |y|\,\big)^2.\end{aligned}$$

D'après la croissance de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$, on obtient alors :

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|\,.$$

Pour la première inégalité, il suffit alors de remarquer que :

- $|x| = |x + y - y| \leqslant |x+y| + |y| \implies |x| - |y| \leqslant |x+y|$,
- *et* $|y| = |x + y - x| \leqslant |x+y| + |x| \implies |y| - |x| \leqslant |x+y|$.

En conclusion, $|x+y|$ est supérieur aux deux nombres $|x| - |y|$ et $-\big(\,|x| - |y|\,\big)$ donc à leur max i.e.

$$\Big|\,|x| - |y|\,\Big| \leqslant |x+y|\,.$$

Par parité de la valeur absolue et en substituant $-y$ à y, on a aussi $\big||x|-|y|\big| \leqslant |x-y| \leqslant |x|+|y|$.
D'où le résultat escompté :

$$\big||x|-|y|\big| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x|+|y|.$$

Enfin, il y a égalité si, et seulement si $xy = |x|\,|y| \geqslant 0$ si, et seulement si x et y sont de même signe.

Exercice 8 : Résoudre l'équation $|x+y|+y = |x-y|-y$.
Représenter graphiquement l'ensemble des solutions.

Les propriétés (1), (2) et (XII.2) font de la valeur absolue une *norme* sur $\mathbb{R}$.

Soit E un ensemble. On dira qu'une application $\mathrm{N} : \mathrm{E} \longmapsto \mathbb{R}_+$ est une norme (sur E) si, et seulement si

$$\begin{aligned}
\textbf{Séparation :}\quad & \forall\, x \in \mathrm{E},\ \mathrm{N}(x)=0 \iff x=0.\\
\textbf{Absolue homogénéité :}\quad & \forall\, (\lambda\,;x) \in \mathbb{R}\times\mathrm{E},\ \mathrm{N}(\lambda x) = |\lambda|\ \mathrm{N}(x).\\
\textbf{Inégalité triangulaire :}\quad & \forall\, (x\,;y) \in \mathrm{E}^2,\ \mathrm{N}(x+y) \leqslant \mathrm{N}(x)+\mathrm{N}(y).
\end{aligned}$$

Ainsi doté, on dit que l'ensemble $(\mathbb{R}, |\ |)$ est *un espace normé*.

Un espace normé est, en particulier, un espace topologique puisque la norme permet de redéfinir les ouverts précédents.

Par exemple, $\forall\, a \in \mathbb{R}$, et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $]a-\varepsilon\,;a+\varepsilon[= \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x-a| < \varepsilon\}$.

Proposition 10 (Fonction valeur absolue) :

- La fonction $x \longmapsto |x|$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \longmapsto |x|$ est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$ où elle est respectivement décroissante et croissante.

ATTENTION La fonction $x \longmapsto |x|$ n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

Preuve :

– Pour la continuité, on utilise la relation (XII.2) sous la forme :

$$||x|-|y|| \leqslant |x-y|\,.$$

– Pour la dérivabilité, le plus simple est d'écrire :

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geqslant 0,\\ -x & si \quad x < 0. \end{cases}$$

En 0, la courbe de la valeur absolue admet donc deux demies-tangentes d'équation $y=-x$ et $y=x$. Elle n'y est donc pas dérivable.

Une autre manière de définir ou de voir $|x|$ est d'écrire $|x| = d(\mathrm{O},\mathrm{M})$ où M est le point de l'axe réel d'abscisse x.

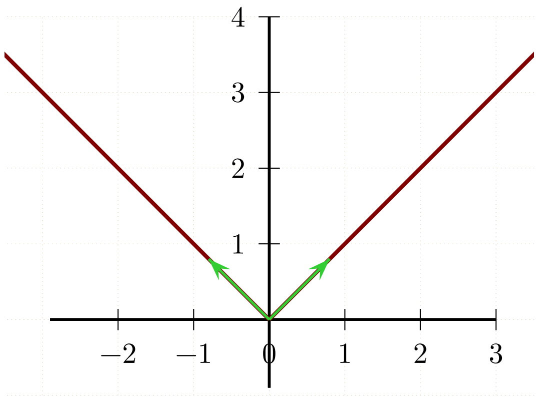


Figure XII.3 – Courbe représentative de $x \longmapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$.

Définition 11 (Distance) : Soit $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.
On appelle distance entre x et y, noté $d\,(x\,;y)$, le réel $|x-y|$.

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ d\,(x\,;y) = |x-y|\,.$$

Plus généralement, soit E un ensemble. On dira qu'une application $d\,:\,\mathrm{E}\times\mathrm{E} \longmapsto \mathbb{R}_+$ est une distance (sur E) si, et seulement si

Symétrie : $\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2,\ d\,(x\,;y) = d\,(y\,;x)$.

Séparation : $\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2,\ d\,(x\,;y) = 0 \iff x = y$.

Inégalité triangulaire : $\forall\ (x\,;y\,;z) \in \mathrm{E}^3,\ d\,(x\,;z) \leqslant d\,(x\,;y) + d\,(y\,;z)$.

On dira alors que $(\mathbb{R},\, d)$ est un espace métrique. En particulier, les espaces normés sont des espaces métriques.

De plus et on peut redéfinir les ouverts de $\mathbb{R}$ à partir de la distance :

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\quad]a-\varepsilon\,;a+\varepsilon[= \{x \in \mathbb{R}\,/\,d\,(x\,;a) < \varepsilon\}.$$

Un espace métrique est donc aussi un espace topologique.

ATTENTION Si tous les espaces normés peuvent être munis d'une distance en posant $d\,(x\,;y) = |x-y|$, toutes les distances ne dérivent pas d'une norme *i.e.* tous les espaces métriques ne sont pas des espaces normés.

Exercice 9 : Compléter le tableau suivant (NB : $\varepsilon > 0$) :

Valeur absolue	Distance	Inégalités	Intervalle(s)
$\lvert x-2\rvert \leqslant 3$			
	$d(x,-1) \geqslant 5$		
		$1 \leqslant x \leqslant 2$	
			$]-5,9[$
		$10 < x < 11$	
$\lvert x+1\rvert \leqslant -1$			
	$d(x,a) \leqslant \varepsilon$		

IV.2 Partie entière

Théorème 11 ($\mathbb{R}$ est archimédien) : L'ensemble $\mathbb{R}$ est archimédien *i.e.* $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall\, y \in \mathbb{R}$, $\exists\, n \in \mathbb{N}, \quad y < nx$.

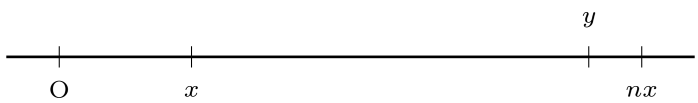


Figure XII.4 – $\mathbb{R}$ est archimédien.

Preuve : Si $y < x$, il suffit de prendre $n = 1$.
Considérons alors le cas $x \leqslant y$ et supposons le contraire de notre propriété i.e.

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ nx \leqslant y.$$

On considère alors $\mathrm{A} = \{nx \,/\, n \in \mathbb{N}\}$.

– A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide car elle contient $1x = x$.
– D'après notre hypothèse, elle est aussi majorée par y.

D'après le théorème (3), A admet donc une borne supérieure $a = \sup(\mathrm{A})$.

Comme $a - x < a$, alors, par définition de a, $a - x$ n'est pas un majorant de A i.e. il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a - x < n_0 x \iff a < (n_0+1)x$.

Comme $(n_0+1)x \in \mathrm{A}$, ceci contredit la définition de a.

La partie A ne peut être majorée donc $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tel que $y < nx$.

Corollaire 11.1 : Pour tout $x \in]1\,;+\infty[$ et tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $y < x^n$.

Preuve : Si $y \leqslant 0$, le résultat est immédiat avec $n = 0$ ou $n = 1$.
Supposons $y > 0$. Alors $y' = \ln(y) \in \mathbb{R}$ et $x' = \ln(x) \in \mathbb{R}_+^*$.
D'après la propriété d'Archimède précédente, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$y' < nx' \quad \iff \ln(y) < n\ln(x) = \ln(x^n)\,.$$

Par stricte croissance de la fonction logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $y < x^n$.

Définition/Théorème 12 (Partie entière) : Soit $x \in \mathbb{R}$.

Il existe un unique entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$p \leqslant x < p + 1. \tag{XII.3}$$

Cet entier, noté $\lfloor x \rfloor$ ou $\mathrm{E}(x)$, est appelé *partie entière* de x :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

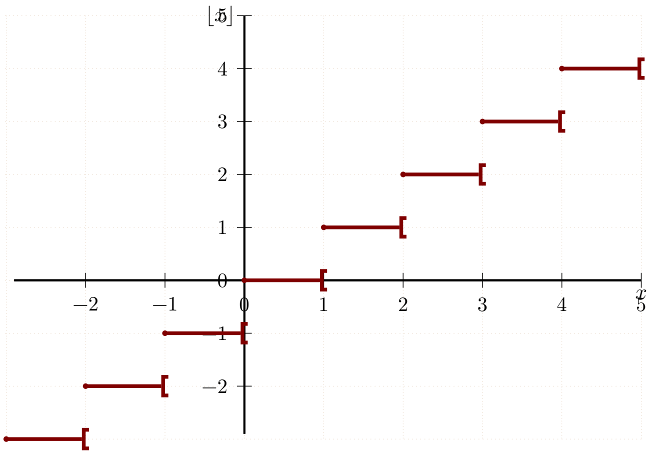


Figure XII.5 – $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$

Notamment, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Preuve :

Existence : Si $x = 0$ il suffit de prendre $p = 0$.

Sinon, posons $\mathrm{A} = \{n \in \mathbb{Z} \,/\, x < n + 1\}$.

A est non vide. En effet,

- Si $x < 0$ alors $0 \in \mathrm{A}$.
- Si $x > 0$, comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe au moins un entier n tel que $x \leqslant n \times 1 = n < n+1$ i.e. A possède au moins un élément.

Dans tous les cas, A est donc non vide.

De plus, A est minoré par $x - 1$ donc A possède une borne inférieure $c = \inf(\mathrm{A})$.

Par définition de c, le réel $c + \dfrac{1}{2}$ ne minore pas A donc il existe un entier $p \in \mathrm{A}$ tel que $c \leqslant p < c + \dfrac{1}{2}$.

Si $c < p$, alors p ne minore pas A i.e. il existe $n_1 \in \mathrm{A}$ tel que $c \leqslant n_1 < p < c + \dfrac{1}{2}$. Ce qui est absurde car p et n_1 sont deux entiers distincts dans un intervalle de longueur $\dfrac{1}{2}$.

On en déduit que $p = c = \inf(\mathrm{A}) \in \mathrm{A}$. Donc $c = \min(\mathrm{A})$. En particulier, $c \in \mathbb{Z}$.

De plus, $c - 1 < c$ donc $c - 1 \notin \mathrm{A} \iff x \geqslant (c-1) + 1 = c$.

En conclusion, $c \leqslant x < c+1$.

Unicité : On suppose le contraire et deux entiers p_1 et p_2 tels que :

$$p_1 \leqslant x < p_1 + 1 \tag{XII.4}$$
$$p_2 \leqslant x < p_2 + 1 \iff -p_2 - 1 < -x \leqslant -p_2 \tag{XII.5}$$

En sommant (XII.4) et (XII.5), on obtient :

$$p_1 - p_2 - 1 < 0 < p_1 - p_2 + 1 \iff |p_1 - p_2| < 1. \tag{XII.6}$$

Les deux entiers p_1 et p_2 dont la distance mutuelle est strictement inférieure à 1 sont donc égaux i.e. $p_1 = p_2$ et l'unicité.

Exemples 11 : $\lfloor 5 \rfloor = 5$, $\lfloor -2 \rfloor = -2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$, $\lfloor \mathrm{e} \rfloor = 2$, $\lfloor -\mathrm{e} \rfloor = -3$.

ATTENTION $\lfloor -7,3 \rfloor = -8$ et non -7.

Exemple 12 : Soient $\mathrm{T} > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. À quelle condition sur $n \in \mathbb{Z}$, a-t-on $x - n\mathrm{T} \in [0\,;\mathrm{T}[$?

$$x - n\mathrm{T} \in [0\,;\mathrm{T}[\iff 0 \leqslant x - n\mathrm{T} < \mathrm{T} \iff n \leqslant \frac{x}{\mathrm{T}} < n+1.$$

Par définition de la partie entière, l'entier $\left\lfloor \frac{x}{\mathrm{T}} \right\rfloor$ convient.

À retenir, donc : $x - \left\lfloor \frac{x}{\mathrm{T}} \right\rfloor \mathrm{T} \in [0\,;\mathrm{T}[$.

Exemples 13 : Soient $\varepsilon > 0$ et $\mathrm{A} > 0$ fixés.

Le mot « rang » désigne ci-dessous uniquement des entiers naturels.

- À partir de quel rang est-il vrai que $\frac{1}{n} < \varepsilon$?

  Cette inégalité est vraie si et seulement si $n > \frac{1}{\varepsilon}$, donc à partir du rang $\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ car $\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{1}{\varepsilon}$.
- À partir de quel rang est-il vrai que $n^2 > \mathrm{A}$?

  C'est vrai si et seulement si $n > \sqrt{\mathrm{A}}$, donc à partir du rang $\left\lfloor \sqrt{\mathrm{A}} \right\rfloor + 1$.
- À partir de quel rang est-il vrai que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$?

  C'est vrai si et seulement si $2^n > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}$, donc à partir du rang $\max\left\{0, \left\lfloor -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2} \right\rfloor + 1\right\}$.
  Pourquoi ce « max » ? Parce que nous cherchons un entier naturel.

De la démonstration, on obtient une caractérisation très importante de la partie entière :

Corollaire II.2 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad k \leqslant x \implies k \leqslant \lfloor x \rfloor.$$

Méthode 3 (Utilisation de la partie entière) :
Soient $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$.

Pour montrer que $k \leqslant \lfloor x \rfloor$, il suffit de montrer que $k \leqslant x$.

En effet, si $k \leqslant x$ alors k est un entier inférieur à x. Il est donc plus petit que le plus grand entier inférieur à x soit $k \leqslant \lfloor x \rfloor$.

Exercice 10 :

1. Montrer que : $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ x \leqslant y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$.

   Que peut-on en conclure pour la fonction partie entière ?
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$.
3. Montrer que : $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ \lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0, 1\}$.

   À-t-on $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ \lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$?
4. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

Proposition 12 (Propriétés de la partie entière) :

1.
   - Pour tout réel x et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
   - La fonction $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique.

2. La fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est :
   - croissante sur $\mathbb{R}$,
   - constante sur tout intervalle de la forme $[n\,; n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$,
   - continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,
   - continue à droite mais discontinue à gauche en tout entier $n \in \mathbb{Z}$.

Preuve :

1. Montrons l'assertion (1) :

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

– $\lfloor x \rfloor \leqslant x$ donc $\lfloor x \rfloor + k \leqslant x + k$.

$\lfloor x \rfloor + k$ étant un entier inférieur à $x+k$, et $\lfloor x+k \rfloor$ le plus grand d'entre eux, on a :

$$\lfloor x \rfloor + k \leqslant \lfloor x+k \rfloor\,. \tag{XII.7}$$

– $\lfloor x+k \rfloor \leqslant x+k$ donc $\lfloor x+k \rfloor - k \leqslant x$.

$\lfloor x+k \rfloor - k$ étant un entier inférieur à x, et $\lfloor x \rfloor$ le plus grand d'entre eux, on a :

$$\lfloor x+k \rfloor - k \leqslant \lfloor x \rfloor$$
$$\lfloor x+k \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + k \tag{XII.8}$$

De (XII.7) et (XII.8), on obtient finalement le résultat :

$$\lfloor x+k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k.$$

2. Le raisonnement est identique pour montrer que la fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$:

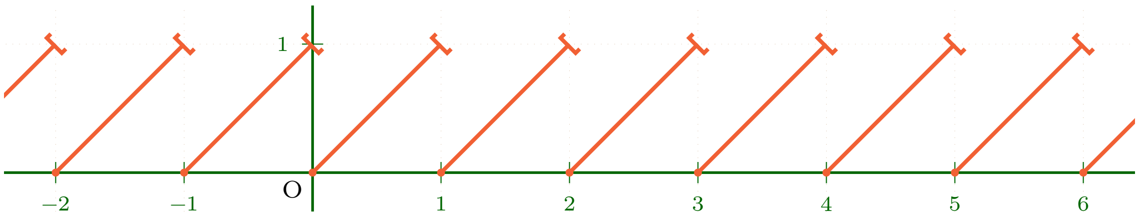
   Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.

   Alors, $\lfloor x \rfloor \leqslant x < y$. $\lfloor x \rfloor$ est donc un entier inférieur à y. Il est inférieur au plus grand d'entre eux soit $\lfloor y \rfloor$ et on a :
   $$\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor .$$
   La fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

   Toutes les autres propriétés découlent de ces deux propriétés.

Exercice 11 : Représenter la fonction $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$.

Correction :



$x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$.

V Notion de densité

V.1 Place des rationnels et des irrationnels dans $\mathbb{R}$

Théorème 13 ($\mathbb{Q}$ et $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$) :

Tout intervalle $]a\,;b[$ non vide de $\mathbb{R}$ rencontre $\mathbb{Q}$ et $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$.

Moralité, il y a ainsi toujours un rationnel entre deux irrationnels distincts et un irrationnel entre deux rationnels distincts.

Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont imbriqués l'un dans l'autre un peu à la manière d'une fermeture-éclair mais partout et aussi près les uns des autres que l'on veut.

Visualisez bien le paradoxe : $\mathbb{Q}$ est grand dans $\mathbb{R}$ mais son complémentaire aussi. Contre-intuitif s'il en est !

Preuve : Nous devons montrer que $]a\,;b[$ contient un rationnel et un irrationnel.

Soient x et y deux éléments de $]a\,;b[$.

1. Si l'un d'eux est rationnel et l'autre irrationnel, il n'y a rien à montrer
2. S'ils sont tous deux rationnels tels que $x < y$, il suffit d'exhiber un irrationnel entre eux :

   Posons $z = x + \dfrac{(y-x)\sqrt{2}}{2}$.

   Comme $0 < \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$, il est clair que $z \in \,]x\,;y[$.

De plus, z ne peut être rationnel car sinon on aurait $\sqrt{2} = \dfrac{2(z-x)}{y-x} \in \mathbb{Q}$.

3 S'ils sont tous deux irrationnels tels que $x < y$, il suffit de trouver un rationnel entre eux :

Remarquons que si l'on veut être sûr de trouver un rationnel de la forme $\dfrac{p}{q}$ à l'intérieur de $]x\,;y[$, il est naturel de chercher un entier q tel que la distance $y-x$ soit supérieure à $\dfrac{1}{q}$ i.e.

$$0 < \frac{1}{q} < y - x \iff \frac{1}{y-x} < q.$$

On pose donc $q = \left\lfloor \dfrac{1}{y-x} \right\rfloor + 1$.

En particulier, , $0 < \dfrac{1}{q} < y - x \iff 1 < q(y-x)$.

Posons alors $p = \lfloor qx \rfloor \iff p \leqslant qx < p+1 \leqslant qx + 1 < qx + q(y-x) = qy$.

D'où $x < \dfrac{p+1}{q} < y$.

Comme $z = \dfrac{p+1}{q} \in \mathbb{Q}$, il répond bien à la question.

Corollaire 13.1 : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

- $\exists\, q \in \mathbb{Q}$ tel que $|x - q| < \varepsilon$.
- $\exists\, r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $|x - r| < \varepsilon$.

On dit que $\mathbb{R}$ est *adhérent* à $\mathbb{Q}$ et à $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ou que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont *denses* dans $\mathbb{R}$.

En termes simples, une partie dense de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui est un peu partout sans être forcément tout.

Preuve : Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $]x-\varepsilon\,;x+\varepsilon[$ est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Il suffit d'appliquer le théorème (13).

Corollaire 13.2 :

Tout réel est la limite d'une suite de rationnels et d'une suite d'irrationnels.

Preuve : Soit x un nombre réel.

Si $x \in \mathbb{Q}$, il suffit de prendre la suite de rationnels constante à x.

Sinon, d'après le théorème (13), pour tout réel x et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'intervalle $\left]x - \dfrac{1}{n}\,; x + \dfrac{1}{n}\right[$ contient un rationnel y_n et un irrationnel z_n.

On construit ainsi deux suites $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ayant pour limite x. L'une de rationnels, l'autre d'irrationnels.

Exemples 14 (Parties denses dans $\mathbb{R}$) :

- L'anneau $\mathbb{D}$ des nombres décimaux : $\mathbb{D} = \left\{ \dfrac{p}{10^n},\, p \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N} \right\}$ (*cf.* corollaire (13.3)).
- $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas denses dans $\mathbb{R}$.

V.2 Approximations décimales

Définition/Théorème 13 (Approximation décimale d'un réel) : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le nombre décimal $p_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ est appelé *approximation décimale par défaut* de x a la précision 10^{-n} et on a :

$$p_n \leqslant x < p_n + \frac{1}{10^n}.$$

Le nombre $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$ est appelé *approximation décimale par excès* de x a la précision 10^{-n}.

Remarque : $p_0 = \lfloor x \rfloor$.

Preuve : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Alors, $\lfloor 10^n x \rfloor$ est l'unique entier tel que :

$$\lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1 \iff \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leqslant x < \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}.$$

Exemple 15 (Approximation décimale de $\sqrt{2}$) :

Prenons $x = \sqrt{2}$ et posons $u_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

- $1^2 \leqslant x^2 < 2^2$ donc $1 \leqslant x < 2$ à 10^0 près et
$$u_0 = \lfloor x \rfloor = 1 \ \text{ (partie entière de } x).$$
- $(10x)^2 = 200$ et $14^2 = 196 \leqslant (10x^2) < 15^2 = 225$, donc $1,4 \leqslant x < 1,5$ à 10^{-1} près et
$$u_1 = \frac{\lfloor 10x \rfloor}{10} = \frac{14}{10} = 1,4.$$
- $(100x)^2 = 20000$ et $141^2 \leqslant (100x^2) < 142^2$, donc $1,41 \leqslant x < 1,42$ à 10^{-2} près et
$$u_2 = \frac{\lfloor 100x \rfloor}{100} = \frac{141}{100} = 1,41.$$
- ...

On construit ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des approximations décimale de $\sqrt{2}$ par défaut à 10^{-n} près.

Exemple 16 : $3,1415 \leqslant \pi < 3,1416$ à 10^{-4} près.

Corollaire 13.3 :

$\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Preuve : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Considérons la suite $\left(p_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}\right)_{ninN}$ des approximations décimales par défaut de x.

Par construction, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n \in \mathbb{D}$ et on a :

$$\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leqslant x < \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n} \iff 0 \leqslant x - p_n < \frac{1}{10^n}.$$

Comme, $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{10^n} = 0$, d'après la théorème d'encadrement la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

En particulier, pour $n > \left\lfloor \log(\varepsilon) \right\rfloor + 1$, $|x - p_n| < \varepsilon$: $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Remarque : Comme $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, c'est aussi une autre manière de montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Définition/Théorème 14 (Décimale) : Soit $x \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soient $p_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $d_n = 10^n(p_n - p_{n-1})$.

Alors d_n est un entier compris entre 0 et 1 appelé n-ième *décimale* de x.

Preuve : On a :

$$10^n p_n = \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant \ 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1 = 10^n p_n + 1. \qquad \text{(XII.9)}$$

Et de l'encadrement

$$10^{n-1} p_{n-1} = \lfloor 10^{n-1} x \rfloor \leqslant \ 10^{n-1} x < 1 + \lfloor 10^{n-1} x \rfloor = 1 + 10^{n-1} p_{n-1}$$

en multipliant par 10 on a aussi :

$$10^n p_{n-1} \leqslant \ 10^n x < 10 + 10^n p_{n-1}.$$

En multipliant par (-1),

$$\begin{array}{rrcl} & -10^n p_{n-1} - 10 < & -10^n x & \leqslant -10^n p_{n-1} \qquad \text{(XII.10)} \\ \text{(XII.9)} + \text{(XII.10)} & 10^n(p_n - p_{n-1}) - 10 < & 0 & < 10^n(p_n - p_{n-1}) + 1 \end{array}$$

On en déduit,

$$d_n - 10 < \ 0 \ < d_n + 1.$$

Par conséquent, d_n est un entier vérifiant $-1 \leqslant d_n < 10$ i.e. $0 \leqslant d_n \leqslant 9$.

Remarque : $p_n - p_{n-1} = d_n 10^{-n}$, ce qui entraîne, par télescopage, que :

$$\begin{aligned} p_n &= p_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{10^k} \\ &= p_0, d_1 d_2 \dots d_n. \end{aligned}$$

Comme la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, on écrit alors :

$$x = p_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} = p_0, d_1 d_2 d_3 \dots$$

Développement décimal infini du réel x.

En conclusion :

À retenir I (Propriétés de $\mathbb{R}$) :

- $(\mathbb{R}, +, \times, .)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative.
- $\mathbb{R}$ est doté d'une relation d'ordre totale $\leqslant$ qui permet de définir la norme $|x|$ d'un réel et la distance entre deux réels :

$$\mathrm{d}\,(x\,;y) = |x - y|.$$

- La relation d'ordre permet de doter $\mathbb{R}$ d'une famille de voisinages ouverts. $\mathbb{R}$ possède donc une structure d'espace normé et d'espace métrique.
- $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure.
- $\mathbb{R}$ est archimédien. En particulier, $\forall\, \mathrm{x}\ \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à x :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

- $\mathbb{R}$ est indénombrable.
- $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$ qui y est dense. De même que son complémentaire et l'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux.

  En particulier, tout réel peut être vu comme la limite d'une suite de rationnels, d'irrationnels ou de décimaux.

Index